Processamento de Imagens

Introdução

Mylène Christine Queiroz de Farias

Departamento de Engenharia Elétrica
Universidade de Brasília (UnB)
Brasília, DF 70910-900

mylene@unb.br

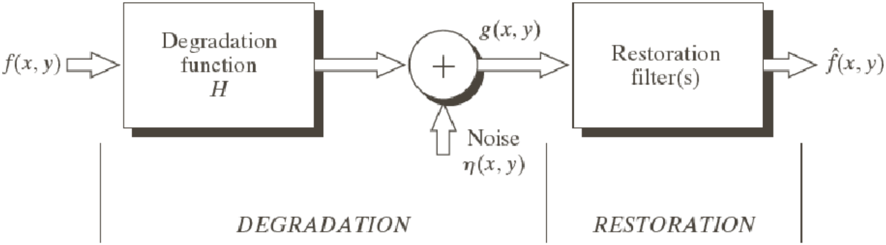
29 de Março de 2016

Aula 07: Restauração e Reconstrução

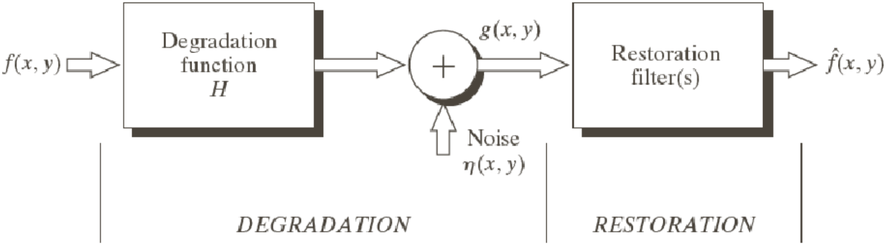
Sumário

- Modelos e Tipos de Ruídos;
- Técnicas de Restauração
- Degradações Lineares
- Estimação da Função Degradação
- Filtragem Inversa

Modelo do Processo de degradaçãorestauração



$$\boxed{g(x,y) = h(x,y) * f(x,y) + \eta(x,y)}$$



$$\boxed{G(u, v) = H(u, v) \cdot F(u, v) + N(u, v)}$$

Ruídos

- Ruído Gaussiano:

$$p(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-(z-\mu)^2/2\sigma^2}$$

- Ruído Rayleigh:

$$p(z) = \begin{cases} \frac{2}{b}(z-1)e^{-(z-a)^2/b}, & \text{para } z \geq a \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \tag{1}$$

- Ruído Erlang:

$$p(z) = \begin{cases} \frac{a^b z^{b-1}}{(b-1)!} e^{-az}, & \text{para } z \geq 0 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \tag{2}$$

Ruídos

- Ruído Exponencial:

$$p(z) = \begin{cases} ae^{-az}, & \text{para } z \geq 0 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \tag{3}$$

- Ruído Uniforme:

$$p(z) = \begin{cases} \frac{1}{(b-a)}, & \text{para } b \leq z \leq a \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \tag{4}$$

- Ruído Impulsivo:

$$p(z) = \begin{cases} P_a, & \text{para } z = a \\ P_b, & \text{para } z = b \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \tag{5}$$

FDPs dos Principais Tipos de Ruído

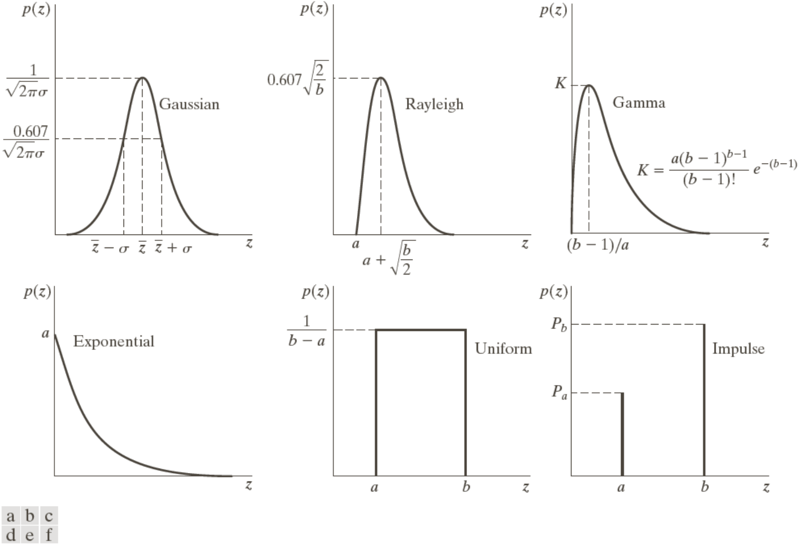
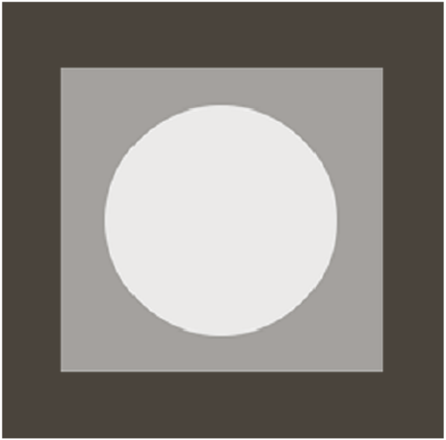
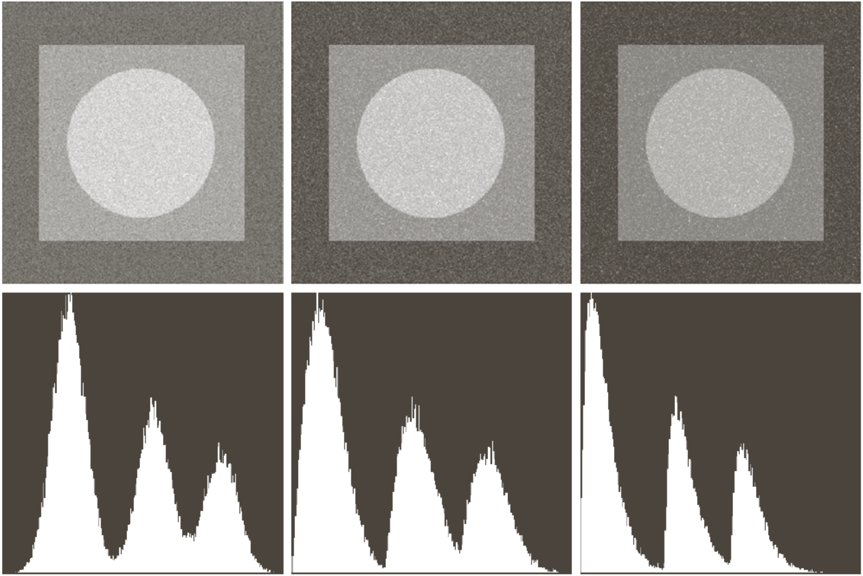


FIGURE 5.2 Some important probability density functions.

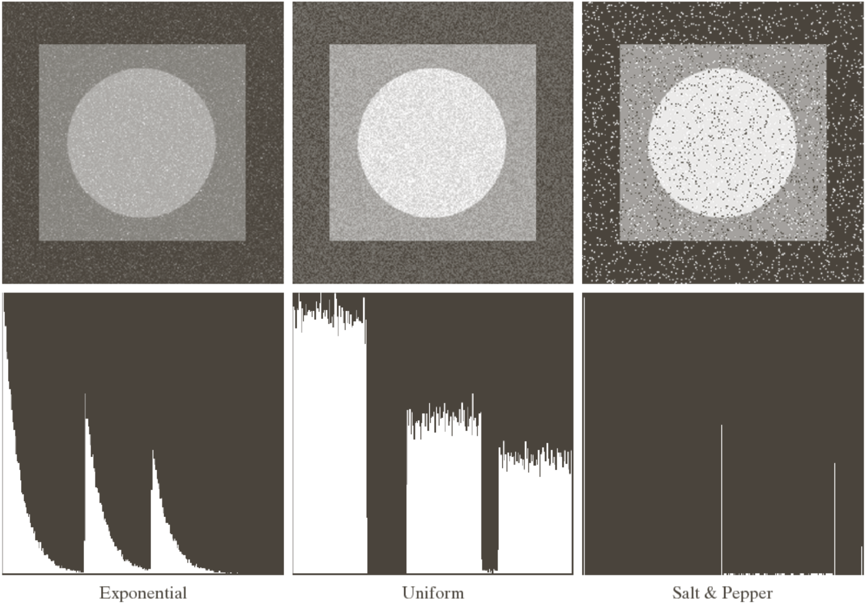


Exemplos



Gaussian Rayleigh Gamma

Exemplos

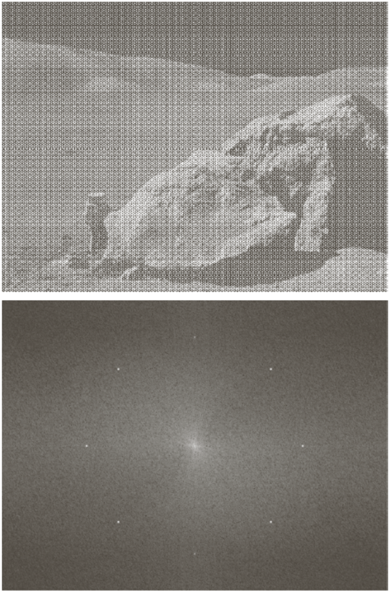


Ruídos

Maneiras de Extrair Ruído

- espectro
- domínio espacial
- analisando o padrão de ruído (fonte conhecida)
- analisando sub-regiões da imagem

Ruído Periódico



a
b

FIGURE 5.5 (a) Image corrupted by sinusoidal noise. (b) Spectrum (each pair of conjugate impulses corresponds to one sine wave). (Original image courtesy of NASA.)

Análise de Regiões

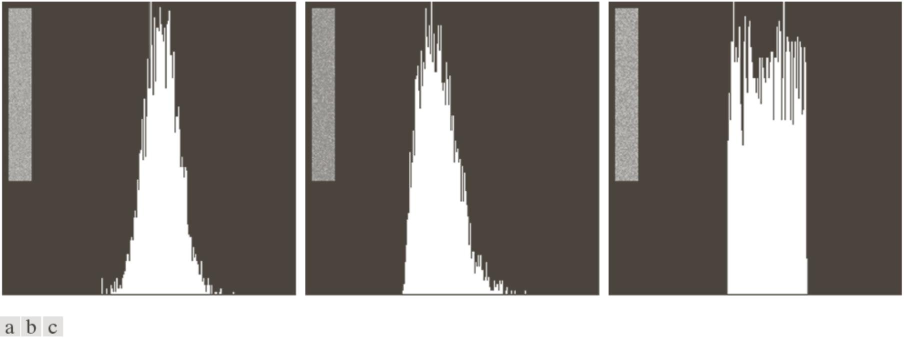


FIGURE 5.6 Histograms computed using small strips (shown as inserts) from (a) the Gaussian, (b) the Rayleigh, and (c) the uniform noisy images in Fig. 5.4.

Ruídos

Filtragem

- domínio da frequência
- domínio espacial

Filtragem Espacial

$$\boxed{g(x,y) = f(x,y) + \eta(x,y)}$$

$$\boxed{G(u,v) = F(u,v) + N(u,v)}$$

- Ruído Aditivo – Filtragem espacial;
- Filtros espaciais semelhantes ao do capítulo anterior.

- Média Aritmética:

$$\boxed{\hat{f}(x,y) = \frac{1}{mn}\sum_{(s,t)\in S_{x,y}} g(s,t)}$$

- Mediana:

$$\boxed{\hat{f}(x,y) = \text{Mediana}_{(s,t)\in S_{x,y}}\{g(s,t)\}}$$

- Média Geométrica:

$$\boxed{\hat{f}(x,y) = \left[\prod_{(s,t)\in S_{x,y}} g(s,t)\right]^{mn}}$$

- Média Harmônica:

$$\boxed{\hat{f}(x,y) = \frac{mn}{\sum_{(s,t)\in S_{x,y}} \frac{1}{g(s,t)}}}$$

- Média Contra-Harmônica:

$$\boxed{\hat{f}(x,y) = \frac{\sum_{(s,t)\in S_{x,y}} g(s,t)^{Q+1}}{\sum_{(s,t)\in S_{x,y}} g(s,t)^{Q}}}$$

- Máximo e Mínimo:

$$\boxed{\hat{f}(x,y) = \max_{(s,t)\in S_{x,y}} \{g(s,t)\}}$$

$$\boxed{\hat{f}(x,y) = \min_{(s,t)\in S_{x,y}} \{g(s,t)\}}$$

Filtragem Espacial

- Ponto Médio:

$$\boxed{\hat{f}(x,y) = \frac{1}{2}\left[\max_{(s,t)\in S_{x,y}}\{g(s,t)\} + \min_{(s,t)\in S_{x,y}}\{g(s,t)\}\right]}$$

- Média Alfa-Podada:

$$\boxed{\hat{f}(x,y) = \frac{1}{mn-d}\sum_{(s,t)\in S_{x,y}} g(s,t)}$$

Apaga-se os $d/2$ menores e os $d/2$ maiores valores na vizinhana $S_{x,y}$.

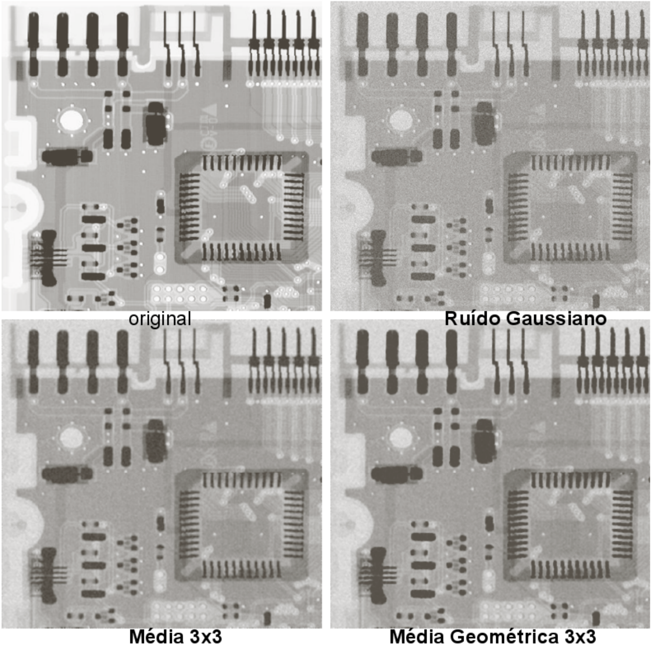
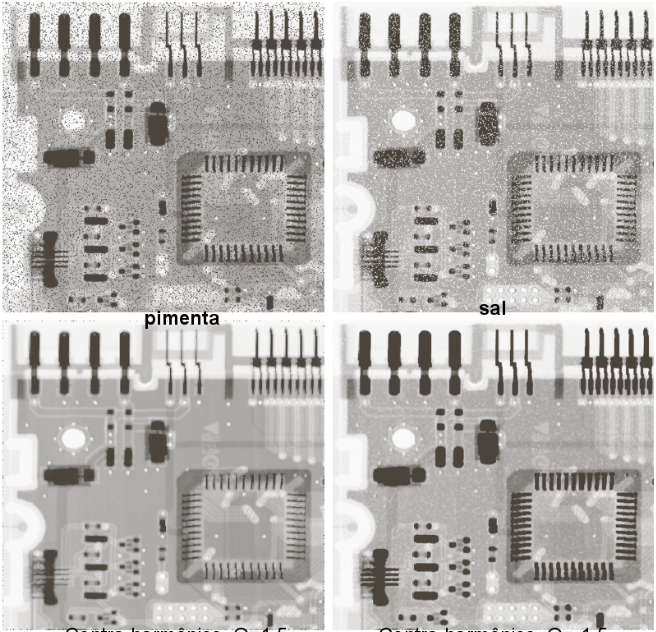


FIGURE 5.7
(a) X-ray image. (b) Image corrupted by additive Gaussian noise. (c) Result of filtering with an arithmetic mean filter of size 3 × 3. (d) Result of filtering with a geometric mean filter of the same size. (Original image courtesy of Mr. Joseph E. Pascente, Lixi, Inc.)

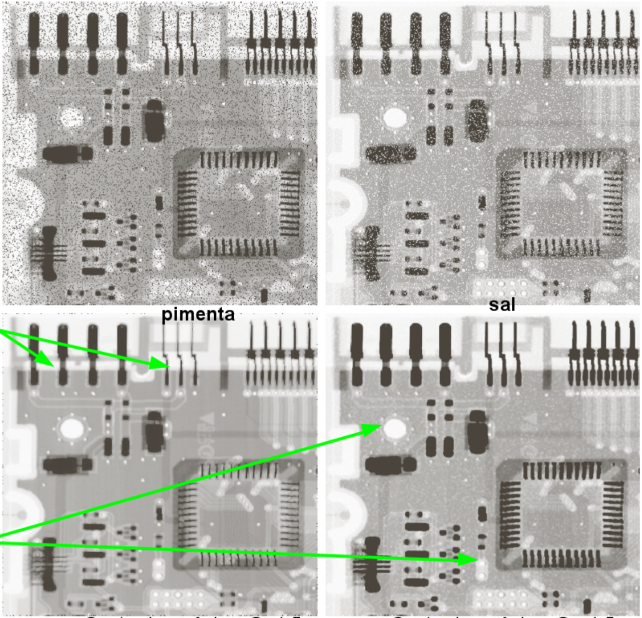
O filtro média geométrica causou menos borrado.



a b
c d

FIGURE 5.8 (a) Image corrupted by pepper noise with a probability of 0.1. (b) Image corrupted by salt noise with the same probability. (c) Result of filtering (a) with a 3×3 contra-harmonic filter of order 1.5. (d) Result of filtering (b) with $Q = -1.5$.

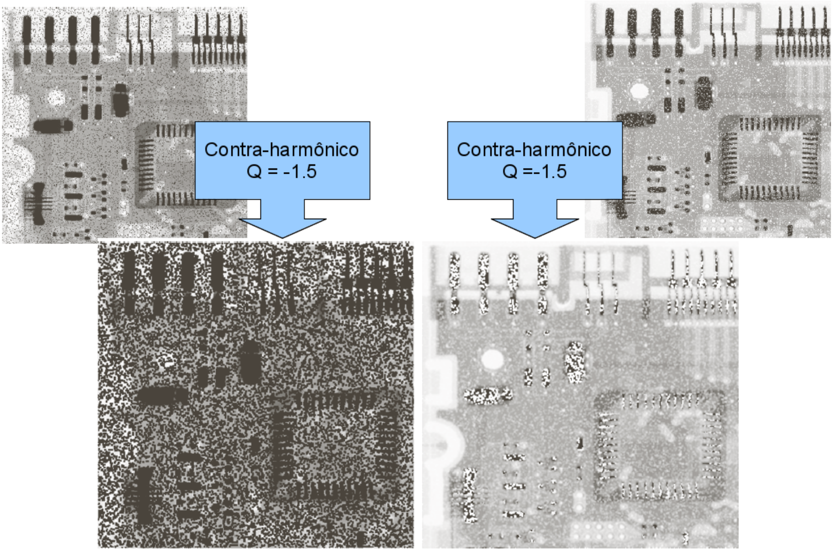
Q>0, afinamento
e borramento
das áreas escuras



Contra-harmônico, Q=1.5

Contra-harmônico, Q=-1.5

Q<0, afinamento
e borramento
das áreas claras


Contra-harmônico
Q = -1.5
Contra-harmônico
Q =-1.5

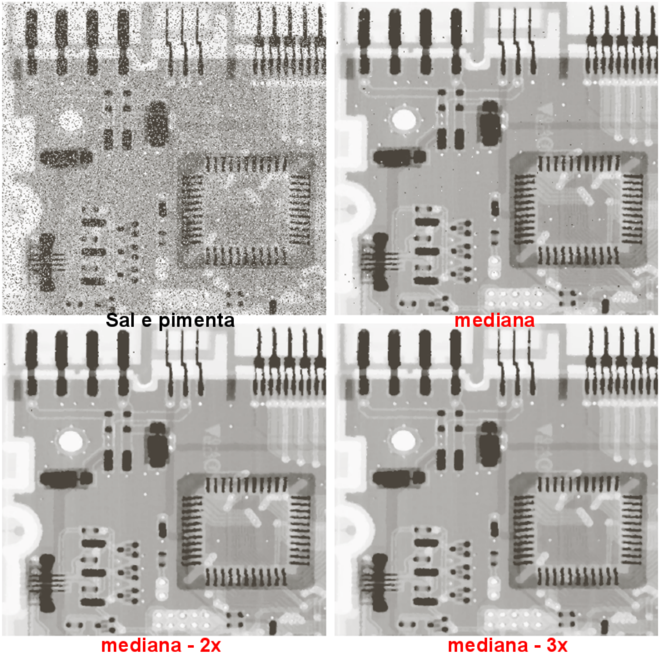
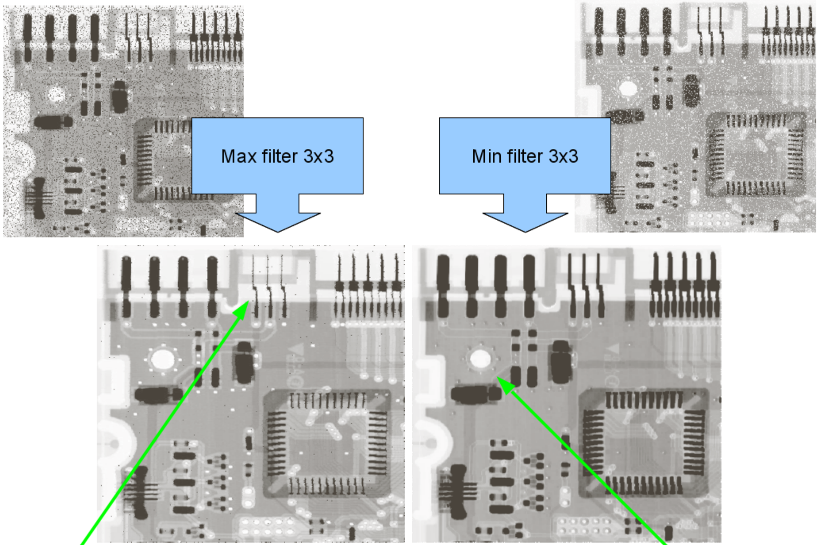


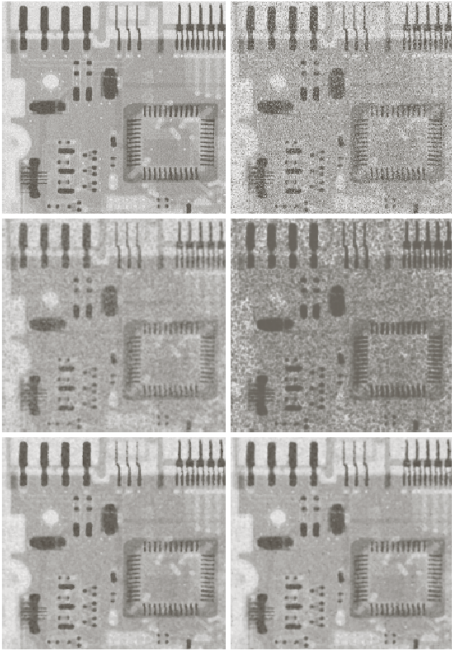
FIGURE 5.10 (a) Image corrupted by salt-and-pepper noise with probabilities $P_a = P_b = 0.1$. (b) Result of one pass with a median filter of size 3×3. (c) Result of processing (b) with this filter. (d) Result of processing (c) with the same filter.

Filtrando com max e min



Detalhes em preto diminuíram.

Detalhes em branco diminuíram.



Ruído uniforme

Ruído uniforme +
pimenta-e-sal

Filtro média

Filtro média geométrica

Filtro mediana

Filtro alpha-podado
d=5

Filtros Adaptativos

- Mudam a cada regiâo adaptando-se de acordo com a estatística da imagem
- Maior custo computacional
  - Média nível médio de intensidade
  - Variância contraste médio
- Região Sxy:
  - Valor g(x,y), variância, média, ruído

$$\boxed{g(x,y) = f(x,y) + \eta(x,y)}$$

- Se $\sigma_\eta^2 = 0$, o filtro deve retornar $g(x,y)$
- Se a variância local σ_L^2 é maior que σ_η^2, o filtro deve retornar $g(x,y)$ (bordas)
- Se as variâncias forem semelhantes, um filtro de média aritmética deve ser aplicado:

$$\boxed{\hat{f}(x,y) = g(x,y) - \frac{\sigma_\eta^2}{\sigma_L^2}\left[g(x,y) - m_L\right], \quad \sigma_\eta^2 \ll \sigma_L^2}$$

Filtro Adaptativo (Mediana)

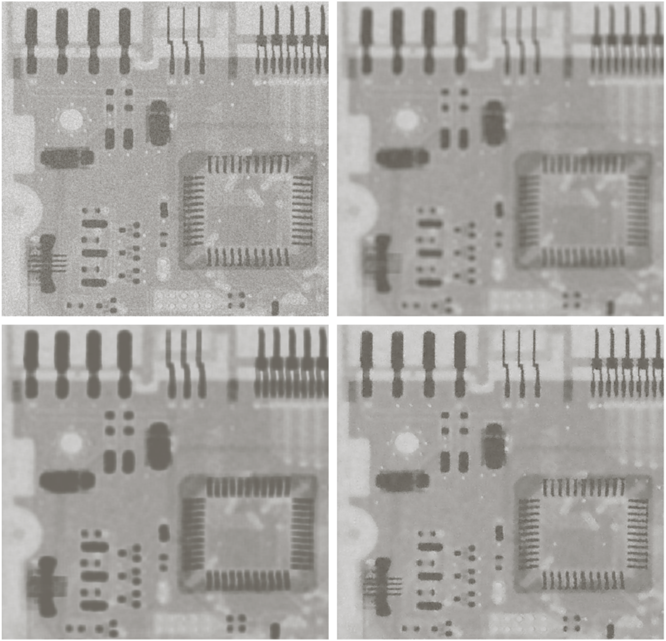
z_{min} = mínimo valor de cinza em $S_{x,y}$
z_{max} = máximo valor de cinza em $S_{x,y}$
z_{med} = valor mediano de cinza em $S_{x,y}$
z_{xy} = valor de cinza nas coordenadas (x, y)
S_{max} = máximo tamanho para $S_{x,y}$

Nível A:

$A_1 = z_{med} - z_{min}$
$A_2 = z_{med} - z_{max}$
IF $A_1 > 0$ e $A_2 < 0$, vá para o nível B
ELSE aumente o tam. janela
IF tam. janela $\leq S_{max}$ repita Nível A
ELSE saída $= z_{xy}$

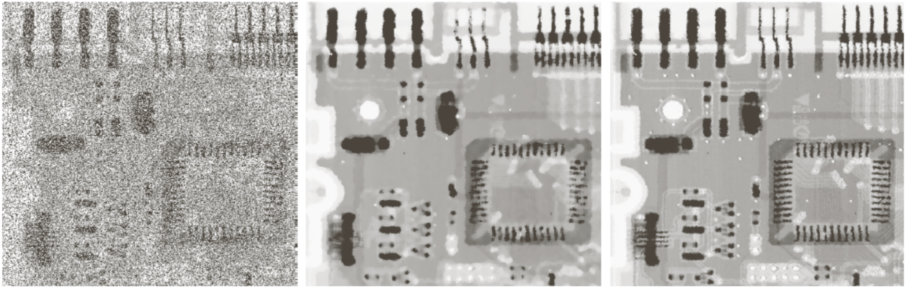
Nível B:

$B_1 = z_{xy} - z_{min}$
$B_2 = z_{xy} - z_{max}$
IF $B_1 > 0$ e $B_2 < 0$, saída $= z_{xy}$
ELSE saída $= z_{med}$



a b
c d

FIGURE 5.13 (a) Image corrupted by additive Gaussian noise of zero mean and variance 1000. (b) Result of arithmetic mean filtering. (c) Result of geometric mean filtering. (d) Result of adaptive noise reduction filtering. All filters were of size 7×7.



a b c

FIGURE 5.14 (a) Image corrupted by salt-and-pepper noise with probabilities $P_a = P_b = 0.25$. (b) Result of filtering with a 7×7 median filter. (c) Result of adaptive median filtering with $S_{\max} = 7$.

Filtrando com Filtro Notch Ótimo

$$g(x, y) = f(x, y) + \eta(x, y)$$
$$N(u, v) = H_{NP}(u, v) \cdot G(u, v)$$

Filtrando com Filtro Notch Ótimo

$$g(x,y) = f(x,y) + \eta(x,y)$$
$$N(u,v) = H_{NP}(u,v) \cdot G(u,v)$$

$$\eta(x,y) = TF^{-1}\left(H_{NP}(u,v) \cdot G(u,v)\right)$$

Filtrando com Filtro Notch Ótimo

$$g(x,y) = f(x,y) + \eta(x,y)$$
$$N(u,v) = H_{NP}(u,v) \cdot G(u,v)$$

$$\eta(x,y) = TF^{-1}\left(H_{NP}(u,v) \cdot G(u,v)\right)$$

$$\hat{f}(x,y) = f(x,y) - w(x,y)\eta(x,y)$$

Escolher $w(x,y)$ de forma a minimizar a variância da estimativa.

Filtrando com Filtro Notch Ótimo

$$g(x,y) = f(x,y) + \eta(x,y)$$
$$N(u,v) = H_{NP}(u,v) \cdot G(u,v)$$

$$\eta(x,y) = TF^{-1}\left(H_{NP}(u,v) \cdot G(u,v)\right)$$

$$\hat{f}(x,y) = f(x,y) - w(x,y)\eta(x,y)$$

Escolher $w(x,y)$ de forma a minimizar a variância da estimativa.

$$\sigma^2(x,y) = \frac{1}{(2a+1)(2b+1)} \sum_{s=-a}^{a} \sum_{t=-b}^{b} \left[\hat{f}(x+s,y+t) - \overline{f}(x,y)\right]^2$$

$$\overline{f(x,y)} = \frac{1}{(2a+1)(2b+1)} \sum_{s=-a}^{a} \sum_{t=-b}^{b} \hat{f}(x+s,y+t)$$

$$w(x+s,y+t) = w(x,y)$$

$$\overline{w(x+s,y+t)\eta(x,y)} = w(x+s,y+t)\overline{\eta(x,y)}$$

Filtrando com Filtro Notch Ótimo

Para minimizar $\sigma^2(x, y)$, resolvemos:

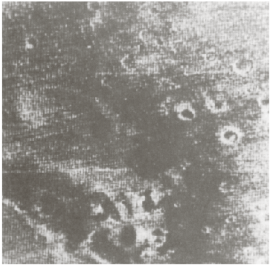
$$\frac{\sigma^2(x, y)}{dw(x, y)} = 0$$

O resultado é:

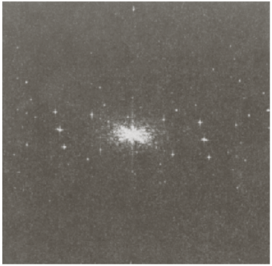
$$w(x, y) = \frac{\overline{g(x, y) \cdot \eta(x, y)} - \overline{g(x, y)} \cdot \overline{\eta(x, y)}}{\overline{\eta^2(x, y)} - \overline{\eta(x, y)}^2}$$

Logo, basta utilizar o resultado acima para obter $\hat{f}(x, y)$:

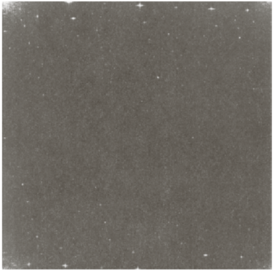
$$\hat{f}(x, y) = f(x, y) - w(x, y)\eta(x, y)$$



original



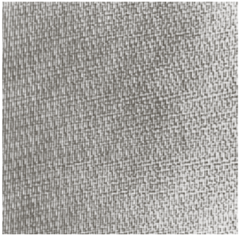
Espectro deslocado



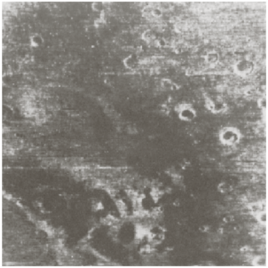
Espectro sem deslocamento

a=b=15

Espectro do Ruído



Ruído no domínio espacial



Processada

$$g(x,y) = H\left[f(x,y)\right] + \eta(x,y)$$

$$\boxed{\text{Se } \eta(x,y) = 0 \Longrightarrow g(x,y) = H\left[f(x,y)\right]}$$

Como o sistema é linear

$$\boxed{H\left[a \cdot f_1(x,y) + b \cdot f_2(x,y)\right] = a \cdot H\left[f_1(x,y)\right] + b \cdot H\left[f_2(x,y)\right]}$$

Como o sistema é invariante no tempo

$$\boxed{H\left[f(x-\alpha, y-\beta)\right] = g(x-\alpha, y-\beta)}$$

$$g(x,y) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(\alpha,\beta)h(x-\alpha, y-\beta)d\alpha d\beta + \eta(x,y)$$

Se $\eta(x,y) = 0$

$$g(x,y) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(\alpha,\beta)h(x-\alpha, y-\beta)d\alpha d\beta$$

$$\boxed{G(u,v) = H(u,v)F(u,v) + N(u,v)}$$

$$\boxed{g(x,y) = h(x,y)h(x,y) + \eta(x,y)}$$

Estimação da Degradação

- Observação:

$$\boxed{H_s(u,v) = \frac{G_s(u,v)}{\hat{F}(u,v)}}$$

- Experimentação:

$$\boxed{H_s(u,v) = \frac{G(u,v)}{A}}$$

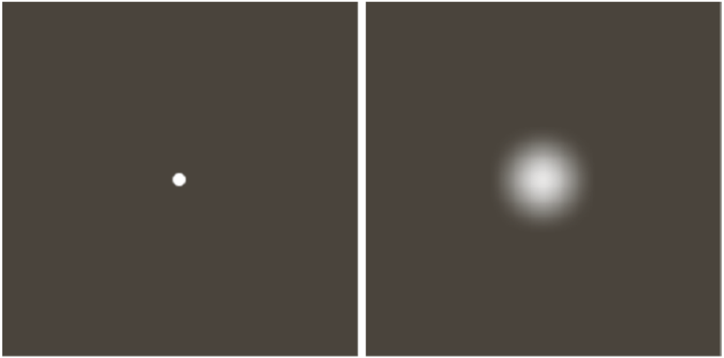
- Modelagem Matemática:

$$\boxed{H(u,v) = e^{-k(u^2+v^2)^{5/6}}}$$

modelo de degradação proposto por Hufnagel e Stanley (1964), baseado em turbulência atmosférica.

a b

FIGURE 5.24 Degradation estimation by impulse characterization. (a) An impulse of light (shown magnified). (b) Imaged (degraded) impulse.



impulso

Imagem degradada peloimpulso

Modelo de turbulência atmosférica

$$H(u,v)=e^{-k(u^2+v^2)^{5/6}}$$

k=0,0025

k=0,001

k=0,00025

Modelo de Borrado (Movimento)

$$g(x, y) = \int_0^T f(x - x_0(t), y - y_o(t))dt$$

Modelo de Borrado (Movimento)

$$g(x,y) = \int_0^T f(x - x_0(t), y - y_o(t))dt$$

$$\begin{aligned} G(u,v) &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} g(x,y)e^{-j2\pi(ux+uy)}dxdy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_0^T f\left[x - x_0(t), y - y_o(t)\right]dt\right]e^{-j2\pi(ux+uy)}dxdy \end{aligned}$$

Modelo de Borrado (Movimento)

$$g(x,y) = \int_0^T f(x - x_0(t), y - y_o(t))dt$$

$$\begin{aligned} G(u,v) &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} g(x,y)e^{-j2\pi(ux+uy)}dxdy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_0^T f\left[x - x_0(t), y - y_o(t)\right]dt\right] e^{-j2\pi(ux+uy)}dxdy \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} G(u,v) &= \int_0^T \left[\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f\left[x - x_0(t), y - y_o(t)\right] e^{-j2\pi(ux+uy)}dxdy\right] dt \\ G(u,v) &= \int_0^T F(u,v)e^{-j2\pi[ux_o(t)+uy_0(t)]}dt \\ &= F(u,v)\int_0^T e^{-j2\pi[ux_o(t)+uy_0(t)]}dt \end{aligned}$$

Modelo de Borrado (Movimento)

$$G(u,v) = \int_0^T \left[\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f\left[x - x_0(t), y - y_o(t)\right] e^{-j2\pi(ux+uy)} dxdy \right] dt$$

$$G(u,v) = \int_0^T F(u,v) e^{-j2\pi[ux_o(t)+uy_0(t)]} dt$$

$$= F(u,v) \int_0^T e^{-j2\pi[ux_o(t)+uy_0(t)]} dt$$

Modelo de Borrado (Movimento)

$$G(u,v) = \int_0^T \left[\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f\left[x - x_0(t), y - y_o(t)\right] e^{-j2\pi(ux+uy)} dxdy \right] dt$$

$$G(u,v) = \int_0^T F(u,v) e^{-j2\pi[ux_o(t)+uy_0(t)]} dt$$

$$= F(u,v) \int_0^T e^{-j2\pi[ux_o(t)+uy_0(t)]} dt$$

$$\boxed{H(u,v) = \int_0^T e^{-j2\pi[ux_o(t)+uy_0(t)]} dt}$$

Modelo de Borrado (Movimento)

$$G(u,v) = \int_0^T \left[\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f\left[x - x_0(t), y - y_o(t)\right] e^{-j2\pi(ux+uy)} dxdy \right] dt$$

$$G(u,v) = \int_0^T F(u,v) e^{-j2\pi[ux_o(t)+uy_0(t)]} dt$$

$$= F(u,v) \int_0^T e^{-j2\pi[ux_o(t)+uy_0(t)]} dt$$

$$\boxed{H(u,v) = \int_0^T e^{-j2\pi[ux_o(t)+uy_0(t)]} dt}$$

$$\boxed{G(u,v) = H(u,v)F(u,v)}$$

Exemplo

$$\boxed{H(u,v) = \int_0^T e^{-j2\pi[ux_o(t)+uy_0(t)]}dt}$$

Exemplo

$$\boxed{H(u,v) = \int_0^T e^{-j2\pi[ux_o(t)+uy_0(t)]}dt}$$

- Movimento na direção x: $x_0(t) = \frac{a \cdot t}{T}$

Exemplo

$$\boxed{H(u,v) = \int_0^T e^{-j2\pi[ux_o(t)+uy_0(t)]}dt}$$

- Movimento na direção x: $x_0(t) = \frac{a \cdot t}{T}$

$$\begin{aligned} H(u,v) &= \int_0^T e^{-j2\pi u x_o(t)} dt \\ &= \int_0^T e^{\frac{-j2\pi u \cdot at}{T}} dt \\ &= \frac{T}{\pi u a} \sin(\pi u a) e^{-j\pi u a} \end{aligned}$$

Exemplo

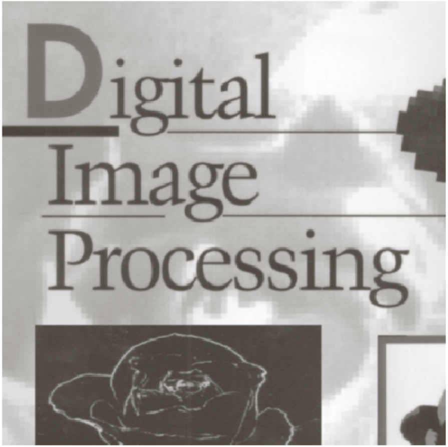
$$\boxed{H(u,v) = \int_0^T e^{-j2\pi[ux_o(t)+uy_0(t)]}dt}$$

- Movimento na direção x: $x_0(t) = \frac{a \cdot t}{T}$

$$\begin{aligned} H(u,v) &= \int_0^T e^{-j2\pi u x_o(t)}dt \\ &= \int_0^T e^{\frac{-j2\pi u \cdot at}{T}}dt \\ &= \frac{T}{\pi ua}\sin(\pi ua)e^{-j\pi ua} \end{aligned}$$

Ou, mais genericamente: (borrado em ambas as direções)

$$\boxed{H(u,v) = \frac{T}{\pi(ua+vb)}\sin(\pi(ua+vb))e^{-j\pi(ua+vb)}}$$



$$H(u, v) = \frac{T}{\pi(ua + vb)} \sin[\pi(ua + vb)]e^{-j\pi(ua+vb)}$$

Borrando a imagem
com a=b=0,1
T=1

Filtragem Inversa

- Se conhecemos a degradação, podemos restaurar a imagem diretamente?

Filtragem Inversa

- Se conhecemos a degradação, podemos restaurar a imagem diretamente?

$$\hat{F}(u,v) = \frac{G(u,v)}{H(u,v)}$$

$$G(u,v) = H(u,v)F(u,v) + N(u,v)$$

$$\hat{F}(u,v) = F(u,v) + \frac{N(u,v)}{H(u,v)}$$

Filtragem Inversa

- Se conhecemos a degradação, podemos restaurar a imagem diretamente?

$$\hat{F}(u,v) = \frac{G(u,v)}{H(u,v)}$$

$$G(u,v) = H(u,v)F(u,v) + N(u,v)$$

$$\hat{F}(u,v) = F(u,v) + \frac{N(u,v)}{H(u,v)}$$

- Mesmo se conhecermos a degradação, não recuperaremos o sinal original completamente ...
- E se $H(u,v)$ tiver valor nulos?

Filtragem Inversa

- Se conhecemos a degradação, podemos restaurar a imagem diretamente?

$$\hat{F}(u,v) = \frac{G(u,v)}{H(u,v)}$$

$$G(u,v) = H(u,v)F(u,v) + N(u,v)$$

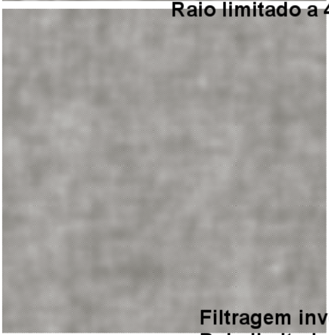
$$\hat{F}(u,v) = F(u,v) + \frac{N(u,v)}{H(u,v)}$$

- Mesmo se conhecermos a degradação, não recuperaremos o sinal original completamente ...
- E se $H(u,v)$ tiver valor nulos?
- Opção: Limitar os valores do filtro em torno de (0,0).

Filtragem inversa

Filtragem inversa
Raio limitado a 40

Filtragem inversa
Raio limitado a 70



Filtragem inversa
Raio limitado a 85

Filtro de Wiener

$$e^2 = E\left[\left(f - \hat{f}\right)^2\right] \quad (6)$$

$$\begin{aligned}
\hat{F}(u,v) &= \left[\frac{H^*(u,v)S_f(u,v)}{S_f(u,v)|H(u,v)|^2 + S_\eta(u,v)}\right]G(u,v) \\
&= \left[\frac{H^*(u,v)}{|H(u,v)|^2 + S_\eta(u,v)/S_f(u,v)}\right]G(u,v) \\
&= \left[\frac{1}{H(u,v)}\frac{|H(u,v)|^2}{|H(u,v)|^2 + S_\eta(u,v)/S_f(u,v)}\right]G(u,v)
\end{aligned}$$

$H(u,v)$ = degradation function
$H^*(u,v)$ = complex conjugate of $H(u,v)$
$|H(u,v)|^2 = H^*(u,v)H(u,v)$
$S_\eta(u,v) = |N(u,v)|^2$ = power spectrum of the noise [see Eq. (4.2-20)]
$S_f(u,v) = |F(u,v)|^2$ = power spectrum of the undegraded image.

Filtro de Wiener

$$\hat{F}(u,v) = \left[\frac{1}{H(u,v)} \frac{|H(u,v)|^2}{|H(u,v)|^2 + K}\right] G(u,v)$$

a b c

FIGURE 5.28 Comparison of inverse and Wiener filtering. (a) Result of full inverse filtering of Fig. 5.25(b). (b) Radially limited inverse filter result. (c) Wiener filter result.

corrompida | Filtragem inversa | Wiener

Borrado de movimento
+ ruído Gaussiano
Média = 0, var = 650

var é diminuída de 1
ordem de magnitude

var é diminuída de 5
ordens de magnitude