

## Experiência 2

### Estabilidade - Critério de Routh-Hurwitz

#### Introdução

O critério de Routh-Hurwitz permite determinar a *estabilidade* de um sistema dinâmico a partir dos coeficientes da equação característica. A relevância prática do critério de Routh-Hurwitz é obter a estabilidade em função de um parâmetro ajustável, em geral o ganho de malha. Um sistema com três polos, sem zeros, sempre se torna instável a partir de um valor de ganho, denominado *ganho crítico*,  $K_{cr}$ . A partir deste ganho,  $K_{cr}$ , o sistema é instável e a saída, considerando o modelo linear, cresce indefinidamente. A saturação, no entanto, presente em todos os sistemas físicos, restringe o sinal do atuador, reduzindo o ganho efetivo de malha. O sistema passa a oscilar na frequência crítica,  $\omega_{cr}$ . A amplitude do ciclo limite que se estabelece, pode ser analisada, em função do valor da saturação, pelo método da função descritiva.

#### Objetivo

Acrescentando ao kit impressora um 3º polo em  $s = -1/0,02$ , obter experimentalmente os valores de  $K_{cr}$ ,  $\omega_{cr}$  e  $S$  (saturação) da oscilação ciclo limite. Comparar estes valores com os obtidos analiticamente (Routh-Hurwitz e função descritiva) e com a simulação do modelo dinâmico.

#### 1 – Sistema aumentado

A figura 1 mostra o diagrama de blocos do sistema aumentado por um filtro  $D(s)$ . A saturação,  $N(A)$ , sempre presente em todos os sistemas físicos, é elemento central para entender o presente experimento. Ela limita o crescimento das oscilações, para operação com polos no SPD.

Apenas o bloco  $D(s)$  deverá ser projetado pelo aluno e montado *previamente* em *protoboard* pelos alunos. Os demais blocos modelam o kit impressora (LabCDin1). Note que  $K_m$ , para efeitos de projeto, engloba todos os ganhos de malha que não sejam devidos a  $K_{pot}$  e  $D(s)$  (e.g., Encoder, Ponte H, PWM1, PWM2, ADC, Divisor Resistivo etc.).

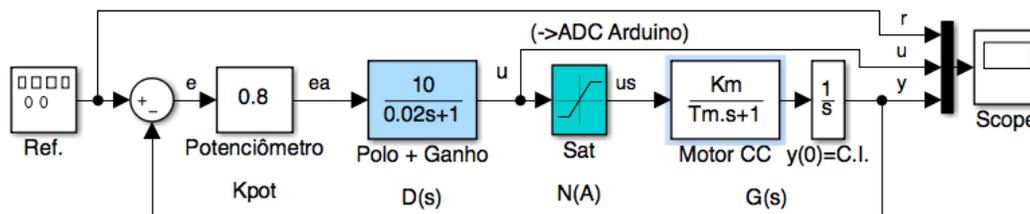


Figura 1 – Experimento para a obtenção do ganho crítico.

## 2 – Estabilidade, ganho efetivo e oscilação no ponto crítico.

Acrescentando-se ao kit impressora um 3º polo em  $s = -1/0,02$  a equação característica em malha fechada (EC) do sistema,  $1 + KD(s)G(s) = 0$ , passa a ter dois ramos do LGR que vão para o SPD, à medida que o ganho de malha,  $K$ , aumenta. Ver Fig. 2. Para o ganho crítico,  $K_{cr}$ , a EC terá polos complexos conjugados sobre o eixo  $j\omega$ . Nesta configuração o sistema é dito *criticamente* (ou marginalmente) *estável*, oscilando em  $\omega_{cr}$  rad/s. A amplitude da oscilação depende das condições iniciais.

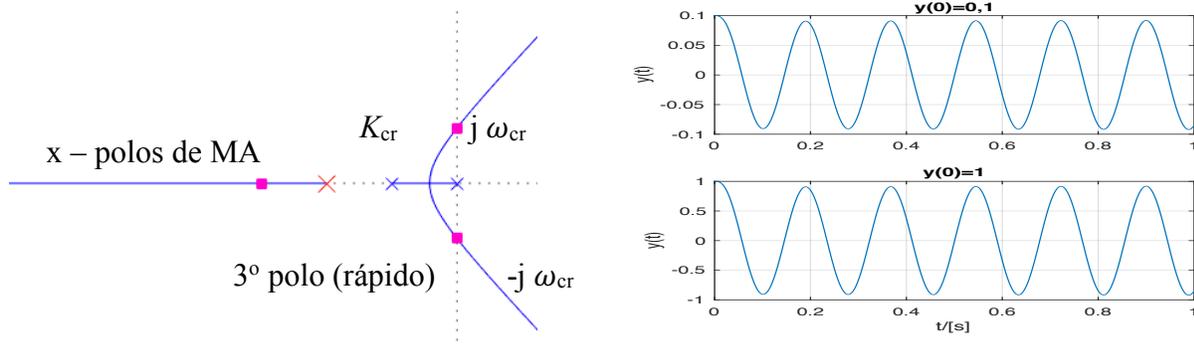


Figura 2 – LGR do kit impressora com o acréscimo de um terceiro polo. Para o ganho crítico  $K_{cr}$ , o sistema oscila com frequência  $\omega_c$ . No gráfico à direita oscilações mantidas para  $y(0)=0,1$  e  $y(0)=1,0$ .

Para  $K > K_{cr}$ , o sistema linear apresentaria oscilações com amplitudes crescentes. A saturação, no entanto, limita o crescimento da oscilação. O controlador calcula o sinal do atuador,  $u$ , em função do erro, cada vez maior, mas o sinal que chega ao processo é limitado em  $u_{sat}$ . Esta situação pode ser analisada considerando como o **Ganho Efetivo** é reduzido pela saturação, ver Fig. 4. Para sinais  $u < S$ , o ganho efetivo é igual a  $K$ . A partir da saturação (ilustrado com 3,5 na figura 4) quanto maior a amplitude de  $u$  menor o ganho efetivo (só chega  $u_s$  ao processo). A função descritiva (ou descritora, segundo alguns autores),  $N(A)$ , aproxima a não-linearidade e descreve a redução do ganho efetivo,  $K_{ef} = K * N(A)$ , assumindo-se  $u = A \sin(\omega t)$ .

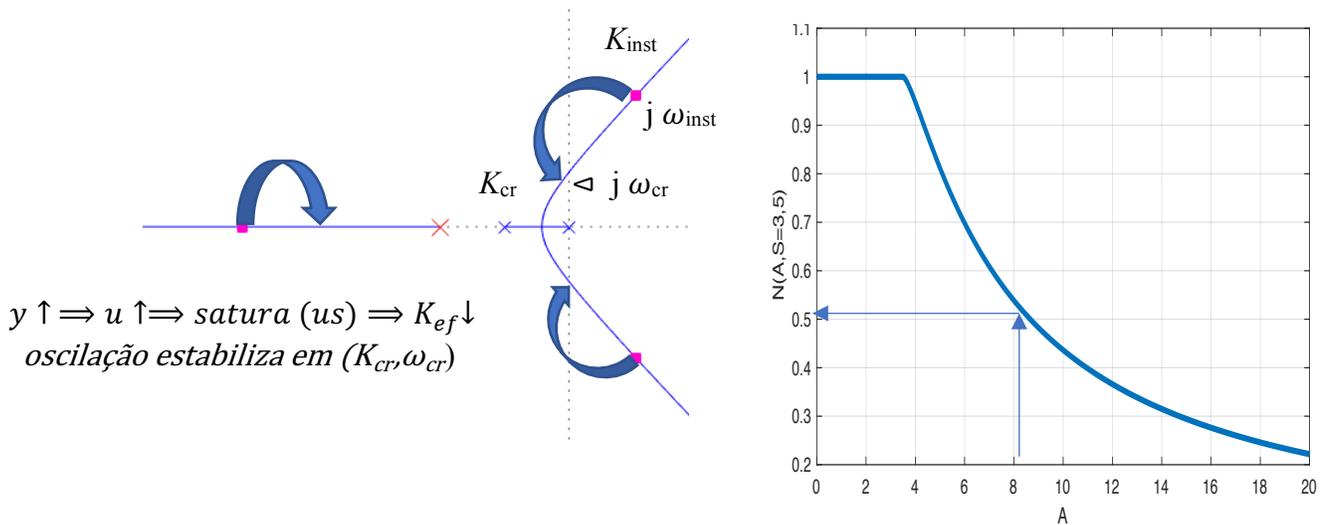


Figura 4 – Oscilação ciclo limite devido à saturação do atuador. Ganho efetivo é reduzido a partir da saturação ( $\pm S$ ). A função descritiva  $N(A,S)$ , de valor real, aproxima o comportamento da saturação.

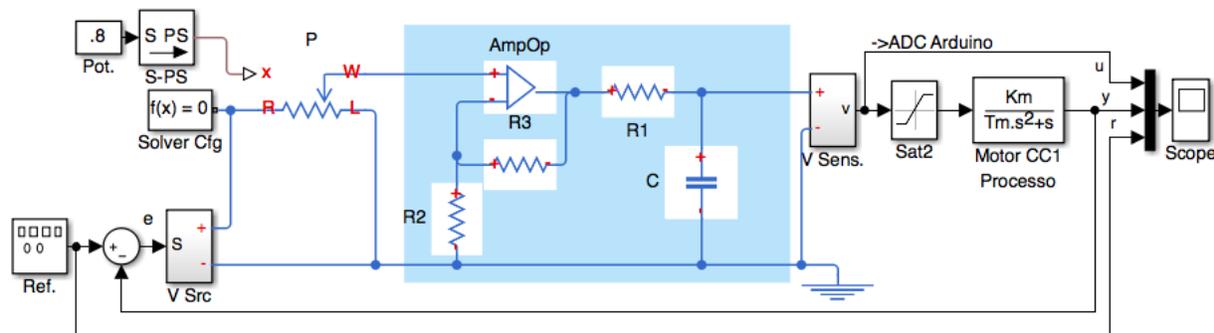


Figura 5 – Experimento para a obtenção do ganho crítico.

Na prática, se o ganho de malha posicionar polos no SPD e o carro estiver parado, a força de atrito poderá impedir o início das oscilações. O ruído, poderá, eventualmente, após algum tempo, iniciar as oscilações. Na simulação do sistema, pequenas condições iniciais ou mesmo o erro numérico desencadeia a oscilação em  $\omega_{cr}$ , figura 6. Assim, é conveniente adicionar um sinal de referência senoidal, para romper o atrito estático do kit impressora e favorecer a operação em ciclo limite.

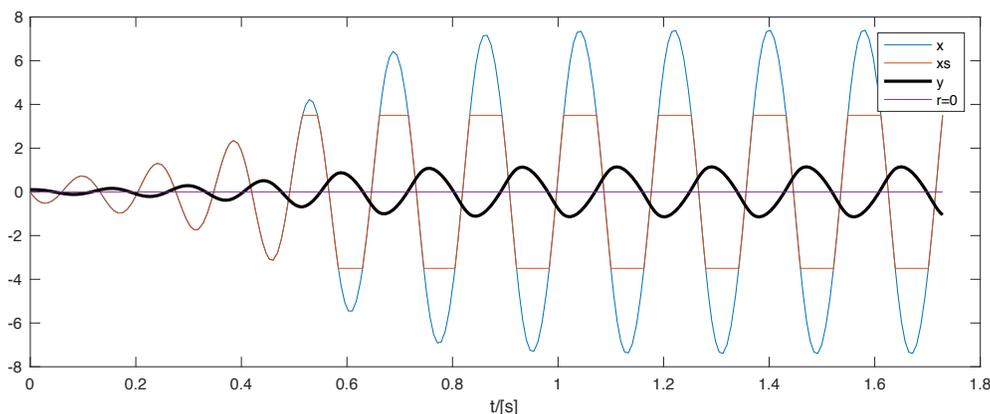


Figura 6 – Simulação do kit com  $K = 0,8$  (instável) e condição inicial  $y(0) \neq 0$ . Saturação limita o crescimento da oscilação e estabelece-se um ciclo limite.

### 3 – Análise da saturação pela função descritiva.

A análise de sistemas dinâmicos utilizando funções de transferência (domínio  $s$ ) não abrange não linearidades. Em alguns casos particulares, como na saturação, pode-se utilizar o método da função descritiva para calcular a saída “quase-linear” do processo, [1].

Um sinal senoidal saturado,  $x_s$  (“us” no kit), introduz (conforme análise por Fourier), vários harmônicos de alta frequência no sistema. Considerando que o motor é um sistema Passa-Baixas, resta, com boa aproximação, apenas a componente harmônica principal. Isto é,  $y$  é aproximadamente senoidal. Considere o seguinte modelo, Fig.7, em que  $x$  satura em  $\pm S$ .

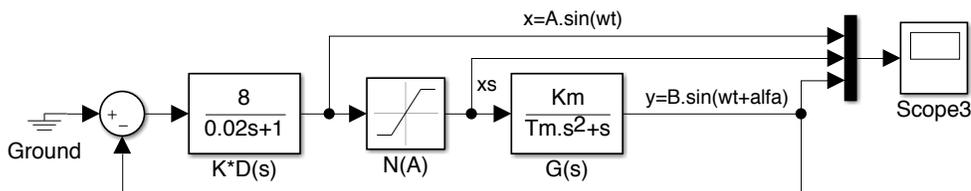


Figura 7 – Configuração do processo para obtenção do ciclo limite.

$$x(t) = A \text{sen}(\omega t)$$

$$y = G(j\omega)x_s \approx -K * D(j\omega)N(A)G(j\omega)y \Rightarrow K * D(j\omega)G(j\omega) = \frac{-1}{N(A)}$$

Onde  $N(A)$  é a função descritiva (real), que aproxima o elemento não linear e depende apenas da amplitude  $A$  e da saturação  $S$ . A 1ª harmônica oscila com frequência  $\omega_{cr}$  quando

$$K * D(j\omega_{cr})G(j\omega_{cr}) = -\frac{1}{N(A)}$$

A função descritiva para a saturação é<sup>1</sup>:

$$N(A) = \frac{A}{\pi} (2\phi_0 + \text{sen}2\phi_0); \quad A \geq S; \quad \phi_0 = \arcsen\left(\frac{S}{A}\right)$$

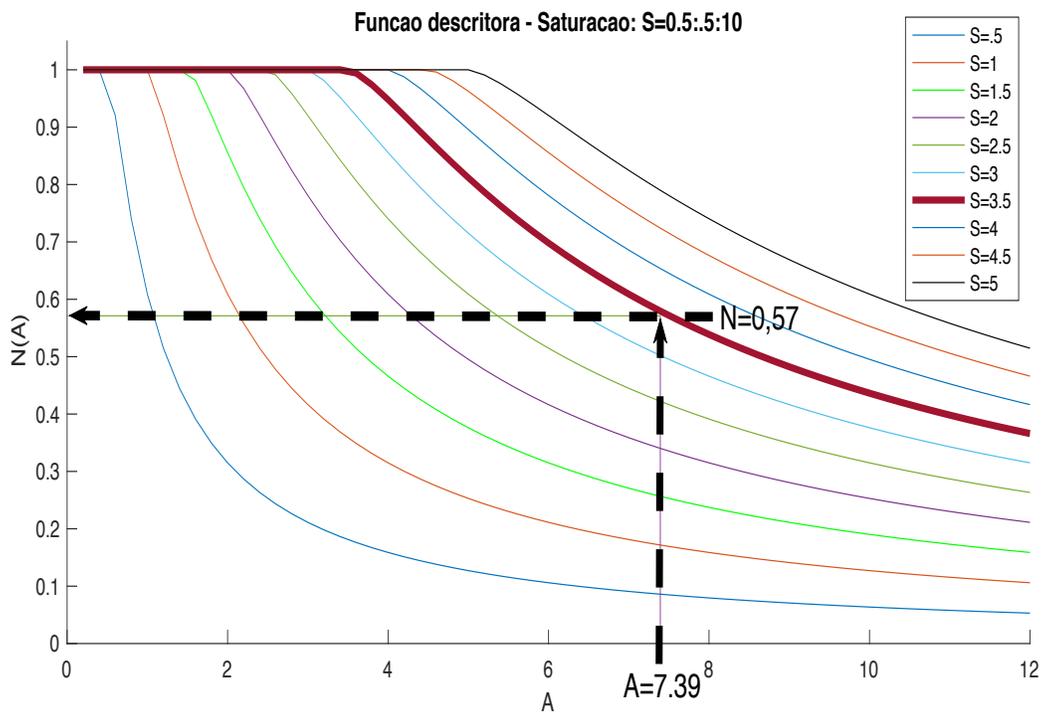


Figura 8 – Curvas da função descritiva  $N(A)$ , para diversos valores de  $S$ . Uso: a partir de  $A$  obtêm-se  $N(A)$ .

Assim, com a saturação do sistema,  $S$ , pode-se calcular a amplitude da oscilação,  $A$ . Além disso, a partir das amplitudes dos sinais  $x$  e  $y$  e do modelo do motor ( $K_m, T_m$ ) pode se obter  $S$ , a saturação do processo.

## 4 – Pré-relatório

- 4.1- Considerando o modelo do kit impressora obtido no LabCDin1, ( $K_m$ ,  $T_m$ ), e a adição do polo em  $s = -1/0,02$ , obtenha a equação característica de malha fechada em função de  $K_{pot}$ .
- 4.2- Utilizando o critério de Routh-Hurwitz, obtenha o ganho crítico e a frequência crítica.
- 4.3- Projete um circuito que implemente o polo adicional e ganho:  $D(s) = \frac{10}{0,02s+1}$ . Escolha valores dos resistores e capacitores adequados à prática do laboratório.
- 4.4- Simule o processo, Fig. 5, e compare os valores de  $\omega_{cr}$  e  $K_{cr}$  obtidos da simulação aos calculados em 4.2.

## 5 - Procedimento Experimental

- 5.1- Verifique inicialmente, o funcionamento do kit. Aplique, para tanto,  $r(t)=sen(2\pi 0,5t)$ .
- 5.2- Monte o circuito  $D(s)$  projetado. Com  $K \sim 0,3$ , verifique o seguimento da onda senoidal  $r(t)$ .
- 5.3- Aumente  $K$  para  $\sim 0,8$  ( $K > K_{cr}$ ), para que ciclos limites se sobreponham à resposta a  $r(t)$ .
- 5.4. Salve os sinais  $r$ ,  $x$  e  $y$  no formato .csv. Uma tela que mostra a transição, com o ciclo limite crescente em ( $K_{ef} = K_{cr}$ ,  $\omega_{cr}$ ) e outra tela em regime permanente (conforme ilustrado na Fig. 7).

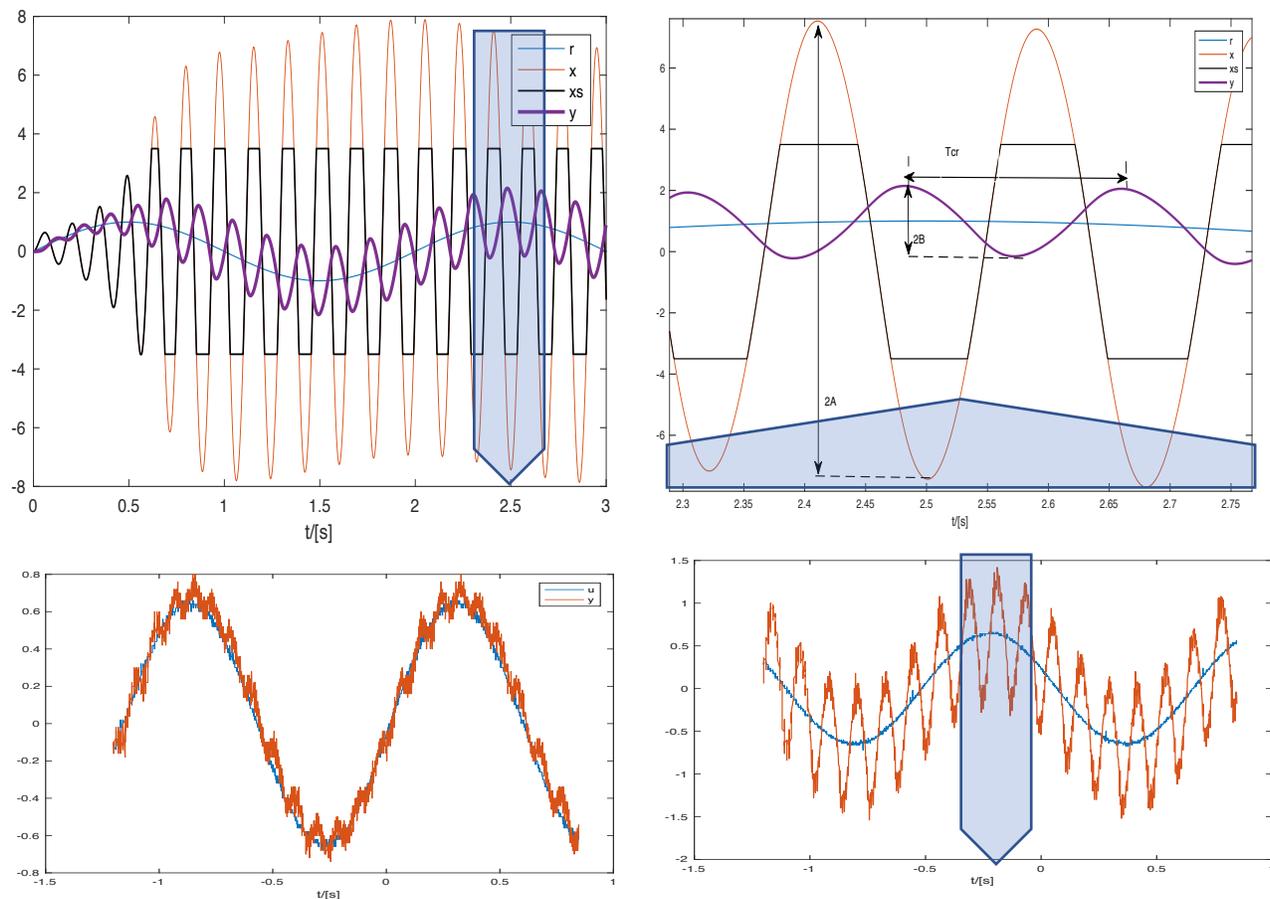


Figura 7 – Resultados típicos de simulação (acima) e experimento (abaixo). A saída do sistema segue inicialmente a  $r(t)$  depois, a região de operação instável sobrepõem um ciclo limite que estabiliza em  $\omega_{cr}$  rad/s.

## 6 - Relatório

Lembre-se de incluir:

- Gráficos dos sinais adquiridos pelo osciloscópio, adquiridos no formato .csv.
- Projeto e valores calculados (pré-relatório).

- 6.1- A partir da resposta obtida no laboratório, em ciclo limite, obtenha  $K_{cr}$  e  $w_{cr}$ .
- 6.2- Assumindo  $S = 3,5$  e o modelo nominal, qual a amplitude,  $A$ , esperada do ciclo limite.
- 6.3- Calcule, via função descritiva, o valor real da saturação,  $S_r$ , do sistema (ver anexo).
- 6.4- Simule o processo, agora com os componentes utilizados em laboratório, e  $S_r$ .  
Qual o valor de  $w'_{cr}$  obtido desta simulação?
- 6.5- Compare criticamente eventuais discrepâncias entre valores medidos, calculados e simulados.

Questões:

- a) No kit impressora, vários componentes saturam (e.g., Excursão do carro, Encoder, Ponte H, PWM, Conversor A/D do arduino, Fonte de alimentação, Motor etc.). Qual seria o mais crítico, associado a  $S_r$ ?
- b) A zona morta é outra não linearidade típica de sistemas físicos sujeitos a atrito seco, como é o caso do motor CC, que utiliza escovas. Se houver saturação  $S_r$  e uma Zona Morta de +/- 0,5 V, as oscilações ciclo limite acontecerão para  $K > K_{cr}$  (Exp2) ou para  $K < K_{cr}$  (Exp2)? Por quê?

### Referência:

[1] [http://control.lth.se/media/Education/EngineeringProgram/FRTN05/2014/lec06\\_2014eight.pdf](http://control.lth.se/media/Education/EngineeringProgram/FRTN05/2014/lec06_2014eight.pdf)

### - Anexo -

#### Exemplo de obtenção do valor da Saturação a partir da função descritiva.

Do gráfico  $\omega_{cr} = 34,9066$ ;  $A=7,393$ ;  $B=1,146$ ; obtenção de  $S$ , a saturação “real” do kit.

Solução:  $A = 7,393$  e  $S = 3,5 \Rightarrow N(A)=0,5797$ ;

$$K * D(\omega_{cr}) * N(A) * G(\omega_{cr}) = -1$$

$$s_0 = 34,91i; |K * D(\omega_{s_0})| = \left| \frac{8}{0,02 * s_0 + 1} \right|_{s_0} = 6.56; |G(\omega_{s_0})| = \left| \frac{Km}{Tm * s_0^2 + s_0} \right|_{s_0} = 0,2669;$$

$$|K * D| * |N| * |G| = 1 \Rightarrow N(A, S) = 0.5712;$$

Da interseção de  $A$  e  $N(A)$  sobre as curvas  $A \times N(A, S)$ , conforme Fig. 8, obtêm-se  $S \approx 3,5$ .