



rP1CDig226 – Resolução 1ª Prova – ENE0167 CONTROLE DIGITAL – 2026.2

Matrícula: _____ Nome: _____

1ª Questão: (3,5) O controle digital do seguinte processo de nível de líquidos não-linear de 2ª ordem, com vazão de entrada $Q_i = U$, variável controlada $Y = H_1$, em regime de vazão turbulento (vazão de saída, $Q_o = K\sqrt{Y}$), tem o seguinte modelo discreto de pequenos sinais linearizado em torno de um certo Ponto de Operação, PO, taxa de amostragem $T_s = 0,5$ s.

$$\frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{0,5(z - 0,98)}{(z - 0,97)(z - 0,84)}$$

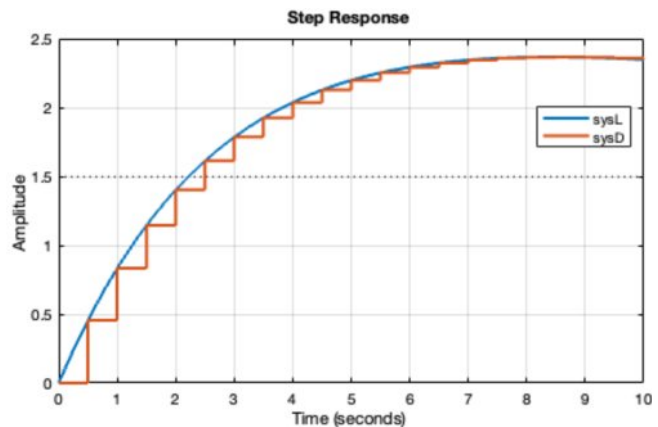
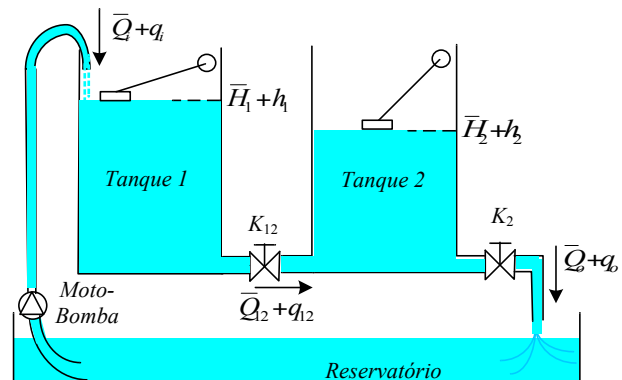
a) (1,0) Com o sistema, em regime, no PO, calcule $y(k)$ a um degrau unitário, para $k = 0$ a 5. Via TVI.

b) (0,5) Que efeito, qualitativo, tem o zero da função de transferência, na resposta em malha aberta, sobre t_r e M_p em comparação a um sistema com mesmos polos mas sem este zero?

c) (0,5) Qual o valor o valor final, $y(k \rightarrow \infty)$, da resposta deste sistema, a um degrau unitário de referência, em malha fechada com realimentação unitária? Que hipótese foi assumida?

d) (0,5) O TFFV sempre permite calcular o valor final da resposta ao degrau? Por quê?

e) (1,0) Mostre o fluxograma do sistema discreto, FCC, realimentação proporcional e referência.



Obs1: Todos os itens desta questão podem ser respondidos de forma independente.

Obs2: TVI – Teorema do Valor Inicial, TVF – Teorema do Valor Final. Ver formulário.

a) $y(-2) = y(-1) = 0 \rightarrow y(0 : 5) = [0 \ 0.5 \ 0.915 \ 1.2588 \ 1.5429 \ 1.777]$

b) Um zero na função de transferência reduz t_r e aumenta M_p .

c) $\text{TVF}_{\text{MA}} \rightarrow y(k \rightarrow \infty) = \lim_{z \rightarrow 1} (z - 1) \frac{z}{z - 1} \frac{0.5z - 0.49}{z^2 - 1.81z + 0.8148} = \frac{0.5 - 0.49}{1 - 1.81 + 0.8148} = 2.0833$

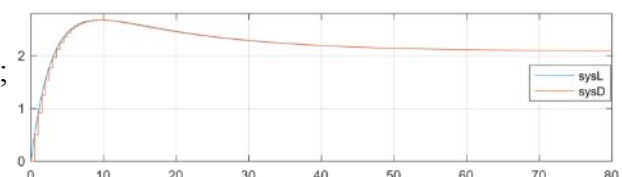
Em Malha Fechada $gd(1)/(1+gd(1)) = 0.6757$; Hipótese ao se aplicar o TVF: estabilidade.

d) TFFV não se aplica a sistema instável.

$gd = \text{zpk}(.98, [.97 \ .84], .5, .5), g = \text{d2c}(gd), [y, t] = \text{step}(g);$

$[y_d, k] = \text{step}(gd),$

$\text{plot}(t, y), \text{hold on}, \text{stairs}(k, y_d)$



a) Via equação de recorrência:
$$\frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{0,5z^{-1} - 0,49z^{-2}}{1 - 1,81z^{-1} + 0,8148z^{-2}}$$

$$(1 - 1,81z^{-1} + 0,8148z^{-2})Y(z) = (0,5z^{-1} - 0,49z^{-2})U(z)$$

$$y(k) = 1,81y(k-1) - 0,8148y(k-2) + 0,5u(k-1) - 0,49u(k-2)$$

$$y(0) = 0$$

$$y(1) = 1,81 \times 0 - 0,8148 \times 0 + 0,5 \times 1 - 0,49 \times 0 = 0,5$$

$$y(2) = 1,81 \times 0,5 - 0,8148 \times 0 + 0,5 - 0,49 = 0,915$$

$$y(3) = 1,81 \times 0,915 - 0,8148 \times 0,5 + 0,5 - 0,49 = 1,2588$$

$$y(4) = 1,81 \times 1,2588 - 0,8148 \times 0,915 + 0,5 - 0,49 = 1,5429$$

$$y(5) = 1,81 \times 1,5429 - 0,8148 \times 1,2588 + 0,5 - 0,49 = 1,777$$

via TVI: (muito mais difícil!)

$$Y(z) = \frac{z}{z-1} \frac{0,5z - 0,49}{z^2 - 1,81z + 0,8148}$$

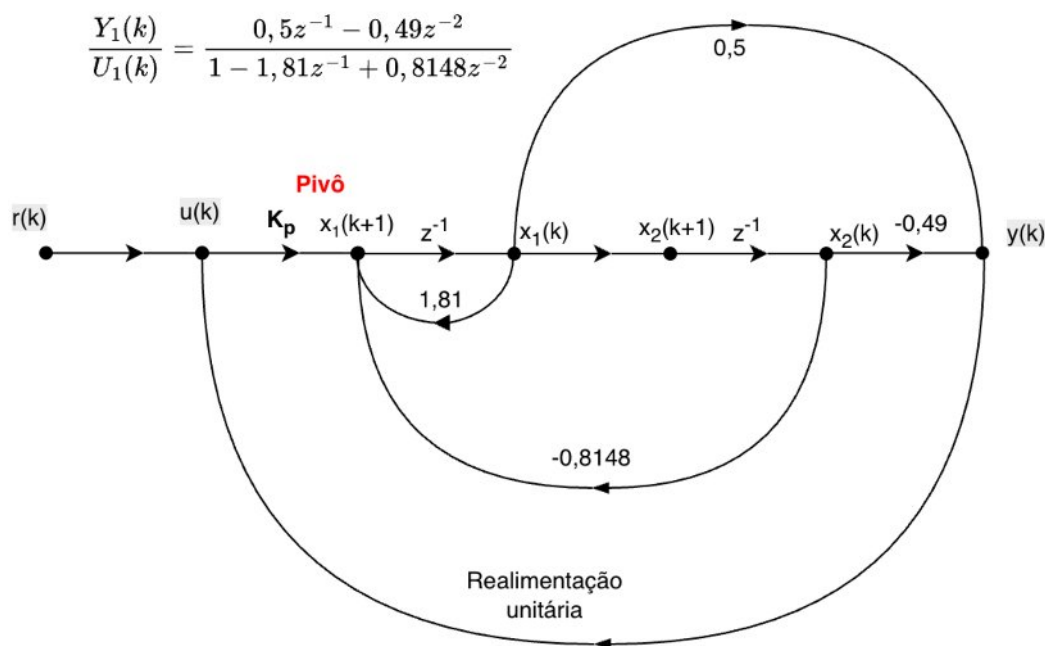
$$y(0) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{z}{z-1} \frac{0,5z - 0,49}{z^2 - 1,81z + 0,8148} = 0$$

$$y(1) = \lim_{k \rightarrow \infty} z \left(\frac{z}{z-1} \frac{0,5z - 0,49}{z^2 - 1,81z + 0,8148} - x(0) \right) = 0$$

$$y(1) = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{z^2}{z-1} \frac{0,5z - 0,49}{z^2 - 1,81z + 0,8148} \right) = 0,5$$

$$y(2) = \lim_{k \rightarrow \infty} z^2 \left(\frac{z}{z-1} \frac{0,5z - 0,49}{z^2 - 1,81z + 0,8148} - x(0) - x(1)z^{-1} \right)$$

e)



Questão 2 (2,5) Para o sistema $G(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)}$, com $T = 1s$.

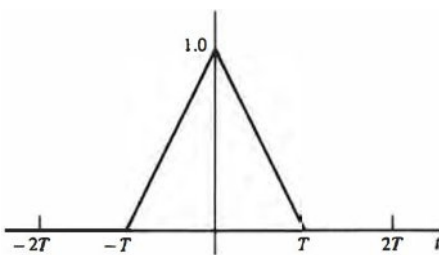
a) (1,0) Obtenha o modelo First Order Hold, $G_{FOH}(z)$

b) (0,5) Calcule a resposta $y[k]$, $k=0:1:5$, a um degrau unitário.

c) (0,5) Mostre (*) os pontos calculados no gráfico. Considere também o sinal produzido um ZOH, para interpolar entre as amostras.

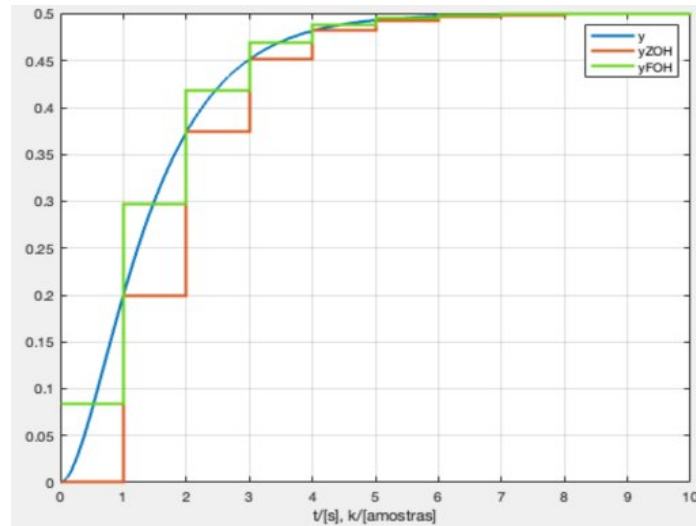
d) (0,5) Considerando o caráter antecipativo de $G_{FOH}(z)$, esboce agora, $y(t) = L^{-1} \left\{ \frac{1}{s} G(s) \right\}$

$$G_{FOH}(z) = \frac{(z-1)^2}{Tz} \mathbb{Z} \left\{ \frac{G(s)}{s^2} \right\}$$



$$\frac{e^{Ts} - 2 + e^{-Ts}}{Ts^2}$$

--



a) $g=tf(1,[1 \ 3 \ 2])$, $gf=c2d(g,1,'FOH')$, $[y,k]=step(gf)$; $y(1:6)'$

$$G_{FOH}(z) = \frac{(z-1)^2}{Tz} \mathbb{Z} \left\{ \frac{G(s)}{s^2} \right\}$$

$$\frac{1}{s^2(s+1)(s+2)} = \frac{0.5}{s^2} - \frac{0.75}{s} + \frac{1}{s+1} - \frac{0.25}{s+2}$$

$$G_{FOH}(z) = \frac{(z-1)^2}{Tz} \left\{ \frac{0.5z}{(z-1)^2} - \frac{0.65z}{z-1} + \frac{z}{z-e^{-1}} - \frac{0.25z}{z-e^{-2}} \right\}$$

$$G_{FOH}(z) = \frac{0,5z}{(z-1)^2} - \frac{0,75z}{(z-1)} + \frac{z}{z-e^{-1}} - \frac{0,25z}{z-e^{-2}}$$

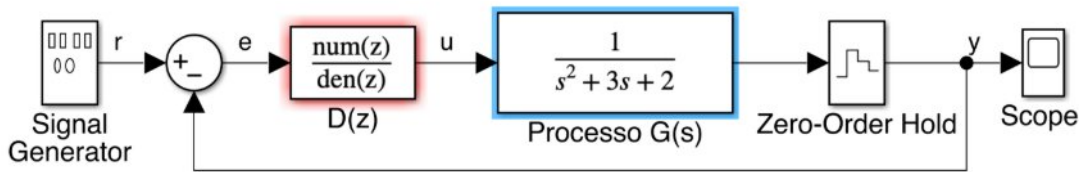
b) Eq. Recorrência:

$$y(k) = 0.5032y(k-1) - 0.04979y(k-2) + 0.08405u(k) + 0.1704u(k-1) + 0.01887u(k-2)$$

$$y_{FOH} = [0.084 \quad 0.297 \quad 0.418 \quad 0.469 \quad 0.488 \quad 0.496]$$

c) $g_{ZOH}=c2d(g,1) = \frac{0.1998z + 0.0735}{z^2 - 0.5032z + 0.0498}$ $[y,k]=step(gd)$; $y_{ZOH}=[0 \ 0.2 \ 0.374 \ 0.45 \ 0.482 \ 0.493]$

3ª Questão (4,0) Projete $D(z)$ para que o seguinte sistema atenda às especificações abaixo. Devido à saturação do atuador, sempre presente em sistemas reais, considere polos dominantes, s_0 , na interseção de restrições mais próximos à origem. Amostragem $T_s = 0.1$ s.



$$G(z) = \frac{0.004528(z + 0.9048)}{(z - 0.9048)(z - 0.8187)}$$

Especificações (ver também no LGR abaixo):

- i) Fator de amortecimento, $\zeta \geq 0,7$
- ii) Tempo de acomodação, $t_{s[2\%]} \leq 1$ s
- iii) Tempo subida, $t_{r[10\% - 90\%]} \leq 0.2 * \pi$
- iv) Erro à rampa unitária de referência, $e_{ss} \leq 0.1$.

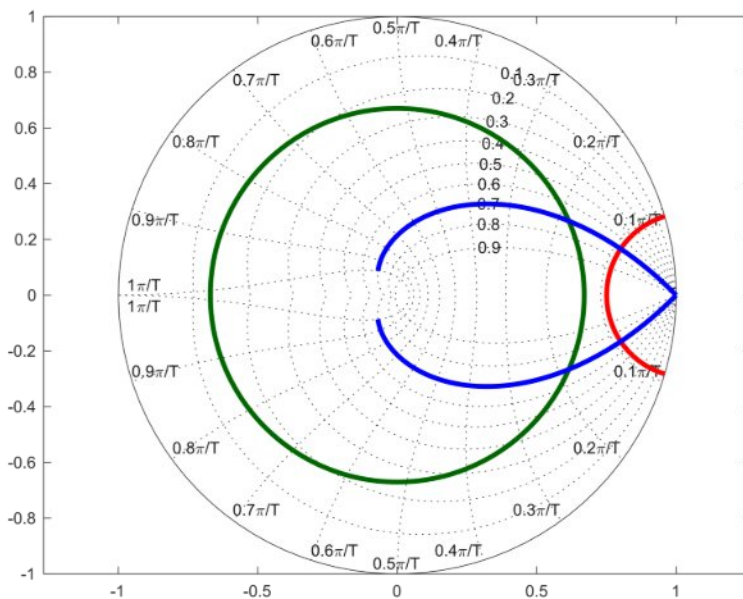
a) (1,5) Observe o mapeamento das especificações transitórias no plano z . Escolha a posição dos polos dominantes, z_0 , que atenda a todas as especificações transitórias. Calcule a fase ϕ_{av} , necessária para que o LGR passe por z_0 . (inclua nos cálculos, se for o caso, $1/(z-1)$, do controlador com canal integral).

b) (0,5) Justifique a escolha de um controlador entre P, PD, avanço, avanço-atraso, PI ou PID.

c) (2,0) Projete $D(z)$, polos, zeros e ganho, para atender à todas as especificações de projeto.

Obs:

- Caso projete um PID, utilize um zero para cancelar o segundo polo mais lento do processo.



--- Considerando, inicialmente, um PID “ideal”

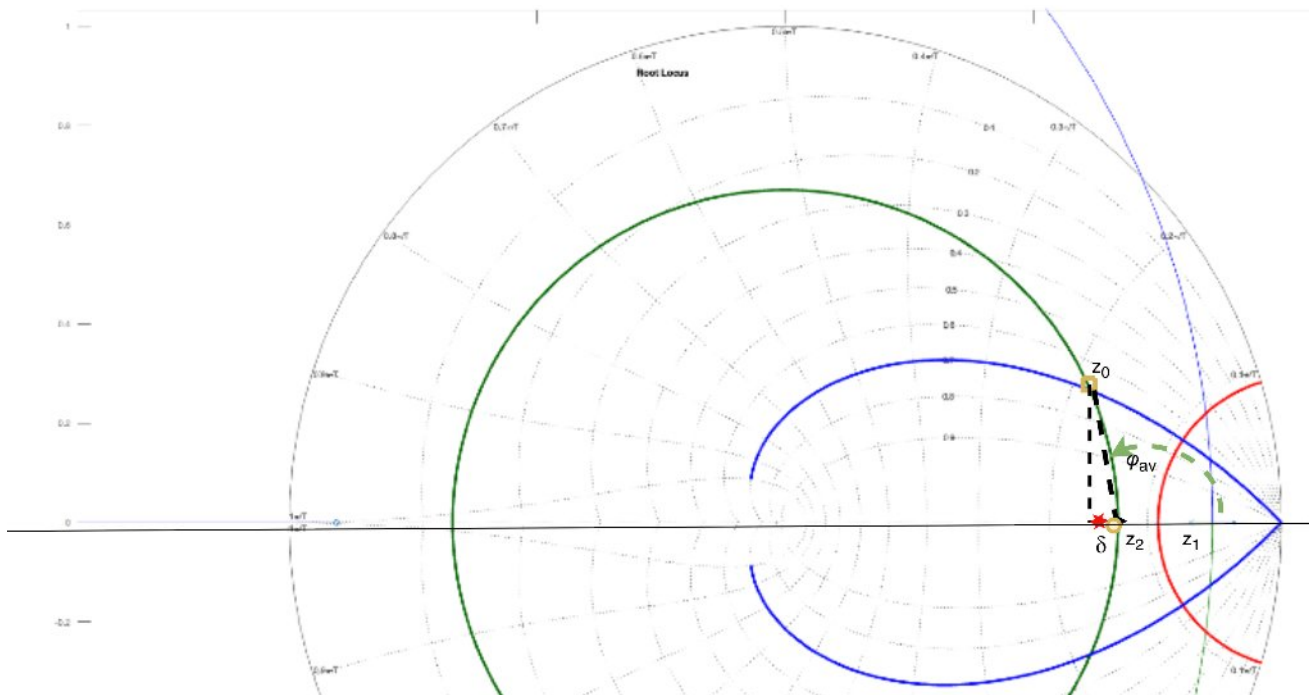
$$\begin{aligned} \text{a) } t_s = \frac{4}{\sigma} \rightarrow \omega_n = 4/\zeta = 5,714 \text{ rad/s}; \quad r^{-\sigma T_s} \leq e^{-0.4} = 0,6703 \\ \zeta \omega_n = 4 \rightarrow \omega_n = 4/0.7 = 5.7143 \text{ rad/s} \quad \omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} = 4.0808 \end{aligned}$$

$$s_0 = -4 + j4.0808 \Rightarrow z_0 = e^{0.4 + j0.40808} \quad z_0 = 0.6153 \pm 0.266j; \quad \phi_{av} = 180 - \text{angle}()$$

Já considerando o cancelamento do 2º polo em -0.8187 pelo zero z_1 do PID:

$$z = 0.6153 + 0.266j; 180 - \text{angle}(0.004528 * (z + 0.9048) / ((z - 1) * (z - 0.9048))) * 180 / \pi \Rightarrow$$

$$\phi_{av} = 92.957^\circ \quad \beta = 87,165$$



b) Ângulo de avanço é muito grande. Precisa de 2 zeros => PID

c) Um zero em $z_1 = 0,8187$ cancela o 2º polo mais lento do processo.

$$\tan(\beta) = 0,266/\delta; \quad \delta = 0.0132 \Rightarrow z_2 = 0,6153 + 0.0132 = 0,6285$$

$$z = 0.6153 + 0.266j; \text{abs}(((z - 1)(z - 0.9048)) / (0.004528(z + 0.9048) * (z + 0.6285))) \Rightarrow K = 20.6891$$

$$D(z) = \frac{20.69(z - 0.8187)(z - 0.6285)}{(z - 1)}$$

=====
Considerando um PID realizável

$$\text{a) } z = 0.6153 + 0.266j; 180 - \text{angle}(0.00453 * (z + 0.9048) / (z * (z - 1) * (z - 0.9048))) * 180 / \pi; \quad \phi_{av} = 116.214^\circ$$

$$\text{c) } \delta = 0,266/(\beta) = 0,131 \Rightarrow z_2 = 0,6153 + 0,131 = 0,7463$$

$$z = 0.6153 + 0.266j; \text{abs}((z * (z - 1)(z - 0.9048)) / (0.004528(z + 0.9048) * (z - 0.7463))) \Rightarrow K = 59.4921$$

$$D(z) = \frac{12.715(z - 0.8187)(z - 0.7463)}{z(z - 1)}$$

Fórmulas úteis:

Sistema de 2ª ordem sem zeros ($t \Leftrightarrow s$)

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{K\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

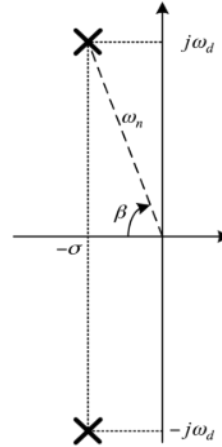
$$R(s) = \frac{1}{s} \rightarrow \frac{y(t)}{K} = 1 - \frac{e^{-\sigma t}}{\sqrt{1-\zeta^2}} \cos(\omega_d t - \phi)$$

$$\beta = \arccos(\zeta) \quad \sigma = \zeta \omega_n \quad \omega_d = \omega_n \sqrt{1-\zeta^2}$$

$$e^{-4,6} = 0,01 \rightarrow t_{s,1\%} = \frac{4,6}{\sigma}$$

$$t_{r(10\% \rightarrow 90\%)} \approx \frac{1,8}{\omega_n} \quad t_p = \frac{\pi}{\omega_d}$$

$$M_p = 100 e^{\frac{-\pi \zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}}$$



$$\text{Regra de Mason: } \frac{\sum P_k \Delta_k}{\Delta}$$

$$\Delta = 1 - \sum L_i + \sum L_i L_j - \sum L_i L_j L_k \dots$$

 P_k – caminho direto k ligado entra e saída Δ_k – Δ tirando os laços que tocam o caminho direto k $L_i L_j$ – laços disjuntos 2 a 2

$$\text{LGR: } G(z) = \frac{KD(z)G(z)}{1 + KD(z)G(z)H(z)}$$

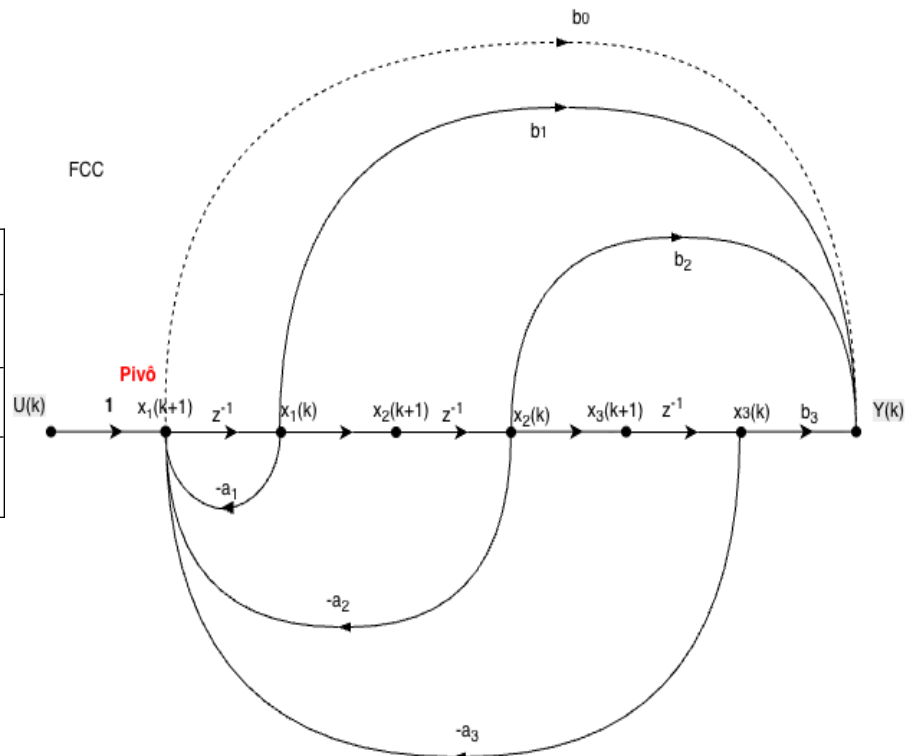
$$\left| \left(KD(z)G(z)H(z) \right) \right|_{z_0} = 1 \quad \text{Condição de Módulo}$$

$$\angle \left(KD(z)G(z)H(z) \right)_{z_0} = (2k+1)180^\circ \quad \text{Condição de Fase}$$

$$G_{\text{ZOH}}(z) = (1 - z^{-1}) Z \left\{ \frac{G(s)}{s} \right\}$$

Tabela de Transformadas -Z

$\frac{1}{s}$	$1(kT)$	$\frac{z}{z-1}$
$\frac{1}{s^2}$	kT	$\frac{Tz}{(z-1)^2}$
$\frac{1}{s+a}$	e^{-akT}	$\frac{z}{z-e^{-aT}}$
$\frac{1}{(s+a)^2}$	kTe^{-akT}	$\frac{Tze^{-aT}}{(z-e^{-aT})^2}$



$$X(z) = \sum x[k]z^{-k} = x[0] + x[1]z^{-1} + x[2]z^{-2} + \dots$$

$$\text{TVF: } \lim_{k \rightarrow \infty} x(k) = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{(z-1)}{z} X(z)$$

$$\text{TVI: } x(0) = \lim_{z \rightarrow \infty} X(z) \quad x[1] = \lim_{z \rightarrow \infty} z(X(z) - x[0]) \quad x[2] = \lim_{z \rightarrow \infty} z^2(X(z) - x[0] - x[1]z^{-1}); \dots$$