

Comunicações Digitais

Prof. André Noll Barreto
Prova 3 – 2013/1 (16/07/2013)

Aluno: _____

Matrícula: _____

Instruções

- A prova consiste de quatro questões discursivas
- A prova terá a duração de 2h
- A prova pode ser feita a lápis ou caneta
- Não é permitida consulta a notas de aula, todas as fórmulas necessárias serão dadas no final da prova.
- Toda resposta deverá está contida nas folhas da prova. Folhas adicionais devem conter o nome do aluno, mas o professor não se responsabiliza caso elas sejam perdidas. Folhas de rascunho não devem ser entregues.
- Calculadoras podem ser utilizadas, mas todas as contas e respostas devem ser justificadas

Questão	Nota
Q1	
Q2	
Q3	
Q4	
Total	

Comunicações Digitais

Prof. André Noll Barreto

Questão 1 (3 pontos)

Em um canal com múltiplos percursos e modulação BPSK, cuja resposta impulsional discreta equivalente em banda base é dada por:

$$y[k] = (x[k] - 0,3x[k-1] + 0,1x[k-2])10^{-2} + n[k]$$

a) Qual a saída do canal (sem ruído), caso a entrada seja 10100? (0,6 ponto)

b) Ache uma expressão aproximada para a probabilidade de erro de um sistema BPSK sem equalização neste canal. (0,6 ponto)

c) Qual a resposta na frequência de um filtro de equalização zero-forcing? (0,6 ponto)

d) Projete um filtro MMSE com 3 taps, supondo $E_s = E\{|x[k]|^2\}$ e $\frac{N_0}{2} = 5 \times 10^{-5} E_s$.

(0,6 ponto)

e) Desenhe a treliça de um equalizador MLSE (de Viterbi). (0,6 ponto)

a)

$$x[k] = +1; -1; +1; -1; -1$$

$$y[0] = x[0] \times 10^{-2} = 0,01$$

$$y[1] = (x[1] - 0,3x[0]) \times 10^{-2} = -0,013$$

$$y[2] = (x[2] - 0,3x[1] + 0,1x[0]) \times 10^{-2} = 0,014$$

$$y[3] = (x[3] - 0,3x[2] + 0,1x[1]) \times 10^{-2} = -0,014$$

$$y[4] = (x[4] - 0,3x[3] + 0,1x[2]) \times 10^{-2} = -0,006$$

b)

Sabendo que $x[k] = \pm 1$, o sinal recebido sem ruído pode ser $y[k] = 0,006x[k]; 0,008x[k]; 0,012x[k]$ ou $0,014x[k]$, todos com mesma probabilidade.

considerando $E_b = E\{|x[k]|^2\}$

$$P_b = \frac{1}{4} Q\left(\sqrt{\frac{2(0,006)^2 E_b}{N_0}}\right) + \frac{1}{4} Q\left(\sqrt{\frac{2(0,008)^2 E_b}{N_0}}\right) + \frac{1}{4} Q\left(\sqrt{\frac{2(0,012)^2 E_b}{N_0}}\right) + \frac{1}{4} Q\left(\sqrt{\frac{2(0,014)^2 E_b}{N_0}}\right)$$

que, para RSR alta

$$P_b \approx \frac{1}{4} Q\left(\sqrt{\frac{2(0,006)^2 E_b}{N_0}}\right)$$

c)

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = 10^{-2} (1 - 0,3z^{-1} + 0,1z^{-2})$$

$$F_{ZF}(z) = \frac{1}{H(z)} = \frac{100}{1 - 0,3z^{-1} + 0,1z^{-2}}$$

d)

$$R[0] = E\{|y[k]|^2\} = 10^{-4} (E\{|x[k]|^2\} + 0,09E\{|x[k-1]|^2\} + 0,01E\{|x[k-2]|^2\} + E\{|n[k]|^2\}) \\ = 10^{-4} (E_s + 0,09E_s + 0,01E_s) + N_0 = 2,1 \times 10^{-4} E_s$$

$$R[1] = E\{y[k+1]y^*[k]\} = 10^{-4} (-0,3E\{|x[k]|^2\} - 0,03E\{|x[k-2]|^2\}) = -0,33 \times 10^{-4} E_s$$

$$R[2] = E\{y[k+2]y^*[k]\} = 0,1 \times 10^{-4} E_s$$

e

Comunicações Digitais

Prof. André Noll Barreto

$$R[-k]=R[k]$$

Considerando por exemplo que não há atraso na equalização ($u=0$)

Temos que resolver o sistema

$$10^{-4} \begin{bmatrix} 2,1 & -0,33 & 0,1 \\ -0,33 & 2,1 & -0,33 \\ 0,1 & -0,33 & 2,1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f[0] \\ f[1] \\ f[2] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

e na saída teremos

$$d[k]=f[0]y[k]+f[1]y[k-1]+f[2]y[k-2]$$

e)

No início da treliça

$$y[0]=x[0]10^{-2}, \text{ e começando no estado } 0$$

$s[0]$	$x[0]$	$x[-1]$	$x[-2]$	$y[0]$	$s[1]$
0	-1	0	0	-0,010	0
	1			0,010	2

$$E \quad y[1]=(x[1]-0,3x[0])10^{-2},$$

$s[1]$	$x[1]$	$x[0]$	$x[-1]$	$y[1]$	$s[2]$
0	-1	-1	0	-0,007	0
	1			0,013	2
2	-1	1	0	-0,013	1
	1			0,007	3

A partir daí, a treliça pode ser construída a partir da tabela

$s[k]$	$x[k]$	$x[k-1]$	$x[k-2]$	$y[k]$	$s[k+1]$
0	-1	-1	-1	-0,008	0
	1			0,012	2
1	-1	-1	1	-0,006	0
	1			0,014	2
2	-1	1	-1	-0,014	1
	1			0,006	3
3	-1	1	1	-0,012	1
	1			0,008	3

Comunicações Digitais

Prof. André Noll Barreto

Questão 2 (3 pontos)

Um código de Hamming com distância mínima igual a 3 pode ser construído a partir de sua matriz de verificação de paridade, de modo que suas colunas contenham todas as combinações não nulas possíveis de $n-k$ bits. Dê a matriz geradora de um código de Hamming sistemático com $n = 15$. (0,6 ponto) Qual a sua taxa? (0,6 ponto) Quantos erros podem ser corrigidos e quantos detectados? (0,6 ponto) Qual seu ganho de codificação para BPSK e uma BER de 10^{-9} , com detecção *hard*? (0,6 ponto) Qual o ganho assintótico com detecção *soft*? (0,6 ponto)

Sabemos que a matriz \mathbf{H} tem $n = 15$ colunas. Sabemos também que podemos gerar $2^{n-k}-1$ combinações não nulas de $n-k$ bits. Como cada coluna é uma combinação diferente,
 $n = 2^{n-k} - 1 = 15 \Rightarrow n - k = 4$.

A sua matriz de verificação de paridade será

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = [\mathbf{P}^T \mathbf{I}_4],$$

e,

$$\mathbf{G} = [\mathbf{I}_k \mathbf{P}] = \mathbf{I}_{11} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Sua taxa é $R = \frac{k}{n} = \frac{11}{14}$

Este código pode detectar $d_{min} - 1 = 2$ erros e corrigir $t = \text{floor}\left(\frac{d_{min} - 1}{2}\right) = 1$ erro.

Sem codificação, precisamos de $Q\left(\sqrt{2\frac{E_b}{N_0}}\right) = 10^{-9} \Rightarrow \sqrt{2\frac{E_b}{N_0}} = 6 \Rightarrow \frac{E_b}{N_0} = 18 = 12,55 \text{ dB}$

Com codificação e decodificação *hard*,

$$\binom{n-1}{t} (p_c)^{t+1} = 14 p_c^2 = 10^{-9} \Rightarrow p_c = 8,45 \times 10^{-6}$$

$$Q\left(\sqrt{2\frac{11}{15}\frac{E_b}{N_0}}\right) = 8,45 \times 10^{-6} \Rightarrow \sqrt{\frac{22}{15}\frac{E_b}{N_0}} = 4,4 \Rightarrow \frac{E_b}{N_0} = 13,2 = 11,2 \text{ dB}$$

Temos portanto um ganho de $12,55 - 11,2 = 1,35 \text{ dB}$

Com detecção *soft* o ganho assintótico é dado pelo argumento da função Q , ou seja, o ganho é $d_{min} R = 33/15 = 3,42 \text{ dB}$.

Comunicações Digitais

Prof. André Noll Barreto

Questão 3 (2 pontos)

Um sistema OFDM é empregado em um ambiente celular, com atraso máximo de percurso igual a $5\mu\text{s}$. O sistema é amostrado a uma taxa de 10MHz e emprega um código corretor de erros de taxa igual a $R = 2/3$ com modulação 16-QAM. Supondo que apenas 90% das subportadoras são empregadas para a transmissão de dados e que o prefixo cíclico tem o tamanho mínimo para combater a dispersão temporal do canal, qual a taxa de transmissão obtida com $N = 1024$ e $N = 256$ subportadoras?

$$T_a = \frac{1}{f_a} = 0,1\mu\text{s}$$

Considerando $T_G = \tau_{\text{max}} = 5\mu\text{s}$

com $N = 1024$,

$$T_s = T_a N = 102,4\mu\text{s}$$

$$T = T_s + T_G = 107,4\mu\text{s}$$

e sendo utilizadas $N_d = 0,9 N \approx 921$ subportadoras

$$R_b = \frac{N_d R \log_2 M}{T} = \frac{921 * 2/3 * 4}{107,4} \mu\text{s} = 22,868 \text{ Mbps}$$

já com $N = 256$

$$T_s = T_a N = 25,6\mu\text{s}$$

$$T = T_s + T_G = 30,6\mu\text{s}$$

e sendo utilizadas $N_d = 0,9 N \approx 230$ subportadoras

$$R_b = \frac{N_d R \log_2 M}{T} = \frac{230 * 2/3 * 4}{30,6} \mu\text{s} = 20,044 \text{ Mbps}$$

Comunicações Digitais

Prof. André Noll Barreto

Questão 4 (2 pontos)

Sabendo que $x^6+1=(x+1)(x^2+x+1)(x^3+1)$ defina o polinômio gerador de um código cíclico de taxa 2/3. (0,7 ponto) Qual a palavra código correspondente a uma entrada [0101]? (0,6 ponto) Qual a sua matriz geradora? (0,7 ponto)

Sabendo que $n = 6$ Queremos um código (6,4). Portanto, o polinômio gerador deverá ter grau $n-k = 2$. Com a fatoração acima, sabemos que o único polinômio de grau 2 que divide x^6+1 é $x^2+x+1=g(x)$.

A entrada 0101 pode ser representada na forma polinomial como $m(x)=x+x^3$, e, portanto $c(x)=m(x)g(x)=x^5+x^4+x^2+x$, e,

$$\mathbf{c} = [011011].$$

Lembrando que

$c(x)=m_0g(x)+m_1xg(x)+m_2x^2g(x)+m_3x^3g(x)$ e que $xg(x)$ corresponde a um deslocamento para a direita, sua matriz geradora é dada por

$$G = \begin{bmatrix} g_0 & g_1 & g_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & g_0 & g_1 & g_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & g_0 & g_1 & g_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & g_0 & g_1 & g_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Comunicações Digitais

Prof. André Noll Barreto

Fórmulas Úteis

Equalização TSE

$$F_{ZF}(z) = \frac{1}{H(z)} \quad F_{MMSE}(z) = \frac{H^*(z)}{|H(z)|^2 + \frac{S_x(z)}{S_n(z)}}$$

MMSE:

$$\begin{bmatrix} R_y[0] & R_y[-1] & \dots & R_y[-M] \\ R_y[1] & R_y[0] & \dots & R_y[1-M] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ R_y[M] & R_y[M-1] & \dots & R_y[0] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f[0] \\ f[1] \\ \vdots \\ f[M] \end{bmatrix} = E_s \begin{bmatrix} h^*[u] \\ h^*[u-1] \\ \vdots \\ h^*[0] \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$R_y[m] = E\{y[n+m]y^*[n]\},$$

Equalização FSE

$$\text{ZF: } \sum_{i=1}^m F_i(z)H_i(z) = z^{-u}$$

MMSE:

$$\sum_{i=1}^m \sum_{k=0}^M f_i E\{y_i[n-k]y_j^*[n-l]\} = E\{x_{n-u}y_j^*[n-l]\}, \quad l=0,1,\dots,M; \quad j=1,2,\dots,m$$

Equalização MLSE

queremos obter a sequência $x[i]$ que minimiza $\sum_i \left| y[i] - \sum_k h[k]x_{i-k} \right|^2$

DFT/IDFT

$$H_k = \sum_{n=0}^{N-1} h_n e^{-j2\pi \frac{nk}{N}} \quad h_n = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} H_k e^{j2\pi \frac{nk}{N}}$$

Probabilidade de erro de códigos de bloco com detecção *hard*

$$p_{ec} \approx \binom{n-1}{t} (p_c)^{t+1},$$

em que, para BPSK

$$p_c = Q\left(\sqrt{\frac{2RE_b}{N_0}}\right)$$

Comunicações Digitais

Prof. André Noll Barreto

Função Q

x	Q(x)	x	Q(x)
0,1	4,60E-001	3,1	9,68E-004
0,2	4,21E-001	3,2	6,87E-004
0,3	3,82E-001	3,3	4,83E-004
0,4	3,45E-001	3,4	3,37E-004
0,5	3,09E-001	3,5	2,33E-004
0,6	2,74E-001	3,6	1,59E-004
0,7	2,42E-001	3,7	1,08E-004
0,8	2,12E-001	3,8	7,23E-005
0,9	1,84E-001	3,9	4,81E-005
1,0	1,59E-001	4,0	3,17E-005
1,1	1,36E-001	4,1	2,07E-005
1,2	1,15E-001	4,2	1,33E-005
1,3	9,68E-002	4,3	8,54E-006
1,4	8,08E-002	4,4	5,41E-006
1,5	6,68E-002	4,5	3,40E-006
1,6	5,48E-002	4,6	2,11E-006
1,7	4,46E-002	4,7	1,30E-006
1,8	3,59E-002	4,8	7,93E-007
1,9	2,87E-002	4,9	4,79E-007
2,0	2,28E-002	5,0	2,87E-007
2,1	1,79E-002	5,1	1,70E-007
2,2	1,39E-002	5,2	9,96E-008
2,3	1,07E-002	5,3	5,79E-008
2,4	8,20E-003	5,4	3,33E-008
2,5	6,21E-003	5,5	1,90E-008
2,6	4,66E-003	5,6	1,07E-008
2,7	3,47E-003	5,7	5,99E-009
2,8	2,56E-003	5,8	3,32E-009
2,9	1,87E-003	5,9	1,82E-009
3,0	1,35E-003	6,0	9,87E-010