



Nome: _____ Matrícula: _____

rP2CDig126 -Resolução 2ª Prova – ENE0167 CONTROLE DIGITAL – 2026.1

1ª Questão: (3,0): Para cada item indique se é Verdadeiro ou Falso. Caso considere F, sublinhe e justifique cada aspecto incorreto, utilizando os conceitos (palavras-chave) pertinentes.

a) (0,5) A representação de espaço-de-estados permite representar sistemas não controláveis. Esta é, no entanto, mais uma questão de instrumentação. Se forem acrescentados sensores, com ganhos apropriados, poderemos implementar um controlador por realimentação de estados de ordem plena.

F – a um sistemas não controlável devem ser acrescentados atuadores para que seja possível implmentar um controlador de estados de ordem plena.

b) (0,5) Tipicamente, de acordo com a taxa de amostragem, os polos e zeros de um sistema dinâmico estão muito próximos de $z = 1$. Mesmo em microcontroladores de 32 bits, como o ESP32, a propagação de erro pode ser um problema. Se o ADC do ESP32 tem resolução de 12 bits não há vantagem de se acionar o PWM com mais de 12 bits.

F – Um acionamento PWM de 16 bits introduz um erro de truncamento da variável manipulada, $u(k)$, menor que um acionamento de 12 bits.

O conceito central é a propagação do erro com diferentes resoluções:

O ESP32 trabalha nativamente com ponto flutuante de **32 bits** (precisão simples), ADC 12 Bits, PWM de 1 a 16 bits.

c) (0,5) O controle no espaço-de estados tem algumas desvantagens em relação ao projeto PI feito no Lugar Geométrico das Raízes. O principal é que para fazer o projeto no espaço-de-estados é necessário um modelo. O modelo deve ser obtido de forma experimental, a partir de sinais PRBS, em um ponto de operação específico.

F – O modelo não deve ser obtido por identificação. Pode ser, mas pode também ser ser obtido por da modelagem (princípios fundamentais)

d) (0,5) A amostragem de sinais reduz a margem de fase de um sistema dinâmico. Isto significa que apenas discretizar a função de transferência do controlador contínua pode não funcionar. Aumentar a taxa de amostragem favorece a estabilidade deste projeto *quasi*-contínuo.

V

e) (0,5) O projeto de controle por realimentação de estados observados com canal PI de um sistema discreto de terceira (ordem) com zeros em $z = 0,7 \pm 0,8j$ pode produzir, via escolha adequada de parâmetros, uma função de transferência de 1ª ordem.

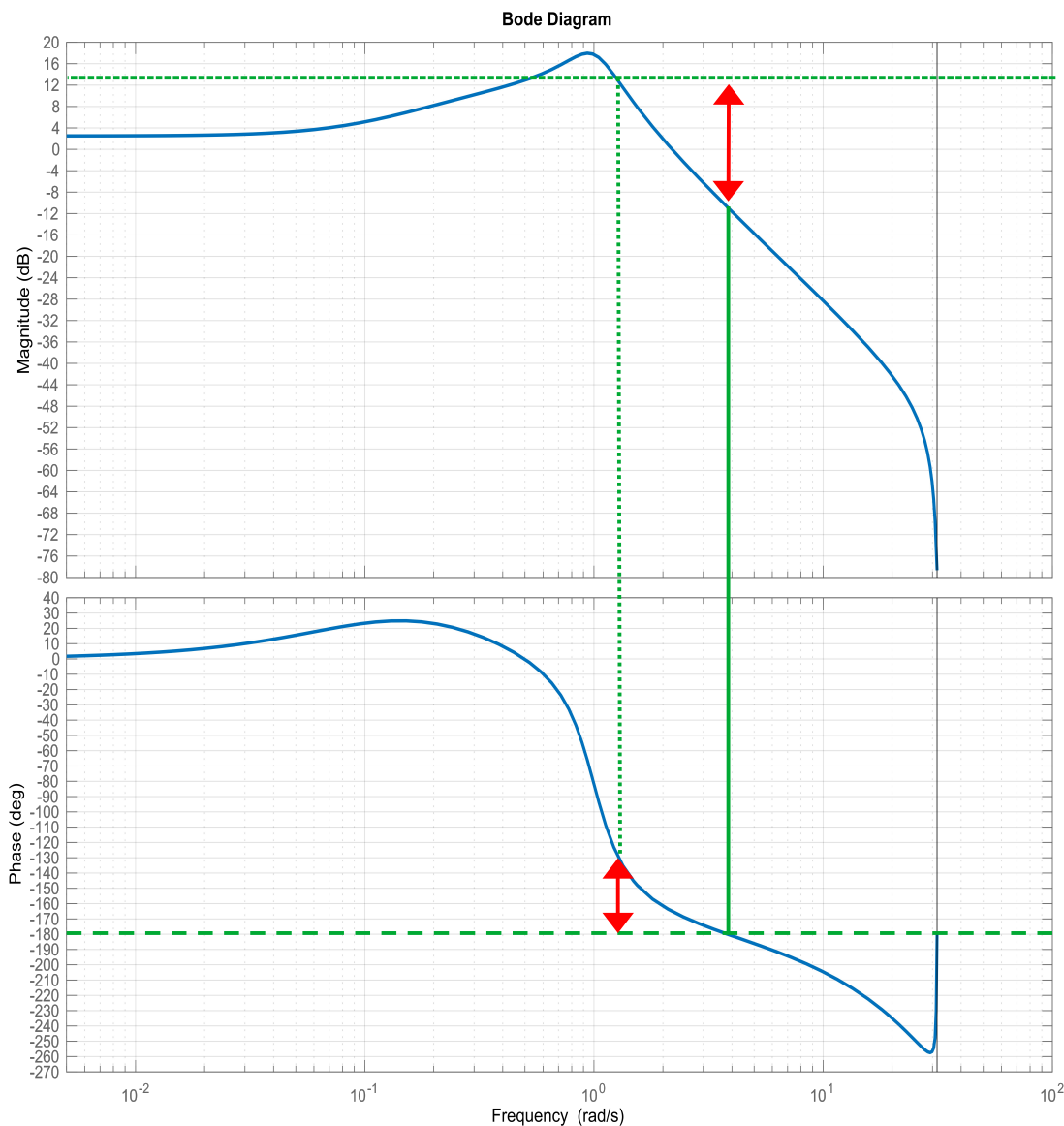
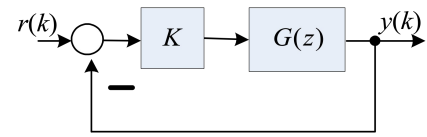
V

f) (0,5) Observadores de perturbação permitem rejeitar sinais constantes por partes, rampas e perturbações senoidais. O erro entre a saída do processo e a saída estimada pelo observador vão alterando as variáveis do estados dos observadores de perturbação até que módulo, frequência e fase correspondam à perturbação. A desvantagem de vários observadores de perturbação é que há interferência entre eles.

F – O único aspecto incorreto é que não é possível modificar a frequência de um observador de perturbações senoidal. O obervador paa ω_0 só consegue detectar perturbações com ω_0 rad/s.

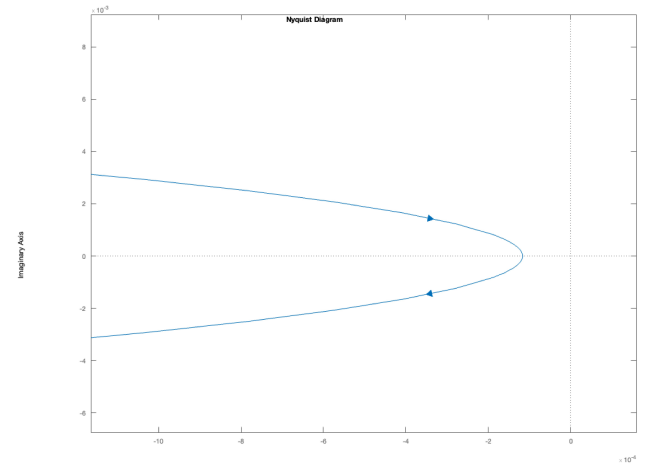
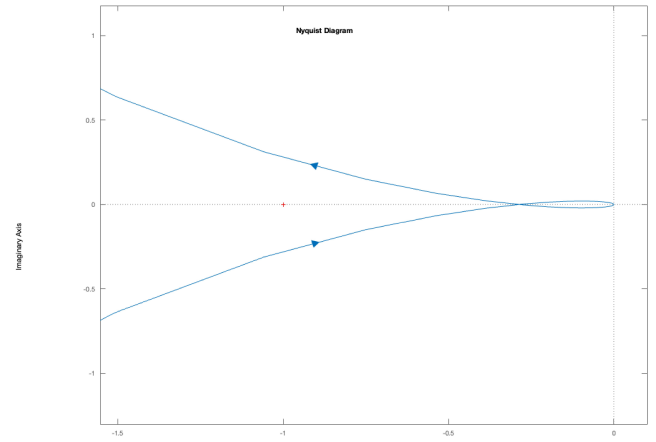
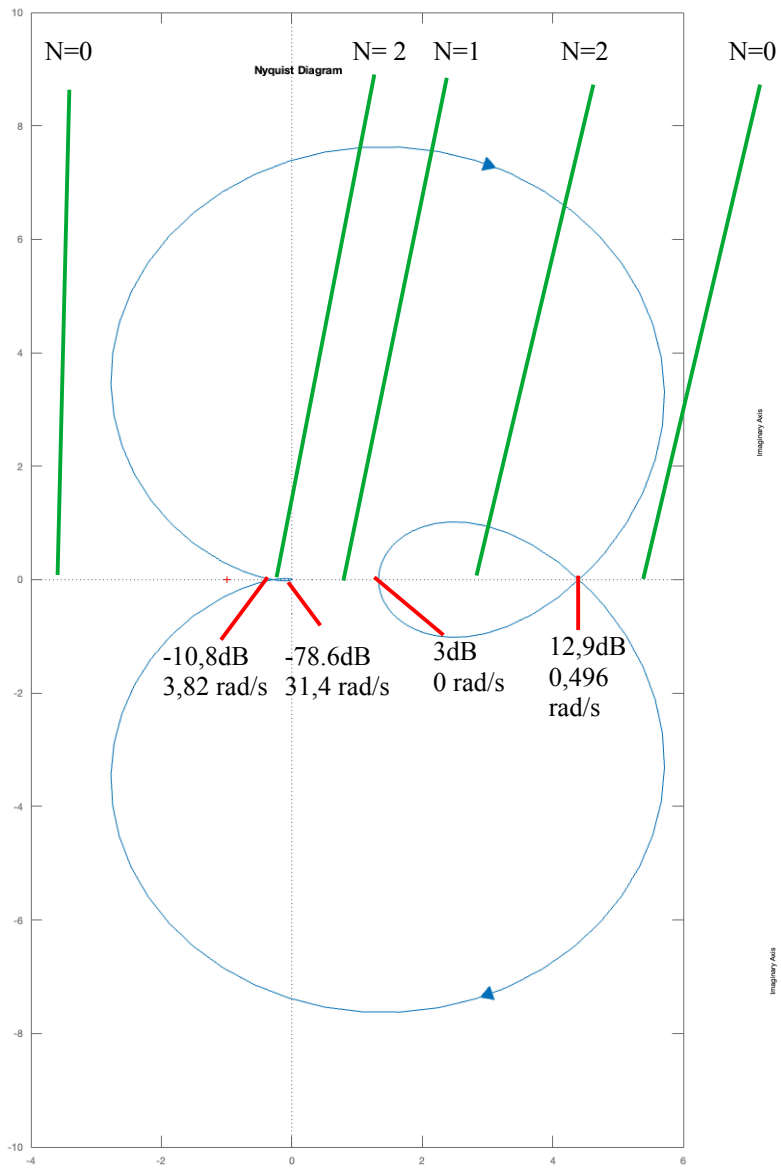
2ª Questão: (3,0) Considere a resposta em frequência de um sistema $G(z)$ discreto de 3ª ordem marginalmente estável em malha aberta ($P=0$, não há pólos fora do círculo unitário).

- (1,0) Esboce o diagrama de Nyquist correspondente.
- (0,5) Qual a faixa de valores do ganho K em $(-\infty < K < \infty)$ para os quais o sistema é estável em malha fechada?
- (0,5) Projete um controlador proporcional (ganho K), para que a margem de fase seja de 50° .
- (0,5) Qual a Margem de Ganho obtida?
- (0,5) Qual o erro deste sistema, em malha fechada, a um degrau unitário de referência?

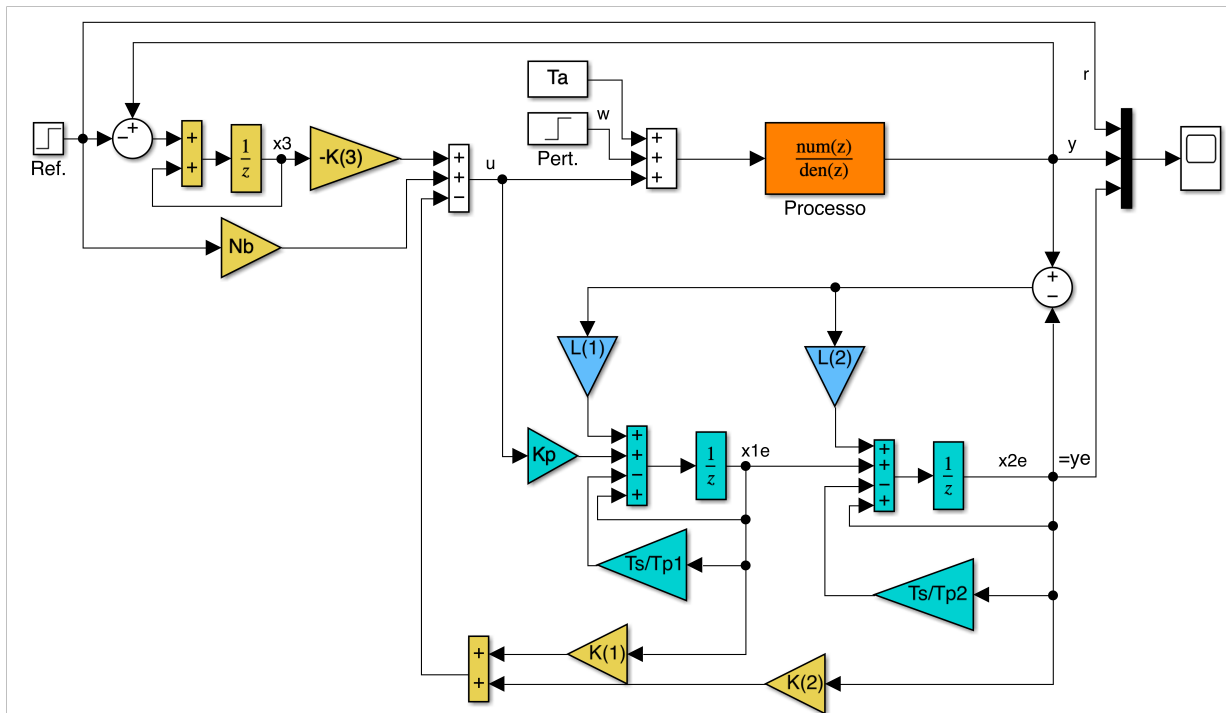


```
g2=zpk([-1],[-3],4)*tf(1,[1 .5 1]);
g2d=c2d(g2,.1);figure(1),margin(g2d);grid,figure(2),nyquist(g2d);figure(3),step(feedback(0.24*g2d,1))
```

- (1,0) Diagrama de Nyquist.
- (0,5) (Nyquist $Z=P+N$) $[0^\circ]$: 3dB:1.4125; 12.9dB:4.4157; $[180^\circ]$: -10.8dB:0.2884; -78.6dB:1.174e-4; $-1/K$: -1/1.4126 $\Rightarrow K_1=-0.708$; -1/4.4157 $\Rightarrow K_2=-0.22645$; $1/0.2884 \Rightarrow K_3=3.4674$; $1/1.174e-4 \Rightarrow K_4=8.5179e3$
Estabilidade ($P=0$: $Z \Rightarrow 0 \Rightarrow N=0$) $0 < K < K_3$ e $-K_2 < K < 0 \Rightarrow -K_2 < K < K_3$: $-0.22645 < K < 3.4674$
- (0,5) em 1,29 rad/s temos $MF = 50^\circ$. $\|_{1.29 \text{ rad/s}} = 12,4 \text{ dB} \Rightarrow K = -12.4 \text{ dB}$ (0,24) Nova linha de 0 dB
- (0,5) Qual a Margem de Ganho obtida? $MG = 23.2 \text{ dB}$ (em 3.83 rad/s).
- (0,5) Qual o erro deste sistema, em malha fechada, a um degrau unitário de referência? $K_p = 10^{(-9.9/20)} = 0.3199$. $e_{ss} = 1/(1+K_p) = 0,7576$



3ª Questão: Considere o seguinte sistema de controle discreto, onde x_{1e} e x_{2e} são as variáveis de estado estimadas do processo. $Tp1 = 50$ s; $Tp2 = 250$ s; $Kp=0,1$; $Ts=5$ s; $Ta = 27$ °C;



- (1,0) Projete um observador de estados preditos de tal forma que os pólos do observador sejam $z_{1,2}=0,7$.
- (1,0) Projete um controlador por realimentação de estados com canal integral com todos os pólos em $z = 0,5$.
- (0,5) Acrescente um canal proporcional, Nb , para que a função de transferência completa seja de 2ª ordem.
- (0,5) Apresente a função de transferência de malha fechada completa $Y(z)/R(z)$.
- (0,5) Por quê esta estrutura de controle utiliza a integral do erro y -ref e depois inverte o canal integral?
- (0,5) O controlador projetado é de pequenos ou de grandes sinais (Ponto de Operação)? Justifique.

--- Resolução:

$$a) \begin{bmatrix} x(k+1) \\ y(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-Ts/Tp1 & 0 \\ 1 & 1-Ts/Tp2 \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} Kp \\ 0 \end{bmatrix} u$$

Dinâmica do observador: $|zI - \Phi + LH| = z^2 - 1,4z + 0,49$

$$\begin{bmatrix} x(k+1) \\ y(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,9 & 0 \\ 1 & 0,98 \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} Kp \\ 0 \end{bmatrix} u$$

$$LH = \begin{bmatrix} l_1 \\ l_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & l_1 \\ 0 & l_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} z-0,9 & l_1 \\ -1 & z-0,98+l_2 \end{vmatrix} = z^2 + z(-0,9-0,98+l_2) + 0,9*0,98-0,9*l_2+l_1 \Rightarrow L = \begin{bmatrix} 0,04 \\ 0,48 \end{bmatrix}$$

b) Considerando a realimentação negativa dos estados aumentados $u(k) = -Kx(k) = -[k_1 \ k_2 \ k_3] \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \end{bmatrix}$.

Integral do erro: $(x_I = x_3) x_3(k+1) = x_3(k) + y(k) - r(k)$

Sistema aumentado: $\begin{bmatrix} x(k+1) \\ x_I(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varphi & 0 \\ H & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(k) \\ x_I(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Gamma \\ 0 \end{bmatrix} u(k) - \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} r(k)$

$$y(k) = [H \ 0] \begin{bmatrix} x(k) \\ x_I(k) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}(k+1) = \begin{bmatrix} 0,9 & 0 & 0 \\ 1 & 0,98 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} 0,1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u(k) - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} r(k)$$

$$y(k) = [0 \ 1 \ 0] x(k)$$

$$y_a K = \begin{bmatrix} 0,1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} [K_1 \ K_2 \ K_3] = \begin{bmatrix} 0,1 K_1 & 0,1 K_2 & 0,1 K_3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$|zI - \varphi_a + \Gamma_a K| = \begin{vmatrix} z - 0,9 + 0,1 K_1 & 0,1 K_2 & 0,1 K_3 \\ -1 & z - 0,98 & 0 \\ 0 & -1 & z - 1 \end{vmatrix}$$

$$z^3 + z^2(-0,9 + 0,1 K_1 - 0,98 - 1) + z(0,98 + 0,9 - 0,1 K_1 + 0,9 * 0,98 - 0,098 K_1) - 1 * -0,98 * (-0,9 + 0,1 K_1) + 0,1 * K_3 + z 0,1 K_2 - 0,1 K_2$$

$$z^3 + z^2(-2,88 + 0,1 K_1) + z(2,763 - 0,198 K_1 + 0,1 K_2) - 0,118 - 0,098 K_1 - 0,1 K_2 + 0,1 K_3$$

$$(z - 0,5)^3 = z^3 - 1,5 z^2 + 0,75 z - 0,125$$

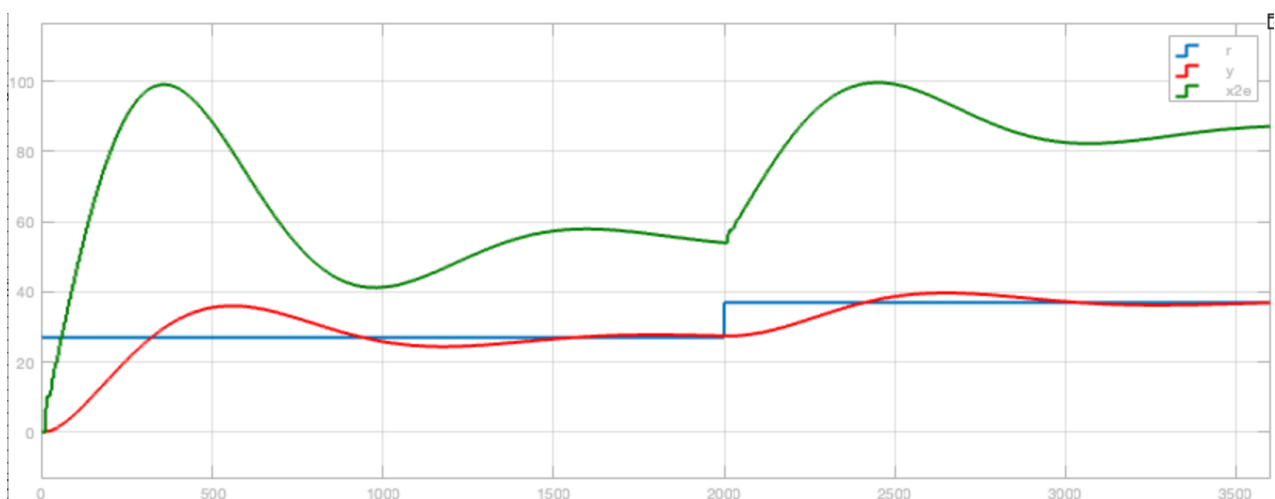
$$K = [k_1 \ k_2 \ k_3] = [13,8 \ 7,204 \ 1,25]$$

c) $0,5 = 1 - \frac{1,25}{N_b} \rightarrow N_b = \frac{1,25}{0,5} = 2,5$

d) $\frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{2,5 * K_p}{(z - 0,5)(z - 0,5)} = \frac{0,25}{(z - 0,5)(z - 0,5)}$

e) a inversão do sinal, fazendos todas as realimentações negativas, permite o uso a fórmula de Ackermann ou da função place() do matlab para o cálculo de $[K(1) \ K(2) \ K(3)]$. ($K_1 = K(3)$)

f) O projeto não leva em conta um ponto de operação. É um projeto de pequenos sinais. Na estrutura aumentada com canal integral o canal integral compensa o ponto de operação, T_a . Assim, espaço-de-estados com canal integral é um controlador de grandes sinais que dispensa a linearização em torno do ponto de operação.



Fórmulas úteis:

$$\text{Regra de Mason: } \frac{\sum P_k \Delta_k}{\Delta}$$

$$\Delta = 1 - \sum L_i + \sum L_i L_j - \sum L_i L_j L_k \dots$$

P_k – caminho direto k ligado entra e saída

$\Delta_k - \Delta$ tirando os laços que tocam o caminho direto k

$L_i L_j$ – laços disjuntos 2 a 2

$$G(z) = \frac{KD(z)G(z)}{1 + KD(z)G(z)H(z)}$$

LGR:

$$\left| KD(z)G(z)H(z) \right|_{z_0} = 1 \quad \text{Condição de Módulo}$$

$$\angle KD(z)G(z)H(z)_{z_0} = (2k+1)180^\circ \quad \text{Condição de Fase}$$

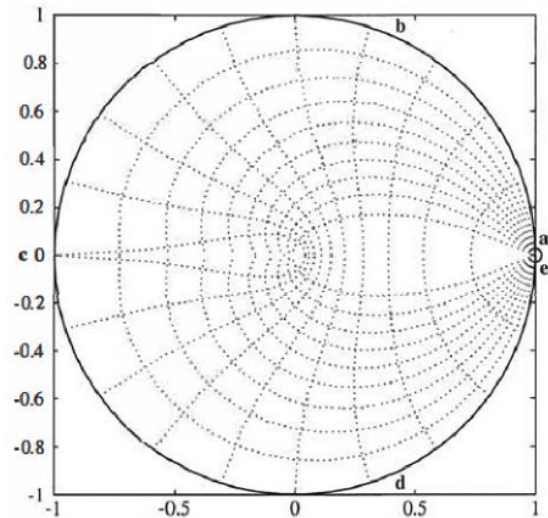
$$G_{\text{ZOH}}(z) = (1 - z^{-1}) Z \left\{ \frac{G(s)}{s} \right\}$$

Tabela de Transformadas -Z

$\frac{1}{s}$	$1(kT)$	$\frac{z}{z-1}$
$\frac{1}{s^2}$	kT	$\frac{Tz}{(z-1)^2}$
$\frac{1}{s+a}$	e^{-akT}	$\frac{z}{z-e^{-aT}}$
$\frac{1}{(s+a)^2}$	kTe^{-akT}	$\frac{Tze^{-aT}}{(z-e^{-aT})^2}$

%3C

$$1 + KD(z)G(z) = 0$$



$$Z = P + N$$

Z – raízes da eq. carac fora do circ. unit.

P – # pólos fora circ. unit. em MA

N – # envoltimentos (-1) sentido horário

$$x(k+1) = \Phi x(k) + \Gamma u(k)$$

$$y(k) = Hx(k) + Ju(k)$$

Princípio da Separabilidade:

$$\begin{bmatrix} \bar{x}(k+1) \\ x(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi - L_p H & 0 \\ \Gamma K & \Phi - \Gamma K \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x}(k) \\ x(k) \end{bmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} zI - \Phi + L_p H & 0 \\ \Gamma K & zI - \Phi + \Gamma K \end{vmatrix} = 0$$

$$\left| zI - \Phi + L_p H \right| \left| zI - \Phi + \Gamma K \right| = \alpha_c(z) \alpha_e(z) = 0$$

$$\frac{Y(z)}{R(z)} = H(zI - \Phi + \Gamma K)^{-1} \Gamma N_b$$