

Comunicações Digitais

Prof. André Noll Barreto

Prova 4 – 2016/1 (06/06/2016)

Aluno: _____

Matrícula: _____

Instruções

- A prova consiste de 3 (três) questões discursivas.
- A prova terá a duração de 2h
- A prova pode ser feita a lápis ou caneta
- Pode ser consultado qualquer material impresso ou escrito.
- Calculadoras podem ser utilizadas, mas todas as contas e respostas devem ser justificadas

Indicar aqui as questões resolvidas:

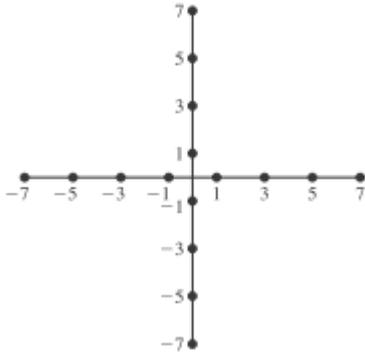
Questão	Nota
Total	

Comunicações Digitais

Prof. André Noll Barreto

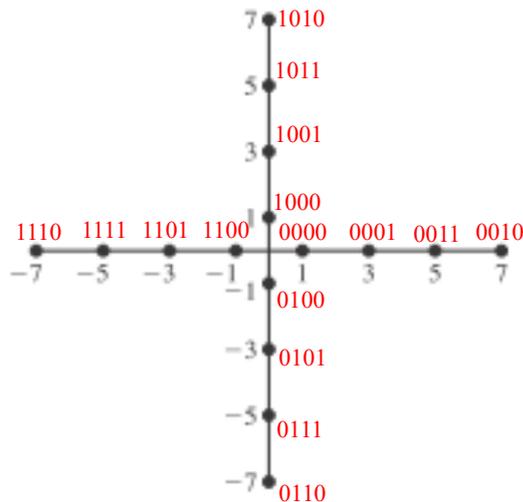
Questão 1 (3,3 pontos)

Dada a seguinte constelação de um sinal 16-QAM

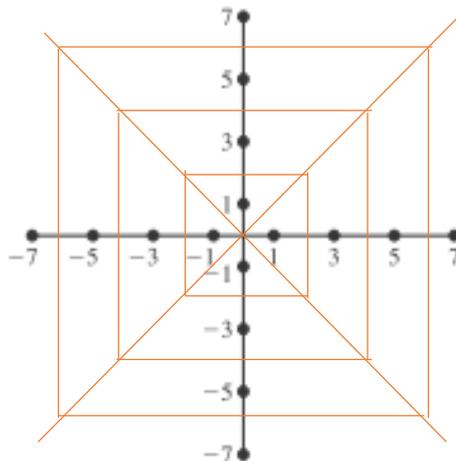


- a) Ache uma codificação de Gray adequada (1,1 ponto)

Como temos 16 pontos na constelação, temos 4 bits. Existem inúmeras combinações possíveis que satisfazem o critério de código de Gray. O importante é que entre símbolos vizinhos só tenha um bit trocado, como por exemplo (cada quadrante é representado pelos 2 primeiros bits, e a amplitude pelos 2 últimos)



- b) Desenhe as regiões de decisão para cada possível sinal. (1,1 ponto)



Comunicações Digitais

Prof. André Noll Barreto

- c) Qual a probabilidade de erro deste esquema de modulação? Ele é melhor ou pior que o 16-QAM quadrado tradicional? Qual a diferença em dB entre os dois esquemas para uma RSR alta? (1,1 ponto)

A energia média é dada por

$$E_s = \frac{4}{16} (1^2 + 3^2 + 5^2 + 7^2) A^2 = 21A^2 \Rightarrow A^2 = \frac{E_s}{21}$$

Para os quatro pontos do meio a distância mínima é

$$d_{min} = \sqrt{2}A$$

com 2 vizinhos cada, e na média $\bar{N}_{d=d_{min}} = \frac{2 \times 4}{16} = \frac{1}{2}$

Todos os outros pontos têm também vizinhos com distância

$$d_2 = 2A,$$

8 com um vizinho e 8 com dois vizinhos, portanto com 1,5 vizinhos em média.

Lembrando que a probabilidade de erro é

$$P_e = \bar{N}_{min} Q \left(\sqrt{\frac{d_{min}^2}{2N_0}} \right)$$

e temos que

$$P_e = \frac{1}{2} Q \left(\sqrt{\frac{A^2}{N_0}} \right) + \frac{3}{2} Q \left(\sqrt{\frac{2A^2}{N_0}} \right) = \frac{1}{2} Q \left(\sqrt{\frac{E_s}{21N_0}} \right) + \frac{3}{2} Q \left(\sqrt{\frac{2E_s}{21N_0}} \right)$$

Para RSR alta, o erro é dominado pela menor distância, e

$$P_e = \frac{1}{2} Q \left(\sqrt{\frac{4E_b}{21N_0}} \right)$$

Para o 16-QAM quadrado tradicional, a RSR é

$$P_e = 3Q \left(\sqrt{\frac{4E_b}{5N_0}} \right)$$

que é melhor que o do exercício, por um fator de $\frac{21}{5} = 6,2\text{dB}$

Comunicações Digitais

Prof. André Noll Barreto

Questão 2 (3,4 pontos)

Considere o espaço de sinais definido pela base ortonormal

$$\varphi_1(t) = \text{rect}\left(\frac{t}{T_s}\right)$$

$$\varphi_2 = \text{rect}\left(\frac{t}{T_s}\right) \text{sign}\left(\sin\left(\frac{2\pi t}{T_s}\right)\right)$$

$$\varphi_3 = \text{rect}\left(\frac{t}{T_s}\right) \text{sign}\left(\cos\left(\frac{4\pi t}{T_s}\right)\right)$$

Considere o seguinte mapeamento de símbolos:

$$00 \rightarrow \mathbf{s}_1 = (A, 0, 0)$$

$$01 \rightarrow \mathbf{s}_2 = (0, A, 0)$$

$$10 \rightarrow \mathbf{s}_3 = (0, 0, A)$$

$$11 \rightarrow \mathbf{s}_4 = (B, B, B)$$

- a) Quais os valores de A e B em relação à E_s , de modo que todos os símbolos tenham a mesma energia? (0,8 ponto)

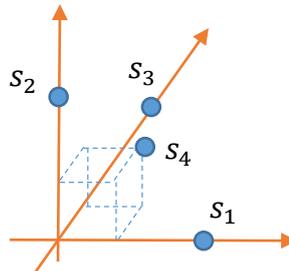
$$E_s = E_1 = E_2 = E_3 = A^2$$

$$E_4 = 3B^2 = A^2 \Rightarrow B^2 = \frac{A^2}{3}$$

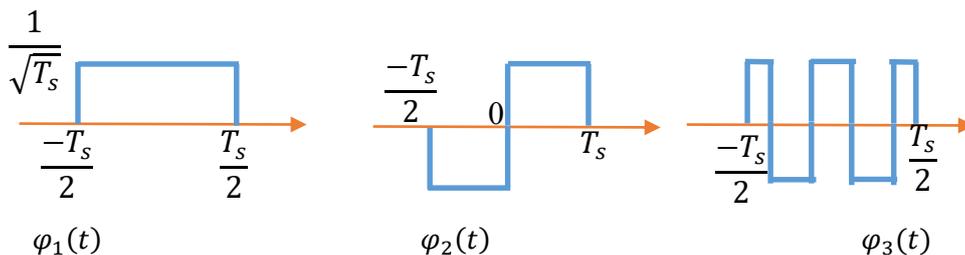
e, portanto.

$$A = \sqrt{E_s}, \quad B = \sqrt{\frac{E_s}{3}}$$

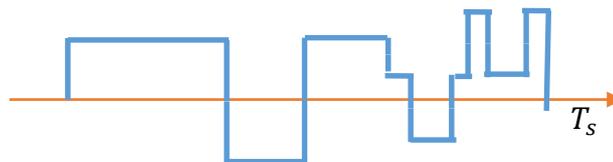
- b) Esboce sua constelação. (0,8 ponto)



- c) Esboce o sinal transmitido para a sequência 010011 (0,8 ponto)



Para a sequência 010011 teremos $s(t) = s_2(t) + s_1(t - T_s) + s_4(t - 2T_s)$



Comunicações Digitais

Prof. André Noll Barreto

- d) Qual a probabilidade de erro aproximada deste sistema, para RSR altas (em função de E_b/N_0) ? (1 ponto)

O quadrado da distância entre s_1, s_2, s_3 é $2A^2 = 2E_s$.

O quadrado da distância entre s_4 e qualquer outro ponto é $2B^2 + (A - B)^2 =$

$2E_s \left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \approx 0,845E_s \leq 2E_s$.

Portanto, para RSR altas, o erro é dominado por este componente

$$P_e \approx \frac{6}{4} Q \left(\sqrt{\frac{E_s}{N_0} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)} \right)$$

Comunicações Digitais

Prof. André Noll Barreto

Questão 3 (3,3 pontos)

Um engenheiro tem a opção de três esquemas de modulação diferentes ao projetar um sistema

- BPSK com demodulação coerente (0,7)
- DPSK com demodulação não coerente (0,7)
- QPSK com demodulação coerente (0,6)
- BFSK com demodulação não coerente (0,7)
- 4-FSK com demodulação coerente (0,6)

Em todas as opções temos uma potência de transmissão de 1W, uma perda de percurso de 100dB um ruído branco com densidade espectral de potência de -150dBm/Hz. Desejamos uma probabilidade de erro de 10^{-5} , e, sabendo que para uma detecção coerente precisamos reservar 20% dos símbolos com um sinal de referência, qual a taxa de bits efetiva que podemos atingir em cada um dos esquemas? Qual a banda ocupada em cada caso (considere um fator de roll-off igual a 0,3)

$$P_{rx} = -100\text{dBW} = 10^{-10}\text{W}$$

$$\frac{N_0}{2} = 10^{-15}\text{mW/Hz} \Rightarrow N_0 = 2 \times 10^{-18}\text{W/Hz}$$

a) BPSK

$$Q\left(\sqrt{\frac{2E_b}{N_0}}\right) = 10^{-5} \Rightarrow \sqrt{\frac{2E_b}{N_0}} = 4,3 \Rightarrow \frac{E_b}{N_0} = 9,245$$

$$R_b = \frac{P_{rx}}{E_b} = \frac{10^{-10}}{9,245 \times 2 \times 10^{-18}} = 5,408 \text{ Mbps}$$

e a taxa efetiva, por ser coerente, é $R_{eff} = 0,8 R_b = 4,327 \text{ Mbps}$

A banda ocupada é

$$B_T = R_s(1 + \rho) = R_b(1 + \rho) = 7,03 \text{ MHz}$$

b) DPSK, não coerente

$$\frac{1}{2} e^{-\frac{E_b}{N_0}} = 10^{-5} \Rightarrow \frac{E_b}{N_0} = -\ln(2 \times 10^{-5}) = 10,8198$$

$$R_b = \frac{P_{rx}}{E_b} = \frac{10^{-10}}{10,8198 \times 2 \times 10^{-18}} = 4,621 \text{ Mbps}$$

e a taxa efetiva, por ser não coerente, é $R_{eff} = R_b = 4,621 \text{ Mbps}$

A banda ocupada é também

$$B_T = R_s(1 + \rho) = R_b(1 + \rho) = 6,007 \text{ MHz}$$

c) QPSK, a prob. de erro é igual ao BPSK, e, portanto, a taxa efetiva é $R_{eff} = 4,327 \text{ Mbps}$
A banda ocupada é, porém,

$$B_T = R_s(1 + \rho) = \frac{R_b}{2}(1 + \rho) = 3,515 \text{ MHz}$$

Comunicações Digitais

Prof. André Noll Barreto

d) BFSK, não coerente

$$\frac{1}{2} e^{-\frac{E_b}{2N_0}} = 10^{-5} \Rightarrow \frac{E_b}{N_0} = -2 \ln(2 \times 10^{-5}) = 21,640$$

$$R_b = \frac{P_{rx}}{E_b} = \frac{10^{-10}}{21,640 \times 2 \times 10^{-18}} = 2,310 \text{ Mbps}$$

e a taxa efetiva, por ser não coerente, é $R_{eff} = R_b = 2,310 \text{ Mbps}$

Supondo FSK ortogonal $\Delta f = \frac{R_s}{2} = \frac{R_b}{2} = 1,155 \text{ MHz}$.

A banda ocupada é aproximadamente

$$B_T \approx \Delta f + R_s(1 + \rho) = 4,159 \text{ MHz}$$

e) 4-FSK, coerente

$$3Q \left(\sqrt{\frac{2E_b}{N_0}} \right) = 10^{-5} \Rightarrow Q \left(\sqrt{\frac{2E_b}{N_0}} \right) = \frac{1}{3} 10^{-5} \Rightarrow \sqrt{\frac{2E_b}{N_0}} = 4,6 \Rightarrow \frac{E_b}{N_0} = 10,58$$

$$R_b = \frac{P_{rx}}{E_b} = \frac{10^{-10}}{10,58 \times 2 \times 10^{-18}} = 4,726 \text{ Mbps}$$

e a taxa efetiva, por ser coerente, é $R_{eff} = 0,8 R_b = 3,781 \text{ Mbps}$

Supondo FSK ortogonal $\Delta f = \frac{R_s}{2} = \frac{R_b}{4} = 1,1815 \text{ MHz}$.

A banda ocupada é aproximadamente

$$B_T \approx 3\Delta f + R_s(1 + \rho) = 6,616 \text{ MHz}$$

Comunicações Digitais

Prof. André Noll Barreto

Função Q

x	Q(x)	X	Q(x)
0,1	4,60E-001	3,1	9,68E-004
0,2	4,21E-001	3,2	6,87E-004
0,3	3,82E-001	3,3	4,83E-004
0,4	3,45E-001	3,4	3,37E-004
0,5	3,09E-001	3,5	2,33E-004
0,6	2,74E-001	3,6	1,59E-004
0,7	2,42E-001	3,7	1,08E-004
0,8	2,12E-001	3,8	7,23E-005
0,9	1,84E-001	3,9	4,81E-005
1,0	1,59E-001	4,0	3,17E-005
1,1	1,36E-001	4,1	2,07E-005
1,2	1,15E-001	4,2	1,33E-005
1,3	9,68E-002	4,3	8,54E-006
1,4	8,08E-002	4,4	5,41E-006
1,5	6,68E-002	4,5	3,40E-006
1,6	5,48E-002	4,6	2,11E-006
1,7	4,46E-002	4,7	1,30E-006
1,8	3,59E-002	4,8	7,93E-007
1,9	2,87E-002	4,9	4,79E-007
2,0	2,28E-002	5,0	2,87E-007
2,1	1,79E-002	5,1	1,70E-007
2,2	1,39E-002	5,2	9,96E-008
2,3	1,07E-002	5,3	5,79E-008
2,4	8,20E-003	5,4	3,33E-008
2,5	6,21E-003	5,5	1,90E-008
2,6	4,66E-003	5,6	1,07E-008
2,7	3,47E-003	5,7	5,99E-009
2,8	2,56E-003	5,8	3,32E-009
2,9	1,87E-003	5,9	1,82E-009
3,0	1,35E-003	6,0	9,87E-010