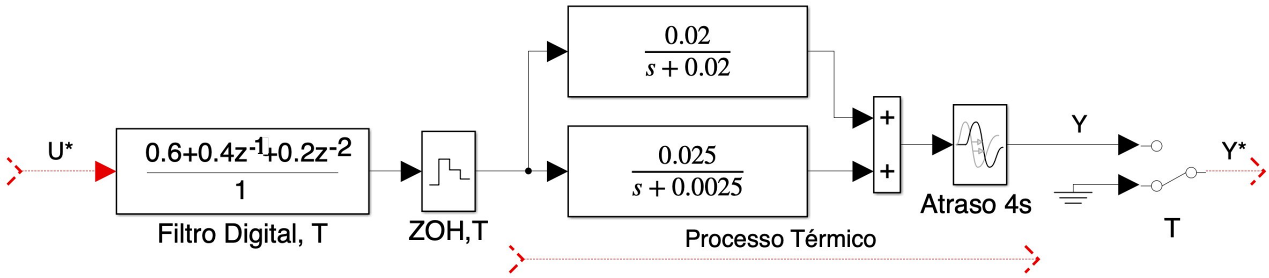
rP1CDig126 -Resolução 1ª Prova – ENE0167 CONTROLE DIGITAL – 2026.1

1ª Questão: (2,0) Considere o seguinte sistema, condições iniciais nulas e T = 4 *seg*:



a) (1,0) Obtenha a função de transferência discreta correspondente à $G(z)=Y(z)/U(z)$.
b) (0,5) Para $u(k)$ = 10(*k*), degrau de entrada, qual o valor final de $y(k)$?
c) (0,5) Quais os valores de $y(k)$, para k = 0,1?

---

a) $G_{ZOH}(z)=(1-z^{-1})Z\left\{\dfrac{G(s)}{s}\right\}$

$$\frac{G_1(s)}{s}=\frac{0{,}02}{s(s+0{,}02)}=\frac{A}{s}+\frac{B}{s+0{,}02}=\frac{As+0{,}02\,A+Bs}{s(s+0{,}02)}=\frac{1}{s}+\frac{-1}{(s+0{,}02)} \qquad Z\left\{\frac{G_1(s)}{s}\right\}=\frac{z}{z-1}-\frac{z}{z-0{,}923116}$$

$$(1-z^{-1})Z\left\{\frac{G_1(s)}{s}\right\}=\frac{z-1}{z}\left\{\frac{z}{z-1}-\frac{z}{z-0{,}923116}\right\}=1-\frac{z-1}{z-0{,}923116}\longrightarrow G_1(z)=\frac{0{,}0768836}{z-0{,}923116}$$

$$G_2(z)=\frac{0{,}0995016}{z-0{,}9900498}$$

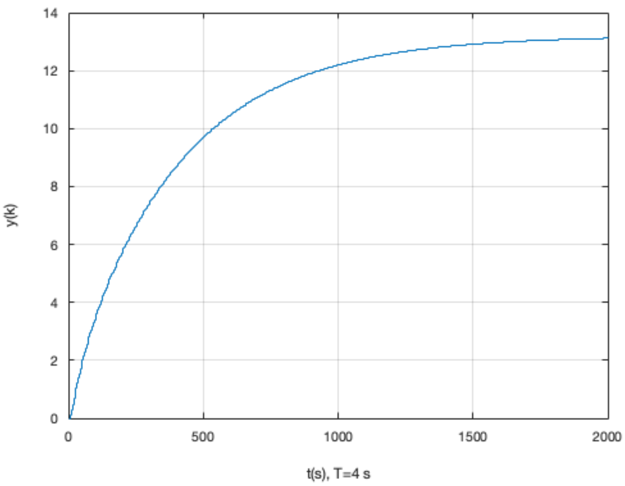
$$(0.6+0.4\,z^{-1}+0.2\,z^{-2})\{G_1(z)+G_2(z)\}z^{-1}=\frac{(0.6\,z^2+0.4\,z+0.2)}{z^3}\,\frac{0{,}176385\,z-0{,}16797026}{z^2-1{,}913166\,z+0.913931185}$$

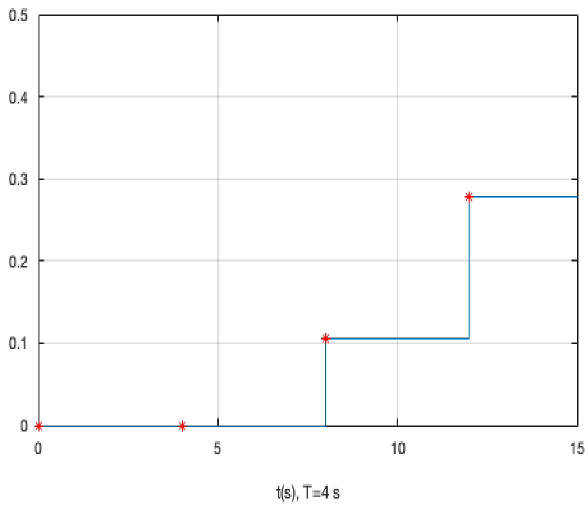
b) Valor final:

$$\lim_{k\to\infty} y(k)=\lim_{z\to 1}(z-1)G(z)\frac{z}{z-1}=1.2*(0.176385-0.16797026)/(1\,1.913166+0.913931185)=13.2$$

$$10\,u(k)\to y(k\to\infty)=132$$

c) Um sistema de 1a ordem não tem canal direto. Mais um atraso→ y(0)=0, y(1)=0.





2ª Questão (2,0) Considere o seguinte sistema discreto $G(z)=\dfrac{Y(z)}{U(z)}=\dfrac{(z+2)(z^2-1.3z+0.7)}{(z^2-z+0.74)(z^2+1.4z+0.98)}$

a) (0,5) Este sistema é estável? Justifique.

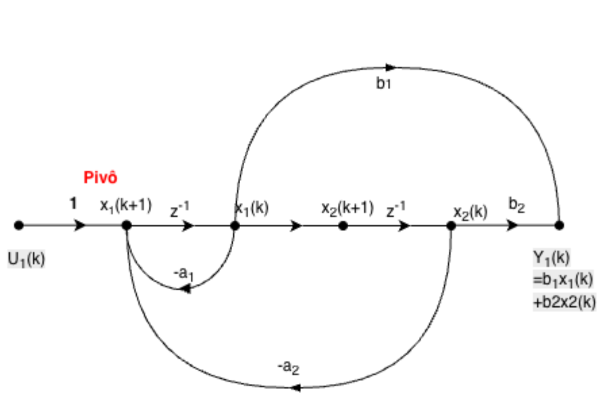
Com uma realização em cascata de subsistemas de 2ª ordem na forma canônica controlável:
b) (1,0) Apresente o fluxografo correspondente. Variáveis de estado $x_1[k], x_2[k], x_3[k], x_4[k]$
c) (0,5)Apresente as matrizes no espaço-de-estado, $\begin{array}{c} x[k+1]=Ax[k]+Bu[k] \\ y[k]=Cx[k]+Du[k] \end{array}$.

---
a) roots([1 -1 .74]) = 0.5 +/- 0.7j; sqrt(.5^2 +.7^2)= 0.86;
roots([1 1.4 .98]) = -0.7+/- 0.7j; sqrt ((-.7)^2 +.7^2)=0.98994
Polos dentro do círculo unitário → Sistema Estável.

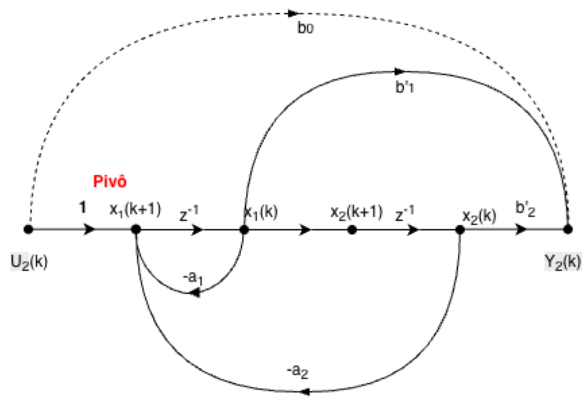
b) $G_1(z)=\dfrac{z+2}{z^2-z+0.74}=\dfrac{z^{-1}+2z^{-2}}{1-z^{-1}+0.74z^{-2}}$

$$G_2(z)=\frac{z^2-1.3z+0.7}{z^2+1.4z+0.98}=\frac{1-1.3z^{-1}+0.7z^{-2}}{1+1.4z^{-1}+0.98z^{-2}}=\frac{1+1.4z^{-1}+0.98z^{-2}-2.7z^{-1}-0.28}{1+1.4z^{-1}+0.98z^{-2}}=1+\frac{-2.7z^{-1}-0.28}{1+1.4z^{-1}+0.98z^{-2}}$$

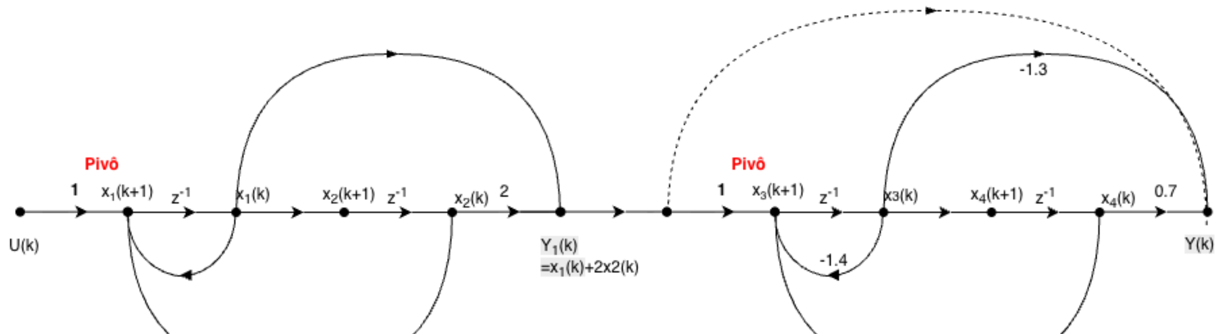
$$\frac{Y_1(k)}{U_1(k)}=\frac{b_1z^{-1}+b_2z^{-2}}{1+a_1z^{-1}+a_2z^{-2}}$$



$$\frac{Y_2(k)}{U_2(k)}=\frac{b_0+b_1z^{-1}+b_2z^{-2}}{1+a_1z^{-1}+a_2z^{-2}} \qquad \frac{Y_2(k)}{U_2(k)}=b_0+\frac{b'_1z^{-1}+b'_2z^{-2}}{1+a_1z^{-1}+a_2z^{-2}}$$



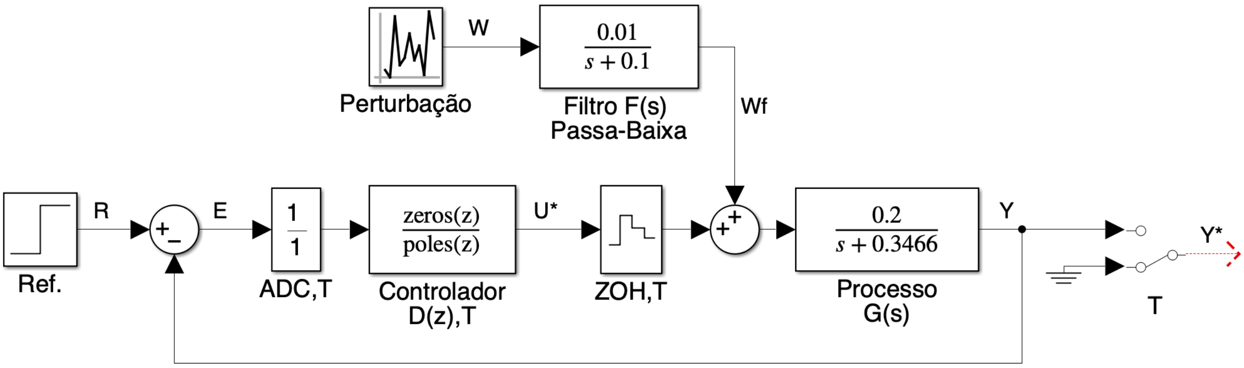
$$\frac{Y_1(k)}{U_1(k)}=\frac{z^{-1}+2z^{-2}}{1-z^{-1}+0.74z^{-2}} \qquad \frac{Y_2(k)}{U_2(k)}=\frac{1-1.3z^{-1}+0.7z^{-2}}{1+1.4z^{-1}+0.98z^{-2}} \qquad \frac{Y_2(k)}{U_2(k)}=1+\frac{-2.7z^{-1}-0.28z^{-2}}{1+1.4z^{-1}+0.98z^{-2}}$$



x1(k+1) = x1(k)-0,74x2(k) +u(k)
x2(k+1) = x1(k)
x3(k+1) = x1(k) +2x2(k) -1,4x3(k)-098,4x4(k)
x4(k+1) = x3(k)
y(k) = x1(k) +2x2(k) -1,3x3(k)+0,7x4(k)

c) $A=\begin{bmatrix}1 & -0.74 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 2 & -1.4 & -0.98\\ 0 & 0 & 1 & 0\end{bmatrix}$ $B=\begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\end{bmatrix}$ $C=\begin{bmatrix}1 & 2 & -1.3 & 0.7\end{bmatrix}$ $D=[\,]$

Questão 3 (2,5) Considere o sistema a seguir, com T = 2 *seg*:



onde $R(s)$ é o sinal de referência, $W(s)$ é uma perturbação, $G(s)$ é função de transferência do processo, $F(s)$ é um filtro contínuo e $D(z)$ é o controlador. Utilizando a superposição apresente:

a) (1,0) A relação entre Y^* e R^*.
b) (1,5) A relação entre Y^* e W e entre Y^* e W_f.

---

a) Relação entre Y^* e R^*:

$E = R - Y \quad U^* = E D^*; \; Y = U^* G$

*E=R-U*G*
E=R*-U*G**
E=R*-E*D*G**

E(1+D*G*)=R**

$$E^* = \frac{R^*}{1 + G^* D^*}$$

$$\frac{Y^*}{R^*} = \frac{D^* G^*}{1 + G^* D^*}$$ → Função de Transferência Discreta:

b) Relação entre Y^* e W:

$Y = G F W + G U^* \quad E = R - Y \quad U^* = D^* E$

$E^* = R^* - Y^* \quad U^* = D^* E^* \;\longrightarrow\; (R = 0)\, U^* = -D^* Y^*$

$Y^* = (G F W)^* + G^* U^* \longrightarrow Y^* = (G F W)^* - G^* D^* Y^*$ → Não existe função de transferência entre W e Y*.

Em geral não é possível obter uma função de transferência,
mas neste caso com T=2 s →Nyquist pi/T = 1.57 rad/s.
A frequencia de corte do filtro passa baixas é de 0,1 rad/s, então não haverá aliasing.
E o sinal Wf pode ser reconstruído de suas amostras.

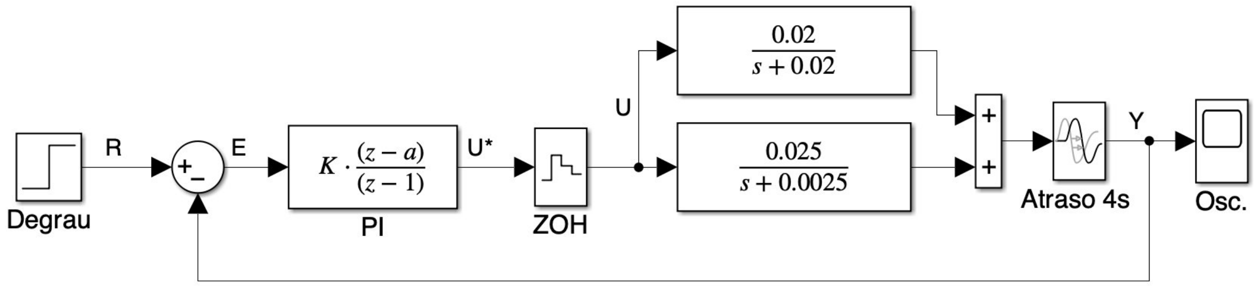
Assim temos: $(G F W)^* = (G W_f^*)^* = G^* W_f^*$

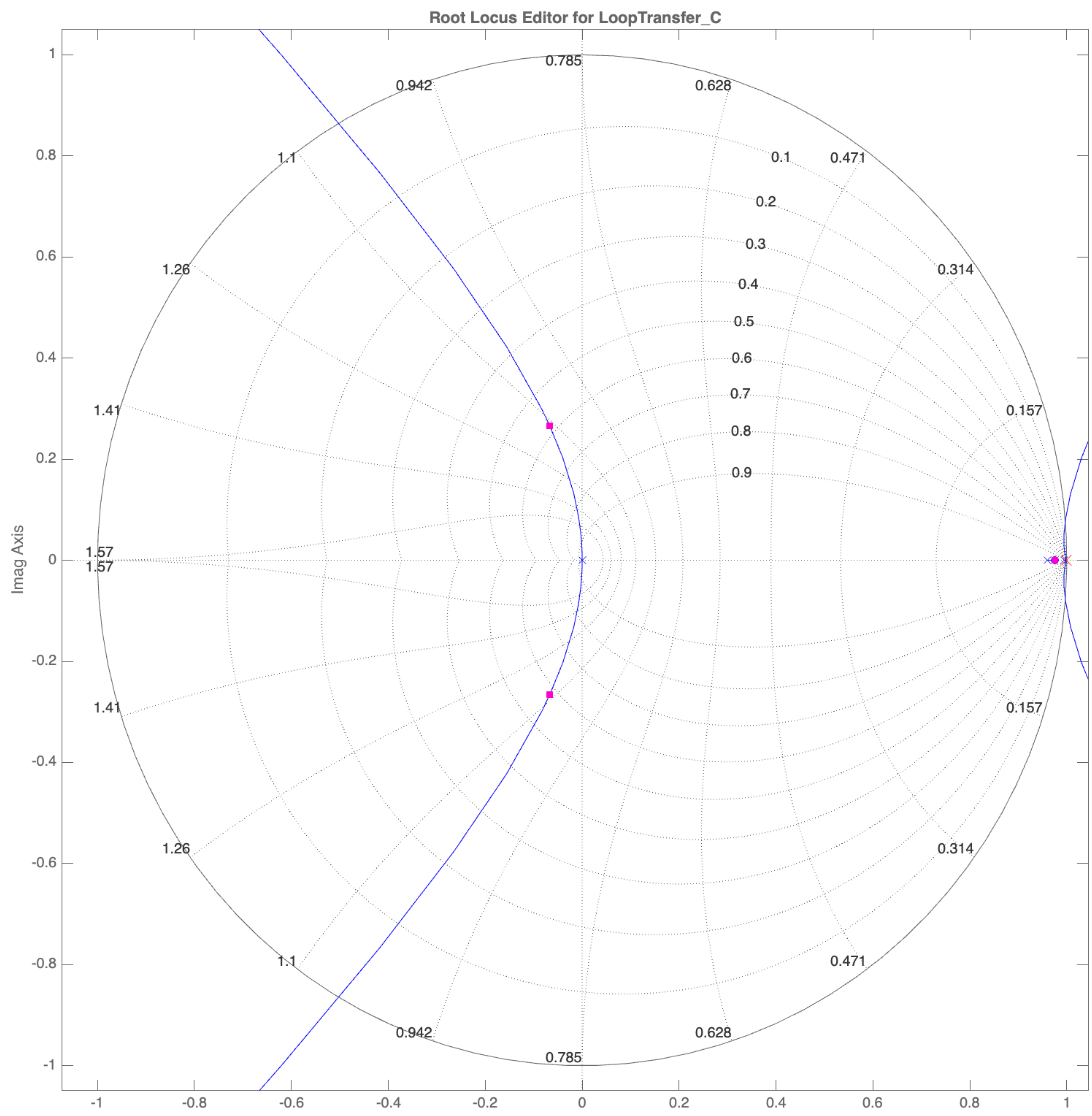
$Y^* = G^* W_f^* - G^* D^* Y^* \qquad Y^* + G^* D^* Y^* = G^* W_f^* \qquad \rightarrow \frac{Y^*}{W_f^*} = \frac{G^*}{1 + D^* G^*}$

4ª Questão: (3,0) O controlador PI, $D(z)=\dfrac{K(z-a)}{z-1}$, é simples e eficaz. O canal integral garante erro nulo em regime permanente. O ganho, *K,* e o zero, *a*, do PI posicionam os polos dominantes.

Considere o seguinte sistema de controle digital, com taxa de amostragem $T = 2$ *seg*.
Os pólos dominantes em malha fechada devem apresentar $\zeta = 0{,}7$ e $\omega_n = 0{,}157 \ \ rad/seg$.

a) (1,0) Qual o avanço de fase, ϕ_{av}, para que z_0 (polo dominante desejado) esteja no LGR?
($\phi_{av} = 180^o - \measuredangle\{G(z)/(z-1)|_{z_0}\}$, já considerando canal integral).
b) (1,0) Calcule a posição do zero, *a,* para que a condição de fase do LGR seja atendida.
c) (0,5) Calcule a ganho, *K,* para que a condição de módulo do LGR seja atendida.
d) (0,5) Quais os valores esperados para o sobrepasso percentual, M_p, e o tempo de pico, t_p?

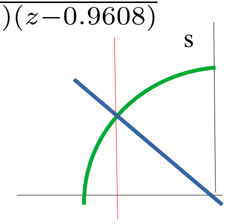




LGR parcial (inclui polo em z=1, do PI, mas ainda sem o zero, $(z-a)$).

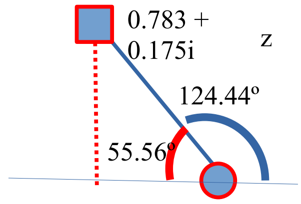
$$- - - \text{ a) g1d} = \frac{0.03921}{z-0.9608}; \quad g2d = \frac{0.04988}{z-0.995}; \quad g1d + g2d = \frac{0.08909(z-0.9759)}{(z-0.995)(z-0.9608)}$$

$$gi = \frac{1}{z^2(z-1} \quad gf = (g1d + g2d) * gi = \frac{0.08909(z-0.9759)}{z^2(z-1)(z-0.995)(z-0.9608)}$$



$$\sigma = \zeta\omega_n = 0.7 \times 0.157 = 0.1099; \quad acos(.7) = 45.573^o;$$
$$w_d = 0.1099 * tand(45.573) = 0.1121;$$
$$z_0 = e^{-sT}; \quad \Rightarrow z_0 = 0.78258 + 0.17849i$$

$$180^o - arg(\frac{0.08909(z-0.9759)}{z^2(z-1)(z-0.995)(z-0.9608)}_{z=0.783+0.175i}) = 123.945^o$$



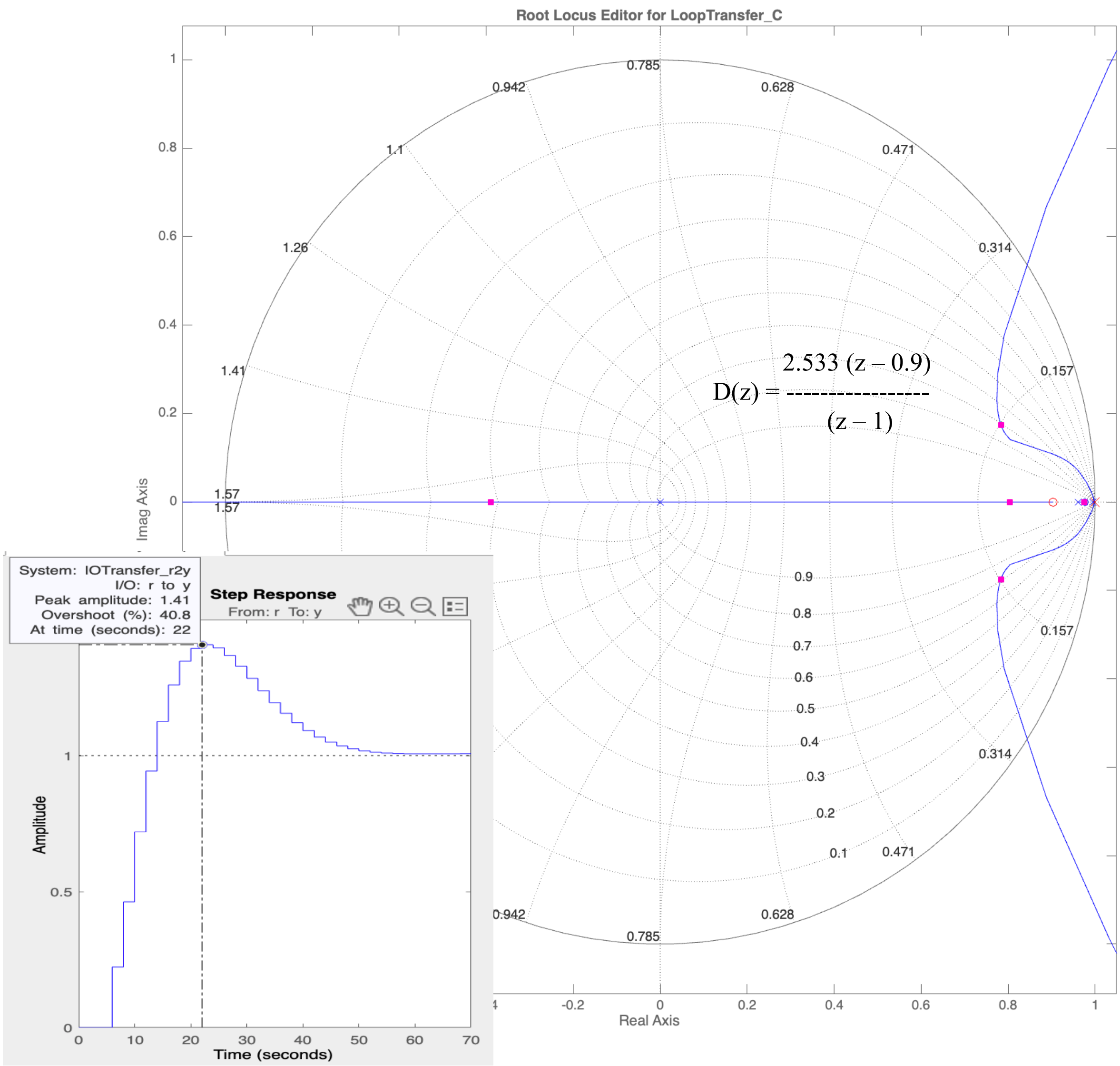
b) $tan56.054^o = \dfrac{0.175}{\delta}; \quad \delta = 0.1178 \Rightarrow a = 0.783 + 0.12 = 0.9$

c)z=0.7825+0.1785i; K=1/abs(0.08908*(z-0.9759)*(z-0.90)/(z^2*(z-1)*(z-0.995)*(z-0.9608)))=2.533

d) Utilizando as expressões derivadas para um sistemas de 2ª ordem sem zeros: t δ

$$\omega_d = \omega_0\sqrt{1-\zeta^2}; \quad t_p = \frac{\pi}{\omega_d} = 25.14; M_p = 100\frac{e^{-\pi\zeta}}{\sqrt{1-\zeta^2}} = 4.6\%$$

No entanto, o sistema não é de 2ª ordem sem zeros. Espera-se um sobrepasso bem maior! (40.8%!)



Fórmulas úteis:

Resposta de sistema de 2ª ordem sem zeros t ⇔ s

$$\frac{Y(s)}{R(s)}=\frac{K\omega_n^2}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}$$

$$R(s)=\frac{1}{s}\ \rightarrow\ \frac{y(t)}{K}=1-\frac{e^{-\sigma t}}{\sqrt{1-\zeta^2}}\cos(\omega_d t-\phi)$$

$$\omega_d=\omega_n\sqrt{(1-\zeta^2)}$$

$$e^{-4,6}=0,01\rightarrow t_{s,1\%}=\frac{4,6}{\sigma}$$

$$t_{r(10\%\rightarrow 90\%)}\approx\frac{1,8}{\omega_n}\qquad t_p=\frac{\pi}{\omega_d}$$

$$M_p=100\frac{e^{-\pi\zeta}}{\sqrt{1-\zeta^2}}$$

Regra de Mason: $\dfrac{\sum P_k\Delta_k}{\Delta}$

$$\Delta=1-\sum L_i+\sum L_iL_j-\sum L_iL_jL_k\ldots$$

P_k *– caminho direto k ligado entra e saída*

$\Delta_k-\Delta$ *tirando os laços que tocam o caminho direto k*

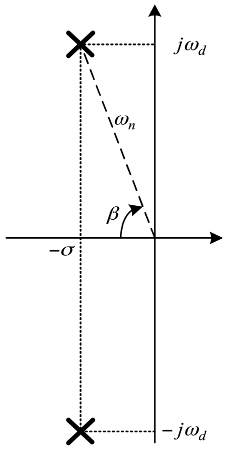
L_iL_j *– laços disjuntos 2 a 2*

$$G(z)=\frac{KD(z)G(z)}{1+KD(z)G(z)H(z)}$$

LGR:

$\left|(KD(z)G(z)H(z))\right|_{z_0}=1$ *Condição de Módulo*

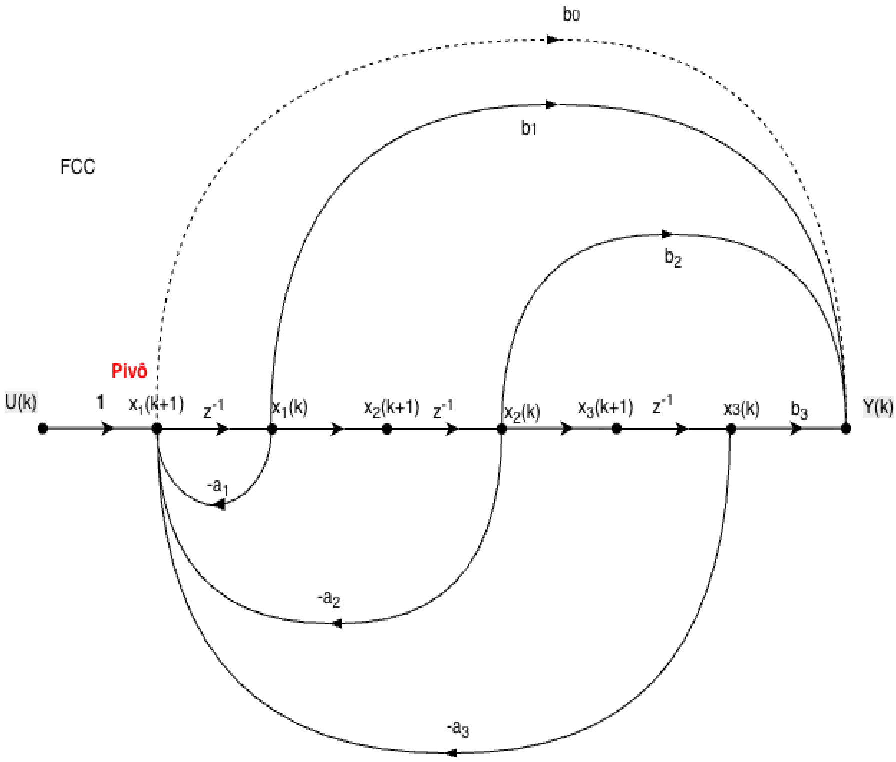
$\underline{/\,KD(z)G(z)H(z)}_{z_0}=(2k+1)180^o$ *Condição de Fase*



$$G_{ZOH}(z)=(1-z^{-1})Z\left\{\frac{G(s)}{s}\right\}$$

Tabela de Transformadas -***Z***

$\frac{1}{s}$	$1(kT)$	$\frac{z}{z-1}$
$\frac{1}{s^2}$	kT	$\frac{Tz}{(z-1)^2}$
$\frac{1}{s+a}$	e^{-akT}	$\frac{z}{z-e^{-aT}}$
$\frac{1}{(s+a)^2}$	kTe^{-akT}	$\frac{Tze^{-aT}}{(z-e^{-aT})^2}$



%3C