ENE/FT/UnB
Departamento de Engenharia Elétrica
Faculdade de Tecnologia
Universidade de Brasília
Prof. Adolfo Bauchspiess

Prova individual, sem consulta.
Só é permitido o uso de ***calculadora científica básica****.*
(Números complexos & funções trigonométricas)
BT-25/15, 9/5/2025, 7^{30}-10^{30}

rP1CSD125 - Resolução 1ª Prova – ENE0077 CONTROLE DE SISTEMAS DINÂMICOS – 2025.1

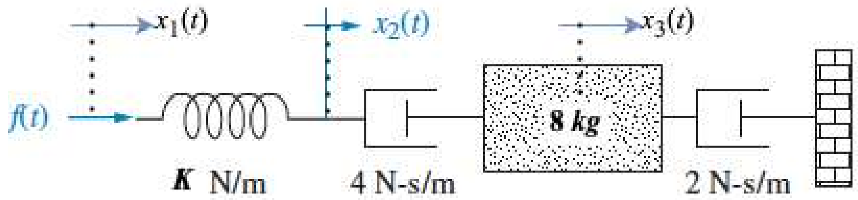
Nome: ______________________________ Matrícula: ______________

A resolução das questões, **organizada de forma clara e objetiva**, nas páginas anexas, **é considerada na correção**. ***Não separar***, por favor, ***as folhas*** desta prova

Prova tipo	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Q1: *K*, Q2: *D*, Q3: *L*, Q4: *N*	1	2	3	4	5	6	7	8	9

1ª Questão (2,5) Considere o seguinte sistema de translação.

a) (2,0) Obtenha a função de transferência $X_2(s)/F(s)$, para o sistema de translação.
b) (0,5) Qual a interpretação física do polo na origem de $X_2(s)/F(s)$?
(O que acontece com $x_2(t)$ ao aplicarmos um degrau em f(t)?)



---
a) (2,0) $X_2(s)/F(s)$

$$K X_1(s) - K X_2(s) = F(s)$$
$$-K X_1(s) + (4s+K) X_2(s) - 4sX_3(s) = 0$$
$$-4sX_2(s) + (8s^2+6s) X_3(s) = 0$$

$$X_2(s) = \frac{\begin{bmatrix} K & F(s) & 0 \\ -K & 0 & -4s \\ 0 & 0 & 8s^2+6s \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} K & -K & 0 \\ -K & 4s+K & -4s \\ 0 & -4s & 8s^2+6s \end{bmatrix}} \qquad X_2(s) = \frac{K(8s^2+6s)F(s)}{K(4s+K)(8s^2+6s) - 16Ks^2 - K^2(8s^2+6s)}$$

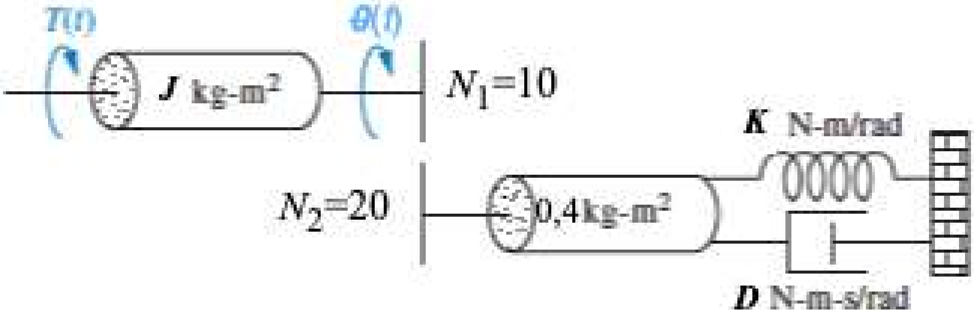
$$X_2(s) = \frac{K(8s^2+6s)F(s)}{(K4s)(8s^2+6s) - 16Ks^2} = \frac{(8s^2+6s)F(s)}{32s^3+24s^2-16s^2} = \frac{(8s^2+6s)F(s)}{32s^3+8s^2} \quad \frac{X_2(s)}{F(s)} = \frac{s+3/4}{4s^2+s}$$

(independe de K)

b) Aplicando se uma força constante a posição $X_2(s)$ irá crescer continuamente (rampa no tempo)

2ª Questão (2,5) Sabendo-se que o seguinte sistema rotacional é de 2ª ordem, sem zeros,

a) (2,0) encontre os valores de J e K para que a resposta a um degrau de torque, apresente um tempo de acomodação, $t_s =$ de 4 s, e um sobrepasso de 25%.



b) (0,5) Nas condições acima, qual o valor de $\theta(t\to\infty)$, para um degrau de torque de amplitude 2 aplicado em t=3 s?

---

a) $$\left[\left[J+J_2\left(\frac{N_1}{N_2}\right)^2\right]s^2+D\left(\frac{N_1}{N_2}\right)^2 s+K\left(\frac{N_1}{N_2}\right)^2\right]\theta(s)=T(s) \qquad \frac{\theta(s)}{T(s)}=\frac{1}{\left[J+0{,}4\left(\frac{1}{2}\right)^2\right]s^2+D\left(\frac{1}{2}\right)^2 s+K\left(\frac{1}{2}\right)^2}$$

formulação alternativa (equivalente para t_s e M_p): $$\left[\left[J\left(\frac{N_2}{N_1}\right)^2+J_2\right]s^2+Ds+K\right]\theta_2(s)=T_2(s)$$

(0,5) $$\frac{\theta(s)}{T(s)}=\frac{1}{[J+0{,}1]s^2+0{,}25\,Ds+0{,}25\,K} \qquad \frac{\theta_2(s)}{T_2(s)}=\frac{1}{(4J+0{,}4)s^2+Ds+K},(mesmo\ \zeta\ ,\omega_n)$$

(0,5) $Mp=25\% \to \zeta=0{,}4\,;t_{s,2\%}=4/\sigma\, t_s=4\,s \to \sigma=1$

$$\frac{\theta(s)}{T(s)}=\frac{G\omega_n^2}{s^2+2\zeta\,\omega_n s+\omega_n^2} \qquad \zeta=0{,}4\,;\sigma=\zeta\,\omega_n=1 \to \omega_n=1/0{,}4=2{,}5$$

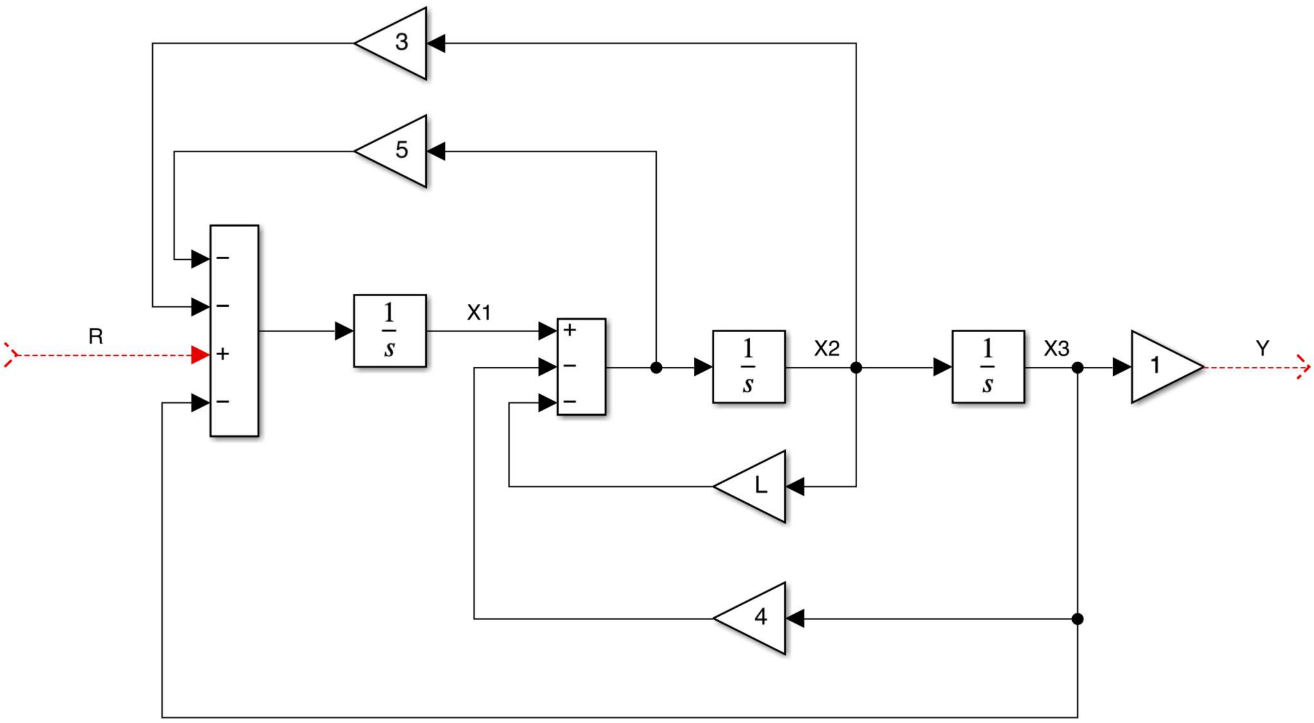
(0,5) $$\frac{\theta(s)}{T(s)}=\frac{\frac{1}{J+0{,}1}}{s^2+\frac{0{,}25\,D}{[J+0{,}1]}s+\frac{0{,}25\,K}{[J+0{,}1]}} \qquad \frac{\theta(s)}{T(s)}=\frac{A\omega_n^2}{s^2+2s+6{,}25}$$

(0,5) $$\frac{0{,}25\,D}{J+0{,}1}=2\,\zeta\,\omega_n=2; \quad 2J+0{,}2=0{,}25\,D \to J=0{,}125\,D-0{,}1$$
$$\frac{0{,}25\,K}{J+0{,}1}=\omega_n^2=6{,}25; \quad 6{,}25*0{,}125\,D=0{,}25\,K\,; \to K=3.125\,D$$

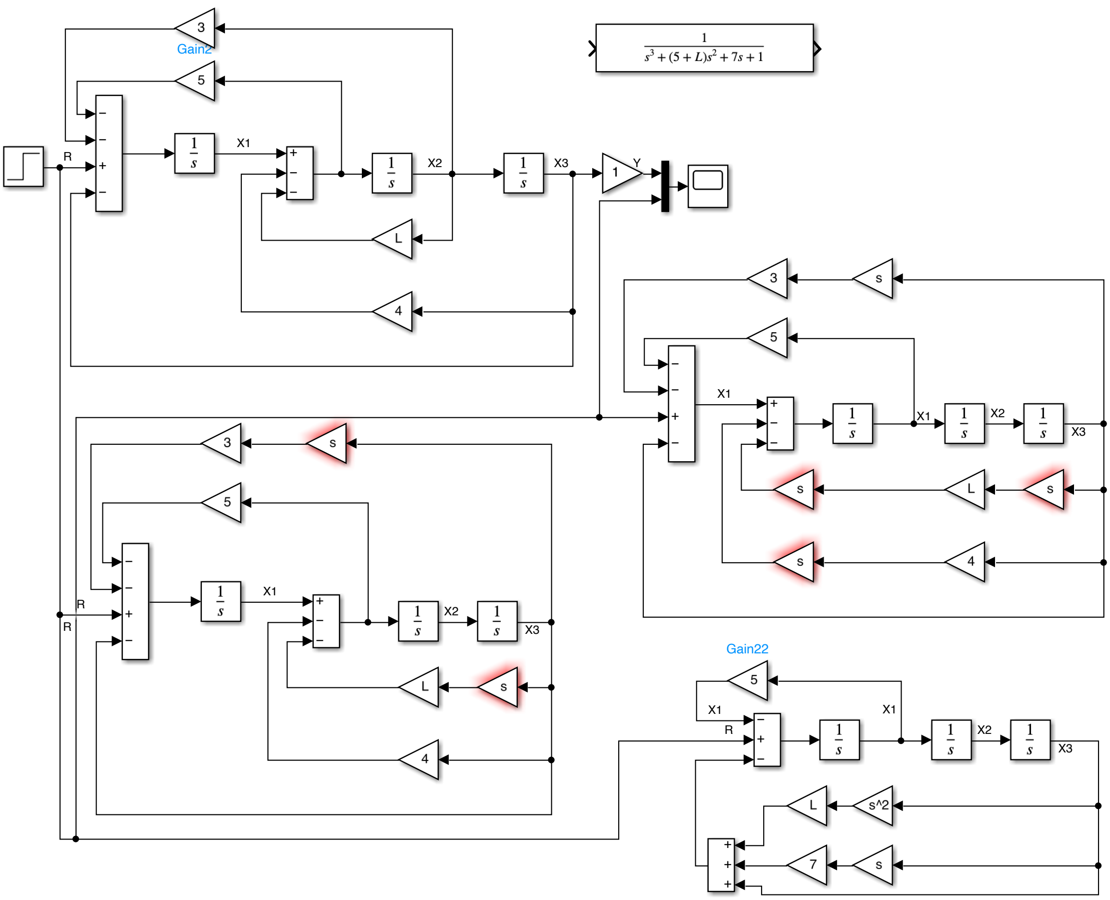
b) (0,5) $$A\omega_n^2=\frac{1}{J+0{,}1}; \quad A=\frac{1}{(J+0{,}1)\omega_n^2} \to A=\frac{1}{0.125\,D*6.25} \qquad \theta(t\to\infty)=2*A$$

D	1	2	3	4	5	6	7	8	9
a) J	0.0250	0.1500	0.2750	0.4000	0.5250	0.6500	0.7750	0.9000	1.0250
a) K	3.1250	6.2500	9.3750	12.5000	15.6250	18.7500	21.8750	25	28.1250
b) θ_{ss}	2.5600	1.2800	0.8533	0.6400	0.5120	0.4267	0.3657	0.3200	0.2844

3ª Questão (2,5) Utilizando álgebra de diagrama de blocos E/OU a fórmula de Mason E/OU equações diferenciais, calcule a função de transferência Y(s)/R(s).



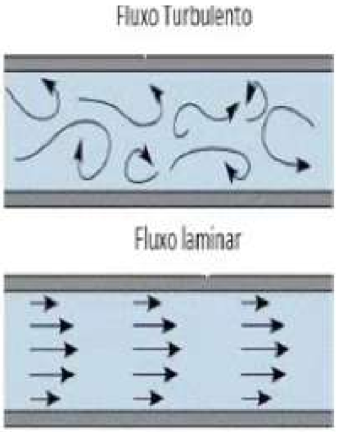
$$\frac{Y(s)}{R(s)}=\frac{P_1}{Delta};\quad P_1=\frac{1}{s^3};\quad Delta=1+\frac{5}{s}+\frac{L}{s}+\frac{4}{s^2}+\frac{3}{s^2}+\frac{1}{s^3};\quad \frac{Y(s)}{R(s)}=\frac{\frac{1}{s^3}}{1+\frac{5+L}{s}+\frac{7}{s^2}+\frac{1}{s^3}}=\frac{1}{s^3+(5+L)s^2+7s+1}$$

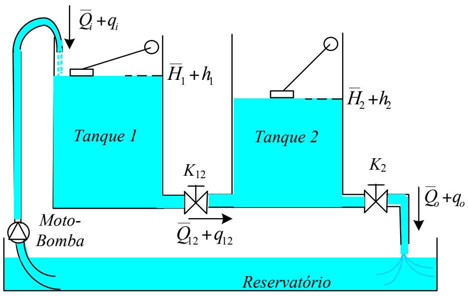


4a Questão (3,5) Sistemas de nível de líquidos são largamente utilizados na indústria. De acordo com o número de Reynolds, vazões mais altas, produzem fluxo turbulento. Considere o modelo de grandes sinais em cascata: (Obs: os itens a,b,c podem ser resovidos de forma independente)

$$A\frac{dH_1}{dt} = Q_i - K_{12}\sqrt{H_1 - H_2}$$

$$A\frac{dH_2}{dt} = K_{12}\sqrt{H_1 - H_2} - K_2\sqrt{H_2}$$





$$Q_i = \bar{Q}_i + q_i;\ Q_{12} = \bar{Q}_{12} + q_{12};\ Q_o = \bar{Q}_o + q_o;$$
$$H_1 = \bar{H}_1 + h_1;\ H_2 = \bar{H}_2 + h_2;$$

a) (2,0) Utilizando a série de Taylor, obtenha as equações diferenciais do modelo linearizado (Obs: linearizar f(H_1,H_2) ou linearizar f(H_1), e g($H_1 - H_2$) = g(Δ))

$$A\frac{dh_1}{dt} = q_i - ah_1 + ah_2$$

$$A\frac{dh_2}{dt} = ah_1 - (a+b)h_2$$

$$a = \frac{K_{12}}{2\sqrt{\bar{H}_1 - \bar{H}_2}};\ b = \frac{K_2}{2\sqrt{\bar{H}_2}}$$

b) (0,5) Obtenha a funções de transferência $\dfrac{H_1(s)}{Q_i(s)}$

c) (0,5) Para $\bar{H}_2 = N\,cm,\ A = 150\,cm^2,\ K_{12} = 300\,cm^{2,5}/s,\ K_2 = 200\,cm^{2,5}/s$, qual o valor de $\bar{H}_1$?

d) (0,5)Qual a vazão de entrada em regime permanentente correspondente ao item c?

Taylor: $f(X) = f(\bar{X}) + \left.\dfrac{df}{dt}\right|_{\bar{X}}(X - \bar{X})$

$$\sqrt{H_2} = \sqrt{\bar{H}_2} + \frac{1}{2\sqrt{\bar{H}_2}}(H_2 - \bar{H}_2) = \sqrt{\bar{H}_2} + \frac{1}{2\sqrt{\bar{H}_2}}(h_2)$$

$$\sqrt{H_1 - H_2} = \sqrt{\Delta} = \sqrt{\bar{\Delta}} + \frac{1}{2\sqrt{\bar{\Delta}}}(\Delta - \bar{\Delta})$$
$$\sqrt{\bar{H}_1 - \bar{H}_2} + \frac{1}{2\sqrt{\bar{H}_1 - \bar{H}_2}}(H_1 - H_2 - \bar{H}_1 - \bar{H}_1) = \sqrt{\bar{H}_1 - \bar{H}_2} + \frac{1}{2\sqrt{\bar{H}_1 - \bar{H}_2}}(h_1 - h2)$$

$$\sqrt{H_2}=\sqrt{\bar{H}_2}+\frac{1}{2\sqrt{\bar{H}_2}}\left(H_2-\bar{H}_2\right)=\sqrt{\bar{H}_2}+\frac{1}{2\sqrt{\bar{H}_2}}\left(h_2\right)$$

$$\sqrt{H_1-H_2}=\sqrt{\bar{H}_1-\bar{H}_2}+\frac{1}{2\sqrt{\bar{H}_1-\bar{H}_2}}\left(H_1-H_2-\bar{H}_1-\bar{H}_1\right)=\sqrt{\bar{H}_1-\bar{H}_2}+\frac{1}{2\sqrt{\bar{H}_1-\bar{H}_2}}\left(h_1-h_2\right)$$

$$A\frac{dH_1}{dt}=Q_i-K_{12}\sqrt{H_1-H_2}$$
$$A\frac{dH_2}{dt}=K_{12}\sqrt{H_1-H_2}-K_2\sqrt{H_2}$$

$$\frac{dH_1}{dt}=\frac{d\left(\bar{H}_1+h_1\right)}{dt}=\frac{dh_1}{dt};\frac{dH_2}{dt}=\frac{dh_2}{dt}$$

$$A\frac{d\left(\bar{H}_1+h_1\right)}{dt}=\bar{Q}_i+qi-K_{12}\left[\sqrt{\bar{H}_1-\bar{H}_2}+\frac{1}{2\sqrt{\bar{H}_1-\bar{H}_2}}\left(h_1-h_2\right)\right]$$
$$A\frac{d\left(\bar{H}_2+h_2\right)}{dt}=K_{12}\left[\sqrt{\bar{H}_1-\bar{H}_2}+\frac{1}{2\sqrt{\bar{H}_1-\bar{H}_2}}\left(h_1-h_2\right)\right]-K_2\left[\sqrt{\bar{H}_2}+\frac{1}{2\sqrt{\bar{H}_2}}\left(h_2\right)\right]$$
$$\bar{Q}_i=K_{12}\sqrt{\bar{H}_1-\bar{H}_2}=K_2\sqrt{\bar{H}_2}$$

$$A\frac{dh_1}{dt}=qi-\frac{K_{12}}{2\sqrt{\bar{H}_1-\bar{H}_2}}\left(h_1-h_2\right)$$
$$A\frac{dh_2}{dt}=\frac{K_{12}}{2\sqrt{\bar{H}_1-\bar{H}_2}}\left(h_1-h_2\right)-\frac{K_2}{2\sqrt{\bar{H}_2}}h_2$$

$$A\frac{dh_1}{dt}=qi-ah_1+ah_2$$
$$A\frac{dh_2}{dt}=ah_1-\left(a+b\right)h_2$$
$$y=h_1$$

$$\left(As+a\right)H_1\left(s\right)-aH_2\left(s\right)=Q_i\left(s\right)$$
$$-aH_1\left(s\right)+\left(As+a+b\right)H_2\left(s\right)=0$$
$$Y=H_1$$

b) $H_1\left(s\right)=\dfrac{\begin{bmatrix}Q_i & -a\\ 0 & As+a+b\end{bmatrix}}{\begin{bmatrix}As+a & -a\\ -a & As+a+b\end{bmatrix}}=\dfrac{Q_i\left(As+a+b\right)}{A^2s^2+As\left(a+a+b\right)+a^2+ab-a^2}\rightarrow\dfrac{H_1\left(s\right)}{Q_i\left(s\right)}=\dfrac{As+a+b}{A^2s^2+As\left(2a+b\right)+ab}$

c) $\bar{Q}_i=K_{12}\sqrt{\bar{H}_1-\bar{H}_2}=K_2\sqrt{\bar{H}_2}$ $\qquad \bar{H}_2=N\,cm,\ A=150\,cm^2,\ K_{12}=300\,cm^{2{,}5}/s,\ K_2=200\,cm^{2{,}5}/s$

$\bar{Q}_i=200\sqrt{N}=300\sqrt{\bar{H}_1-N}\rightarrow 4N=9\left(\bar{H}_1-N\right)\rightarrow 13N=9\bar{H}_1\rightarrow\bar{H}_1=\dfrac{13N}{9}$

d) $\bar{Q}_i=K_2\sqrt{\bar{H}_2}=200\sqrt{\left(N\right)}$

N	1	2	3	4	5	6	7	8	9
c) H_1	1.44	2.89	4.33	5.78	7.22	8.67	10.11	11.56	13
d) Q_i	200	282.84	346.41	400	447.21	489.90	529.15	565.68	600

Formulário -------------------------

Engrenagem

$$r_1\theta_1 = r_2\theta_2 \quad T_1\theta_1 = T_2\theta_2$$

$$\theta_2 = \frac{N_1}{N_2}\theta_1 ; T_2 = \frac{N_2}{N_1}T_1 ; J_e = J_L\left(\frac{N_1}{N_2}\right)^2$$

$$Regra\,de\,Mason : \frac{\sum P_k \Delta_k}{\Delta} \quad \zeta = \frac{-\ln\left(\frac{Mp}{100}\right)}{\sqrt{\pi^2 + \ln^2\left(\frac{Mp}{100}\right)}}$$

$$f(X) = f(\bar{X}) + \left.\frac{df}{dX}\right|_{\bar{X}} (X - \bar{X})$$

$$t_r \simeq \frac{1.8}{\omega_n}$$