

# 327069 – Controle via LMIs

## Controle de Sistemas Dinâmicos via Desigualdades Matriciais Lineares

Prof. Eduardo Stockler Tognetti

Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Sistemas Eletrônicos e de  
Automação (PGEA)  
Universidade de Brasília

1º Semestre 2018

# Tópicos

- 1 Plano de Ensino
- 2 Motivação
- 3 Introdução

# Plano de Ensino

## Objetivo

Apresentar técnicas de análise e de controle de sistemas lineares por meio da teoria de Lyapunov e desigualdades matriciais lineares (LMIs).

## Metodologia de Ensino

- Aulas teóricas expositivas fazendo uso do quadro negro e de recursos didáticos audiovisuais.
- Listas de exercícios e projetos computacionais sobre os temas abordados em sala.
- Pré-Requisitos (desejáveis): Conceitos básicos de sistemas lineares e teoria de controle; Álgebra de Matrizes; Matlab.
- Sempre que possível, material relacionado ao curso será disponibilizado na internet, na página pessoal do professor (<http://www.ene.unb.br/estognetti>) ou no Moodle.

# Plano de Ensino

## Problema geral

Dado um sistema linear e um conjunto de especificações verificar a estabilidade (análise) e encontrar um controlador ou filtro adequado (síntese) por meio de técnicas baseadas em otimização (LMIs).

## Ementa

Introdução geral: definições, normas, matrizes, complemento de Schur; desigualdades matriciais lineares: definições, resoluções, pacotes computacionais; estabilidade de sistemas contínuos e discretos no tempo: condição de Lyapunov, condições equivalentes; sistemas com incertezas: definições, tipos e estruturas de incertezas; condições de estabilidade robusta para sistemas incertos: estabilidade quadrática, estabilidade baseada em funções de Lyapunov dependentes de parâmetros; LMIs dependentes de parâmetros; cômputo de custo garantido  $H_2$  e  $H_\infty$ , controle e filtragem dependente de parâmetros, sistemas com parâmetros, sistemas com parâmetros variantes no tempo.

# Plano de Ensino

## Programa da disciplina

- 1 Conceitos básicos
- 2 Manipulações algébricas de matrizes, estabilidade e LMIs
- 3 Condições LMIs para norma H-infinito
- 4 Condições LMIs para norma H-2
- 5 Incertezas, estabilidade robusta e custo garantido
- 6 Relaxações LMIs
- 7 Estabilidade de sistemas lineares variantes no tempo
- 8 Realimentação de estado
- 9 Observadores e filtro
- 10 Realimentação de saída
- 11 Controlador dinâmico
- 12 Tópicos adicionais

# Plano de Ensino

## Critérios de Avaliação

- A avaliação será realizada com base em provas escritas, listas de exercícios e projeto final.
- A média final será calculada da seguinte forma

$$MF = 0,45 \times MP + 0,3 \times TF + 0,25 \times ML$$

MF: média aritmética das provas; TF: trabalho final; ML: média aritmética das listas

Atividade	Descrição	Nota Max.	Data
<i>P1</i>	prova teórica	10,0	07/05/2018
<i>P2</i>	prova teórica	10,0	13/06/2018
<i>TF</i>	trabalho final	10,0	25/06/2018
L	listas de exercícios e implementações computacionais	10,0	ao longo do semestre

- Caso  $\{MP, TF\} < 2,0$  ou  $ML < 3,0$ , então  $MF = \min\{MP, TF, ML\}$ .
- Avaliação de reposição: somente por motivo de saúde (com atestado).

# Plano de Ensino

## Bibliografia Básica

- Guang-Ren Duan, Hai-Hua Yu. LMIs in Control Systems: Analysis, Design and Applications. CRC Press, 1a edition, 2013.
- S. Boyd, L. El Ghaoui, E. Feron, and V. Balakrishnan. Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory. SIAM Studies in Applied Mathematics, Philadelphia, PA, 1994.  
<http://www.stanford.edu/~boyd/lmibook/>
- Notas de aula da disciplina “IA892 – Análise e Controle de Sistemas Lineares por Desigualdades Matriciais Lineares (LMIs)” dos professores Ricardo C. L. F. Oliveira e Pedro L. D. Peres da Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação (FEEC) da Universidade Estadual de Campinas (Unicamp) oferecida no 2º sem. de 2013.  
[http://www.dt.fee.unicamp.br/~ricfow/IA892/ia892\\_2s2013.htm](http://www.dt.fee.unicamp.br/~ricfow/IA892/ia892_2s2013.htm)

# Plano de Ensino

## Bibliografia Complementar

- C. T. Chen. Linear System Theory and Design. Oxford University Press, 3rd edition, 1999.
- L. El Ghaoui and S. I. Niculescu, editors. Advances in Linear Matrix Inequality Methods in Control. Advances in Design and Control. SIAM, Philadelphia, PA, 2000.
- C. D. Meyer. Matrix Analysis and Applied Linear Algebra. SIAM, Philadelphia, PA, 2001.
- P. Gahinet, A. Nemirovski, A. J. Laub, and M. Chilali. LMI Control Toolbox User's Guide. The Math Works Inc., Natick, MA, 1995.
- J. Löfberg. YALMIP: A toolbox for modeling and optimization in MATLAB. In Proceedings of the 2004 IEEE International Symposium on Computer Aided Control Systems Design, pages 284-289, Taipei, Taiwan, September 2004. <http://users.isy.liu.se/johanl/yalmip/>.



# Plano de Ensino

## Bibliografia Complementar

- C. Scherer, S. Weiland. LMIs in Control, Lecture Notes at Delft University of Technology and Eindhoven University of Technology, 2005.
- J. G. VanAntwerp and R. D. Braatz. A tutorial on linear and bilinear matrix inequalities. *Journal of Process Control*, 10(4):363–385, August 2000.
- K. Zhou and J. C. Doyle. *Essentials of Robust Control*. Prentice Hall, New York, 1998.
- G. E. Dullerud and F. Paganini. *A Course in Robust Control Theory: A Convex Approach*. Springer, 2000.
- Carsten Scherer. *Theory of Robust Control*. Ed. TU Delft, 2006.
- Stephen Boyd and Craig Barratt. *Linear Controller Design: Limits of Performance*. Prentice-Hall, 1991.
- Notas de aula da disciplina “Fundamentos do Controle Robusto via Otimização” do professor Reinaldo Martinez Palhares do Departamento de Engenharia Eletrônica da Universidade Federal de Minas Gerais (UFMG). <http://www.cpdee.ufmg.br/~palhares/fundamentosrobusto.html>
- Artigos recentes em periódicos especializados.

# Plano de Ensino

## Pré-Requisitos (Desejáveis)

- Álgebra linear (álgebra de matrizes)
- Noções de controle e sistemas lineares
- Uso de Matlab

## Recomendações

- Fazer as listas de exercícios individualmente (os exercícios da prova serão retirados das listas ou de manipulações feitas em sala de aula)
- Ficar em dia com as implementações computacionais (simulações)
- Definir cedo o tema do trabalho final

# Motivação

## Métodos baseados em otimização

- Computacionalmente eficientes
- Caracteriza os limites de desempenho do sistema
- Flexibilidade para tratar diversos casos: incertos, variantes no tempo etc

# Motivação

## Especificações de desempenho

- acompanhamento de sinais de referência
- atenuação de perturbações externas (distúrbios)
- rejeição do erro de medida

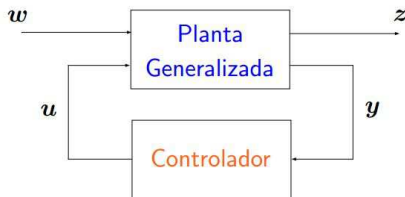
## Especificações de robustez

- garantir um nível de desempenho frente a variações no sistema ou diferenças em relação ao seu modelo
- insensibilidade a variações da planta

## Especificações de controlador

- Linear, não-linear, invariante no tempo, gain-scheduling, ...
- centralizado, descentralizado, ordem reduzida

# Representação do sistema de controle



## Sinais

- $w$  – entradas exógenas
- $u$  – entradas controladas
- $y$  – saídas medidas
- $z$  – saídas reguladas

## Comentários

Especificação formuladas em termos de  $w$  e  $z \Rightarrow$  função de transferência de malha fechada

# Representação do sistema de controle

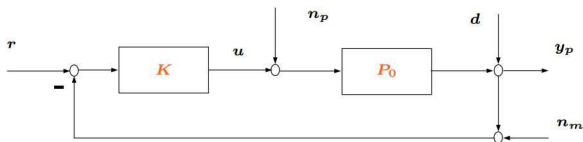


Figura: Exemplo representação de planta com 1 grau de liberdade.

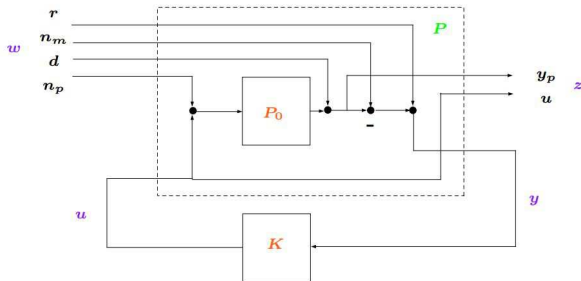


Figura: Representação na forma padrão.

# Representação do sistema de controle

## Planta generalizada

Matriz de função de transferência

$$P(s) = \begin{bmatrix} P_{zw}(s) & P_{zu}(s) \\ P_{yw}(s) & P_{yu}(s) \end{bmatrix}$$

sendo

$$z = P_{zw}(s)w + P_{zu}(s)u$$

$$y = P_{yw}(s)w + P_{yu}(s)u$$

e o controlador

$$u = K(s)y$$

- Função de transferência de malha fechada

$$z = (P_{zw} + P_{zu} \underbrace{K(I - P_{yu}K)^{-1}}_{\det(I - P_{yu}K) \neq 0} P_{yw})w \iff z = T_{zw}(s)w$$

# Representação do sistema de controle

## Realização em espaços de estados

$$\begin{cases} \dot{x}(t) &= Ax(t) + B_w w(t) + B_u u(t) \\ z(t) &= C_z x(t) + D_{zw} w(t) + D_{zu} u(t) \\ y(t) &= C_y x(t) + D_{yw} w(t) + D_{yu} u(t) \end{cases}$$

$$\Updownarrow$$

$$P(s) = \begin{bmatrix} P_{zw}(s) & P_{zu}(s) \\ P_{yw}(s) & P_{yu}(s) \end{bmatrix} = C(sI - A)^{-1}B + D$$

sendo

$$B = \begin{bmatrix} B_w & B_u \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} C_z \\ C_y \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} D_{zw} & D_{zu} \\ D_{yw} & D_{yu} \end{bmatrix}$$

• Obs.: é adotada a notação

$$P(s) = \left[ \begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{c|cc} A & B_w & B_u \\ \hline C_z & D_{zw} & D_{zu} \\ C_y & D_{yw} & D_{yu} \end{array} \right]$$



# Representação do sistema de controle

## Em particular

$$P_{zw}(s) = C_z(sI - A)^{-1}B_w + D_{zw} \triangleq \left[ \begin{array}{c|c} A & B_w \\ \hline C_z & D_{zw} \end{array} \right]$$

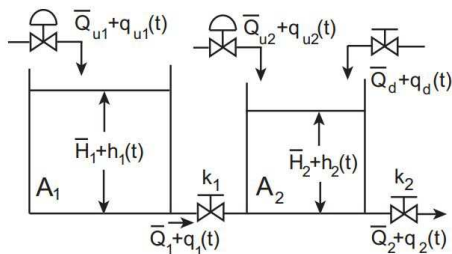
## Realização do Controlador

$$\begin{cases} \dot{x}_c(t) &= A_c x_c(t) + B_c y(t) \\ u(t) &= C_c x_c(t) + D_c y(t) \end{cases}$$



$$K(s) = C_c(sI - A_c)^{-1}B_c + D_c$$

# Exemplo - Processo de 2 tanques



Sinais envolvidos

Quem são  $x$ ,  $u$ ,  $w$ ,  $y$ ,  $z$  ?

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{k_1}{A_1} & \frac{k_1}{A_1} \\ \frac{k_1}{A_2} & -\frac{k_1+k_2}{A_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{A_1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{A_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_{u1} \\ q_{u2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{A_2} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ q_d \\ n_1 \\ n_2 \end{bmatrix},$$

$$z = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} x,$$

$$y = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} x$$

$$+ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} w.$$

## Objetivos de controle [Gonçalves et. al., 2012]

- rastreamento especificada por um modelo de referência
- minimizar a influência da perturbação sobre os níveis dos tanques
- atenuar os efeitos dos ruídos de medição sobre os sinais do sistema
- **Parâmetros incertos:**  $k_1 \in [0.15 \ 0.25]$  e  $k_2 \in [0.2 \ 0.3]$  (inv. resist. hidr. dutos)

# Exemplo - Processo de 4 tanques

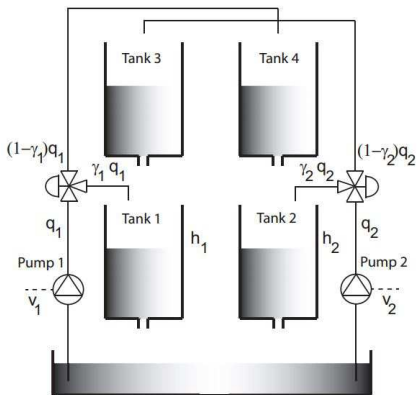


Figura: Processo de 4 tanques.

Sinais envolvidos

Quem são  $x$ ,  $u$ ,  $w$ ,  $y$ ,  $z$  ?

# Exemplo - Coluna de destilação

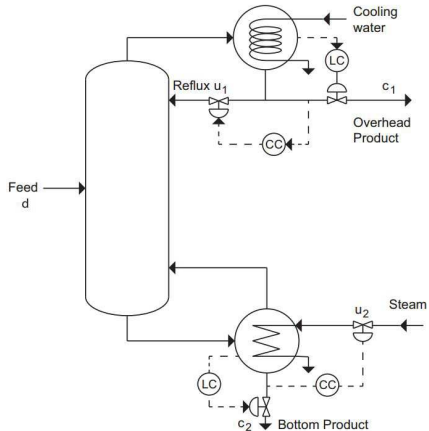


Figura: Coluna de destilação binária de separação água-etanol.

Sinais envolvidos

Quem são  $x$ ,  $u$ ,  $w$ ,  $y$ ,  $z$  ?

# Representação do sistema de controle

## Sistema em malha fechada - Realimentação de estados

- Seja o sistema

$$\begin{cases} \dot{x}(t) &= Ax(t) + B_u u(t) + B_w w(t) \\ z(t) &= Cx(t) + D_{zu} u(t) + D_{zw} w(t) \end{cases}$$

e a lei de controle de realimentação de estados

$$u(t) = Kx(t).$$

Encontre o sistema em malha fechada.

## Sistema em malha fechada - Realimentação de saída

- Seja o sistema

$$\begin{cases} \dot{x}(t) &= Ax(t) + B_w w(t) + B_u u(t) \\ z(t) &= C_z x(t) + D_{zw} w(t) + D_{zu} u(t) \\ y(t) &= C_y x(t) + D_{yw} w(t) + D_{yu} u(t) \end{cases}$$

e a lei de controle de realimentação estática de saída

$$u(t) = Ky(t).$$

Encontre o sistema em malha fechada.

# Representação do sistema de controle

## Sistema em malha fechada - Realimentação dinâmica de saída

- Seja o sistema

$$\begin{cases} \dot{x}(t) &= Ax(t) + B_w w(t) + B_u u(t) \\ z(t) &= C_z x(t) + D_{zw} w(t) + D_{zu} u(t) \\ y(t) &= C_y x(t) + D_{yw} w(t) + D_{yu} u(t) \end{cases}$$

e a lei de controle de realimentação dinâmica de saída

$$\begin{cases} \dot{x}_c(t) &= A_c x_c(t) + B_c y(t) \\ u(t) &= C_c x_c(t) + D_c y(t) \end{cases}$$

Encontre o sistema em malha fechada. Dica: defina o estado aumentado  $x_a = [x' \quad x'_c]'$  e reescreva o sistema em malha fechada como

$$\begin{cases} \dot{x}_a(t) &= A_{mf} x_a(t) + B_{mf} w(t) \\ z(t) &= C_{mf} x_a(t) + D_{mf} w(t) \end{cases}$$

# Representação do sistema de controle

## Sistema em malha fechada - Filtragem

- Seja o sistema

$$\begin{cases} \dot{x}(t) &= Ax(t) + B_w w(t) \\ z(t) &= C_z x(t) + D_{zw} w(t) \\ y(t) &= C_y x(t) + D_{yw} w(t) \end{cases}$$

e o filtro de ordem completa

$$\begin{cases} \dot{x}_f(t) &= A_f x_f(t) + B_f y(t) \\ z_f(t) &= C_c x_f(t) + D_f y(t) \end{cases}$$

em que  $x_f$  é o estado estimado e  $z_f$  a saída estimada, que seja assintoticamente estável e minimize alguma medida de desempenho referente a função de transferência de  $w$  para o erro  $e = z - z_f$ . Encontre o sistema em malha fechada. Dica: defina o estado aumentado  $x_a = [x' \quad x_f']'$  e reescreva o sistema em malha fechada como

$$\begin{cases} \dot{x}_a(t) &= A_{mf} x_a(t) + B_{mf} w(t) \\ e(t) &= C_{mf} x_a(t) + D_{mf} w(t) \end{cases}$$

# Bibliografia

## Referências

- Carsten Scherer. Theory of Robust Control. Ed. TU Delft, 2006.
- Stephen Boyd and Craig Barratt. Linear Controller Design: Limits of Performance. Prentice-Hall, 1991.
- Bruno M. Gonçalves, Eduardo N. Gonçalves, Reinaldo M. Palhares, Ricardo H. C. Takahashi. Síntese de controladores robustos pi multi-malhas descentralizado. Anais do XIX Congresso Brasileiro de Automática, CBA 2012, pp. 4618–4623, 2012.
- Notas de aula da disciplina “Fundamentos do Controle Robusto via Otimização” do professor Reinaldo Martinez Palhares do Departamento de Engenharia Eletrônica da Universidade Federal de Minas Gerais (UFMG). <http://www.cpdee.ufmg.br/~palhares/fundamentosrobusto.html>