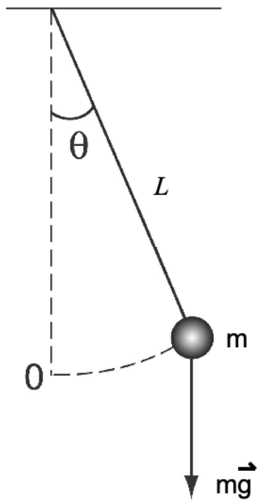
ENE/FT/UnB
Departamento de Engenharia Elétrica
Faculdade de Tecnologia
Universidade de Brasília
Prof. Adolfo Bauchspiess

*Prova individual, sem consulta.*
*Só é permitido o uso de* ***calculadora científica básica****.*
(Números complexos & funções trigonométricas)
BT-25/15, 24/4/2024, $7^{00}$-$10^{00}$

Nome: ______________________________________________ Matrícula: ________________

# 1ª Prova – ENE0077 Controle de Sistemas Dinâmicos – 2024.1

**1ª Questão:** (2,0) Considere o modelo não-linear de um pêndulo simples. A ação da gravidade depende da posição angular do pêndulo. Obtenha a função de transferência (pequenos sinais) para o "*worst-case scenario*", isto é, o ângulo que exige o torque máximo.




$$mL^2\frac{d^2\theta}{dt}+c\frac{d\theta}{dt}=u-m\,g\,L\,sen\theta$$

$$\frac{d^2\theta}{dt}=-c/mL^2\frac{d\theta}{dt}+u/mL^2-m\,g\,L\,sen\theta/mL^2$$

$$f(x)\sim=f(x_0)+\frac{df}{dx}|_{x=x_0}(x-x_0)$$

$$sen(\theta)\sim=\sin(\theta_0)+\cos(\theta_0)(\theta-\theta_0)$$

$$mL^2\frac{d^2\theta}{dt}+c\frac{d\theta}{dt}=u-m\,g\,L\left(sen(\theta_0)+\cos(\theta_0)(\theta-\theta_0)\right)$$

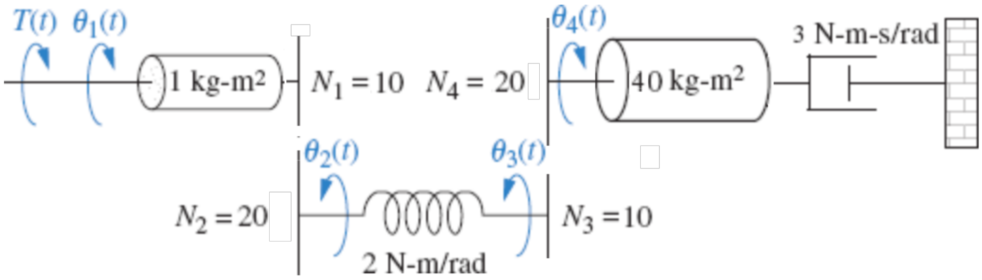
$$mL^2\frac{d^2\delta\theta}{dt}+c\frac{d\delta\theta}{dt}=\delta u-m\,g\,L\cos(\theta_0)\delta\theta$$

$$\delta u=u-mgLsen(\theta_0)$$

$$mL^2s^2\delta\theta(s)+c\,s\,\delta\theta(s)+m\,g\,L\cos(\theta_0)\delta\theta(s)=\delta u(s)$$

$$\frac{\delta\theta(s)}{\delta u(s)}=\frac{1}{mL^2s^2+c\,s+m\,g\,L\cos(\theta_0)}$$ Worst case scenario => pi/2 => $$\frac{\delta\theta(s)}{\delta u(s)}=\frac{1}{mL^2s^2+c\,s}$$

**2ª Questão**: (2,0) Determine a função de transferência, G(s) = $\theta_4(s)/T(s)$, para o seguinte sistema mecânico rotacional.




---
Transferindo as impedâncias através dos trens de engrenages para o eixo da mola de torsão:

$$\left(\frac{N_2}{N_1}\right)^2 J_1\ddot{\theta}_2 + K\theta_2 - K\theta_3 = T_2$$

$$-K\theta_2 + K\theta_3 + \left(\frac{N_3}{N_4}\right)^2 D\dot{\theta}_3 + \left(\frac{N_3}{N_4}\right)^2 J_2\ddot{\theta}_3 = 0$$

T. Laplace e valores:

$$\left[4s^2+2\right]\theta_2 - 2\theta_3 = T_2$$
$$-2\theta_2 + \left[2+0{,}75s+10s^2\right]\theta_3 = 0$$

$$\begin{array}{cc} 4s^2+2 & T_2 \\ -2 & 0 \end{array}$$

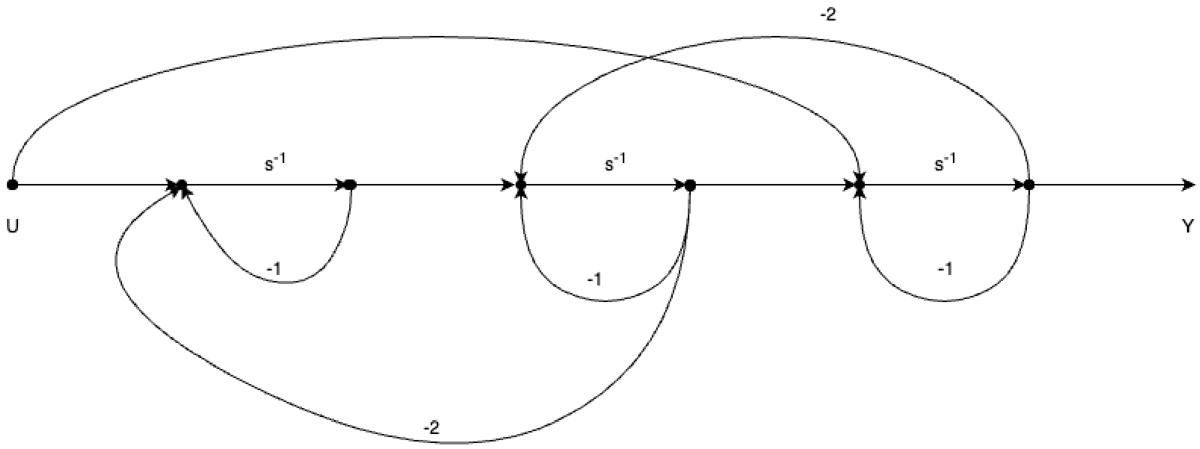
-------------------------

$$\begin{array}{cc} 4s^2+2 & -2 \\ -2 & 2+0{,}75s+10s^2 \end{array}$$

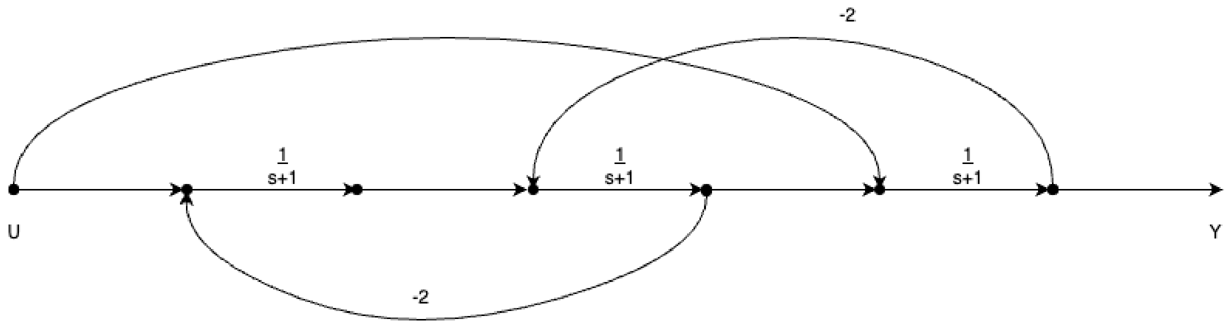
$$\frac{\theta_3}{T_2} = \frac{2}{40s^4+3s^3+28s^2+1{,}5s} \rightarrow \frac{\theta_4(s)}{T(s)} = \frac{2}{40s^4+3s^3+28s^2+1{,}5s}$$

$$\frac{r_1}{r_2} = \frac{N_1}{N_2} \quad \theta_3 = \frac{N_4}{N_3}\theta_4 \quad T_2 = \frac{N_2}{N_1}T_1 \quad \frac{\theta_3}{T_2} = \frac{N_4}{N_3}\frac{N_1}{N_2}\frac{\theta_4}{T_1} = \frac{20*10}{10*20}\frac{\theta_4}{T_1} = \frac{\theta_4}{T_1}$$

**3ª Questão:** (3.0) Obtenha a função de transferência, G(s) = Y(s)/U(s).




---




2 Caminhos diretos, 2 laços,

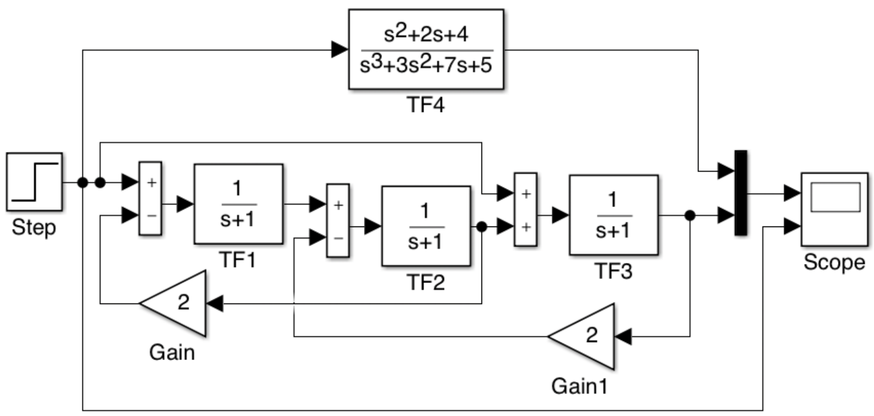
$$L_1=\frac{-2}{(s+1)^2},\, L_2=\frac{-2}{(s+1)^2},$$

$$\Delta=1+\frac{4}{(s+1)^2},\, P_1=\frac{1}{(s+1)^3},\, P_2=\frac{1}{(s+1)},$$

$$\Delta_1=1,\, \Delta_2=1+\frac{2}{(s+1)^2}$$

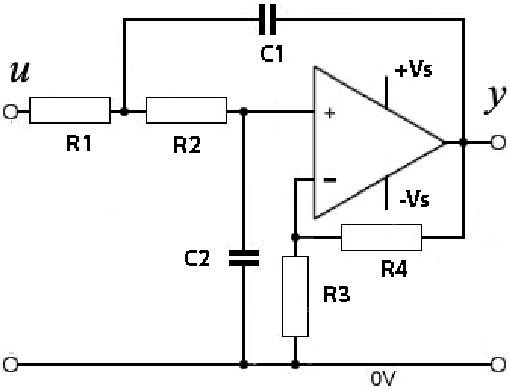
$$G(s)=\frac{Y(s)}{U(s)}=\frac{P_1\Delta_1+P_2\Delta_2}{\Delta}=\frac{\frac{1}{(s+1)^3}+\frac{1}{(s+1)}\left(1+\frac{2}{(s+1)^2}\right)}{1+\frac{4}{(s+1)^2}}=\frac{1+(s+1)^2\left(1+\frac{2}{(s+1)^2}\right)}{(s+1)^3+4(s+1)}=\frac{1+(s+1)^2+2}{(s+1)^3+4(s+1)}$$

$$G(s)=\frac{s^2+2s+4}{s^3+3s^2+7s+5}$$

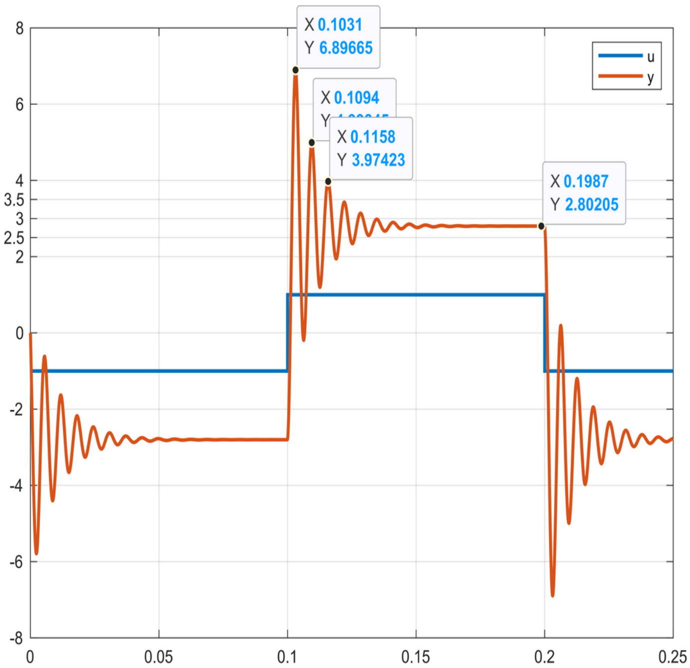


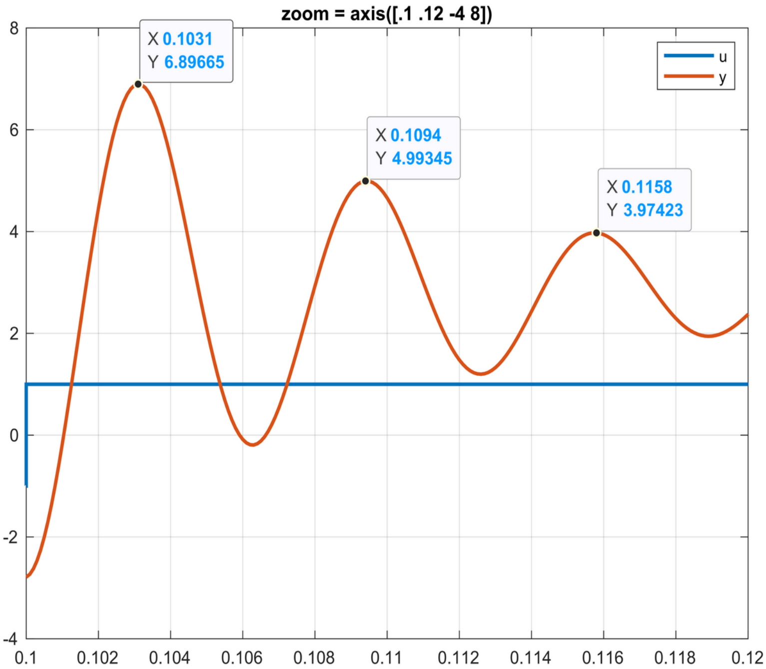
**4ª Questão:** (3,0) Com a precisão disponível no gráfico, considere a seguinte resposta ao degrau de um sistema de segunda ordem sem zeros (detalhes no zoom):

$$G(s)=\frac{Y(s)}{U(s)}=\frac{K\omega_n^2}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}$$




a) (1,0) Calcule os tempos de subida, pico, acomodação e sobrepasso percentual, $t_r$, $t_p$, $t_s$ e $M_p$.
b) (1,0) Quais os valores de $K$, $\zeta$, $\omega_n$?
c) (1,0) Com R1=R2=R4=10kΩ, C1=C2=0,1μF, no circuito, qual o valor de R3 produz o sinal mostrado?




a) (1,0) $t_r$ ~= 0,002 $s$,
$t_p$ ~= 0,0031 $s$,
$t_s$ ~=0,05 $s$ e
$M_p$ = (6,89+2,8)/(2*2,8)=1,73 ~=73%

b) (1,0) Quais os valores de $K$, $\zeta$, $\omega_n$?
$K$ = (2,8*2)/2 = 2,8;
$\zeta$ = 0,1;
$\omega_d = \omega_n$ sqrt(1- $\zeta^2$); Td = (0.1158-0.1031)/2 = wd=2pi/Td = 989.4780
→ wn = 994.4628 rad/s (1/RC = 1000 rad/s)

c) (1,0) Com R1=R2=R4=10kΩ, C1=C2=0,1μF, no circuito, qual o valor de R3 produz o sinal mostrado?

O ganho do circuito é dados por 1 + R4/R3 = 2,8  10K/R3 = 1,8 => $R_3$ = 5.5 kΩ

$$\frac{r_1}{r_2} = \frac{N_1}{N_2}$$

$$\boxed{T_1\theta_1 = T_2\theta_2}$$

$$\boxed{r_1\theta_1 = r_2\theta_2}$$