

Lista de Exercícios

Transformada de Laplace

Seções 4.1 a 4.10 do Lathi.

Universidade de Brasília

Departamento de Engenharia Elétrica

ENE0067 - Sinais e Sistemas em Tempo Contínuo

2026

Observações:

- Resolva os exercícios usando as propriedades sempre que possível.
- Consulte as Tabelas 4.1 (pares de transformadas) e 4.2 (propriedades) do Lathi.

1 Fundamentos e Definições da Transformada de Laplace

Exercício 1.1

Determine a Transformada de Laplace dos seguintes sinais usando a definição:

(a) $x_1(t) = 5u(t)$

(b) $x_2(t) = 3e^{-2t}u(t)$

(c) $x_3(t) = \sin(4t)u(t)$

Exercício 1.2

Usando integração direta, calcule a transformada de Laplace e a região de convergência dos seguintes sinais:

(a) $x(t) = te^{-t}u(t)$

(b) $x(t) = t \cos(\omega_0 t) u(t)$

(c) $x(t) = (e^{2t} - 2e^{-t})u(t)$

Exercício 1.3

Determine a Transformada de Laplace e a respectiva região de convergência de:

(a) $x(t) = -e^{-at}u(-t)$

(b) $x(t) = e^{at}u(-t)$

Exercício 1.4

Determine a transformada de Laplace (bilateral) e a região de convergência correspondente dos seguintes sinais:

- (a) $e^{-|t|}$
- (b) $e^{-|t|} \cos t$
- (c) $e^t u(t) + e^{2t} u(-t)$

2 Propriedades e Teoremas da Transformada de Laplace

Exercício 2.1

Usando a tabela de transformadas (unilaterais) de Laplace e (se necessário) a propriedade da linearidade, calcule a transformada de Laplace dos seguintes sinais:

- (a) $x(t) = te^{-t}u(t)$
- (b) $x(t) = t \cos(4t)u(t)$
- (c) $x(t) = (e^{2t} - 2e^{-t})u(t)$
- (d) $x(t) = e^{-2t} \cos(5t + \pi/3)u(t)$

Exercício 2.2

Sabendo que $e^{-at}u(t) \leftrightarrow \mathcal{L}\frac{1}{s+a}$, determine a Transformada de Laplace de:

- (a) $x(t) = e^{-2(t-3)}u(t-3)$
- (b) $x(t) = u(t-1) - u(t-3)$
- (c) $x(t) = \sin(2(t-\pi/4))u(t-\pi/4)$

Exercício 2.3

Use a propriedade de deslocamento na frequência para obter a Transformada de Laplace de:

- (a) $x(t) = e^{-3t} \sin(5t)u(t)$
- (b) $x(t) = te^{-2t}u(t)$
- (c) $x(t) = t^2 e^{-t} \cos(2t)u(t)$

Exercício 2.4

Dado o sinal $x(t)$ mostrado abaixo (pulso triangular):

$$x(t) = \begin{cases} t, & 0 \leq t \leq 2 \\ 4 - t, & 2 < t \leq 4 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Use a propriedade de diferenciação no tempo para determinar $X(s)$.

Dica: Calcule $\frac{dx}{dt}$ e $\frac{d^2x}{dt^2}$ primeiro.

Exercício 2.5

Use a propriedade de integração para determinar a Transformada de Laplace de:

(a) $x(t) = \int_0^t e^{-2\tau} d\tau$

(b) $x(t) = \int_0^t \sin(3\tau) d\tau$

(c) $x(t) = t^2 u(t)$ (use integração sucessiva a partir de $u(t)$)

Exercício 2.6

Calcule a convolução $y(t) = x_1(t) * x_2(t)$ usando a Transformada de Laplace, onde:

(a) $x_1(t) = e^{-t}u(t)$ e $x_2(t) = e^{-2t}u(t)$

(b) $x_1(t) = u(t)$ e $x_2(t) = e^{-3t}u(t)$

(c) $x_1(t) = \sin(2t)u(t)$ e $x_2(t) = u(t)$

Exercício 2.7

Para cada $X(s)$ abaixo, determine (quando aplicável) os valores inicial $x(0^+)$ e final $x(\infty)$ do sinal no domínio do tempo $x(t)$:

(a) $X(s) = \frac{10}{s(s+2)}$

(b) $X(s) = \frac{5s+10}{s^2+5s+6}$

(c) $X(s) = \frac{s+2}{s^2+4}$

(d) $X(s) = \frac{6s^2+5s+1}{s^3+6s^2+11s+6}$

Exercício 2.8

Começando apenas com o fato de que $\delta(t) \leftrightarrow \mathcal{L}1$, obtenha os pares 2 a 10b da Tabela 4.1 do Lathi, usando as várias propriedades da transformada de Laplace.

3 Transformada Inversa de Laplace

Exercício 3.1

Determine a transformada de Laplace inversa (unilateral) das seguintes funções:

(a) $X(s) = \frac{2s+5}{s^2+5s+6}$

(b) $X(s) = \frac{3s+5}{s^2+4s+13}$

(c) $X(s) = \frac{s+2}{s(s+1)^2}$

(d) $X(s) = \frac{s+1}{s(s+2)^2(s^2+4s+5)}$

Exercício 3.2

Determine $x(t)$ para as seguintes expressões:

(a) $X(s) = \frac{e^{-s}}{s+2}$

(b) $X(s) = \frac{e^{-2s}(s+1)}{s^2+3s+2}$

(c) $X(s) = \frac{1-e^{-3s}}{s^2}$

Exercício 3.3

Determine a transformada inversa de Laplace de:

$$X(s) = \frac{2 + 2se^{-2s} + 4e^{-4s}}{s^2 + 4s + 3}$$

Exercício 3.4

Encontre a transformada inversa de Laplace das seguintes $X(s)$:

(a) $X(s) = \frac{2s+1}{s+2}, \quad \text{Re}(s) > -2$

(b) $X(s) = \frac{s^2+6s+7}{s^2+3s+2}, \quad \text{Re}(s) > -1$

(c) $X(s) = \frac{s^3+2s^2+6}{s^2+3s}, \quad \text{Re}(s) > 0$

4 Solução de Equações Diferenciais e Análise de Sistemas LCIT

Exercício 4.1

Usando a transformada de Laplace, resolva as seguintes equações diferenciais:

(a) $(D^2 + 3D + 2)y(t) = Dx(t)$ com $y(0^-) = 0$, $y'(0^-) = 0$ e $x(t) = u(t)$.

(b) $(D^2 + 4D + 4)y(t) = (D + 1)x(t)$ com $y(0^-) = 2$, $y'(0^-) = 1$ e $x(t) = e^{-t}u(t)$.

Exercício 4.2

Para um sistema com a função de transferência descrita por:

$$H(s) = \frac{s + 5}{s^2 + 5s + 6}$$

encontre a resposta de estado nulo para os seguintes sinais de entrada:

- (a) $x(t) = e^{-4t}u(t)$
- (b) $x(t) = e^{-3t}u(t)$

Exercício 4.3

Para um sistema modelado pela função de transferência:

$$H(s) = \frac{s + 5}{s^2 + 4s + 3}$$

- (a) Determine a resposta de estado nulo para a entrada $x(t)$ sendo: (i) $10u(t)$ e (ii) $u(t - 5)$.
- (b) Escreva a equação diferencial no domínio do tempo que relaciona a saída $y(t)$ com a entrada $x(t)$.

Exercício 4.4 *

Para cada um dos sistemas descritos pelas seguintes equações diferenciais, encontre a função de transferência $H(s)$:

- (a) $\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 11 \frac{dy(t)}{dt} + 24y(t) = 5 \frac{dx(t)}{dt} + 3x(t)$
- (b) $\frac{d^3 y(t)}{dt^3} + 6 \frac{d^2 y(t)}{dt^2} - 11 \frac{dy(t)}{dt} + 6y(t) = 3 \frac{d^2 x(t)}{dt^2} + 7 \frac{dx(t)}{dt} + 5x(t)$

Exercício 4.5

Um sistema LCIT possui resposta ao impulso dada por $h(t) = 2e^{-3t}u(t)$.

- (a) Determine a sua função de transferência $H(s)$.
- (b) Se a entrada aplicada for $x(t) = 5u(t)$, determine a representação da saída $Y(s)$.
- (c) Calcule analiticamente a resposta temporal $y(t)$ usando a transformada inversa.
- (d) Verifique o valor alcançado em regime permanente $y(\infty)$.

Exercício 4.6

Um sistema LCIT inicialmente relaxado possui resposta ao degrau unitário

$$g(t) = u(t - 1) - u(t - 3).$$

Utilizando diretamente a resposta ao degrau e a superposição, determine e esboce a saída $y(t)$ considerando a entrada $x(t)$ abaixo.

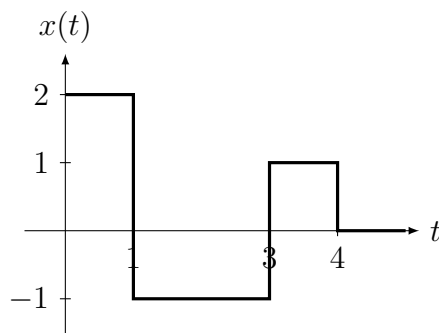


Figura 1: Entrada do Exercício 4.6.

Exercício 4.7

Um sistema LCIT inicialmente relaxado possui resposta ao impulso

$$h(t) = u(t - 1) - u(t - 2).$$

A entrada pode ser vista na figura abaixo.

- Determine $dx(t)/dt$ no sentido das distribuições, identificando os impulsos produzidos pelos saltos de $x(t)$.
- Determine e esboce a saída $y(t) = x(t) * h(t)$.

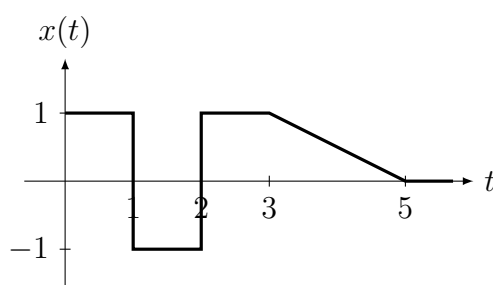


Figura 2: Entrada do Exercício 4.7.

5 Álgebra de Diagramas de Blocos e Sistemas de Controle

Exercício 5.1

Neste problema mostramos como um par de pólos complexos conjugados podem ser realizados usando uma cascata de duas funções de transferência de primeira ordem e re-

alimentação. Mostre que as funções de transferência dos diagramas de blocos (a) e (b) são

$$(a) \quad H(s) = \frac{1}{(s+a)^2 + b^2} = \frac{1}{s^2 + 2as + (a^2 + b^2)}$$

$$(b) \quad H(s) = \frac{s+a}{(s+a)^2 + b^2} = \frac{s+a}{s^2 + 2as + (a^2 + b^2)}$$

logo, mostre que a função de transferência do diagrama de blocos da (c) é

$$(c) \quad H(s) = \frac{As+B}{(s+a)^2 + b^2} = \frac{As+B}{s^2 + 2as + (a^2 + b^2)}$$

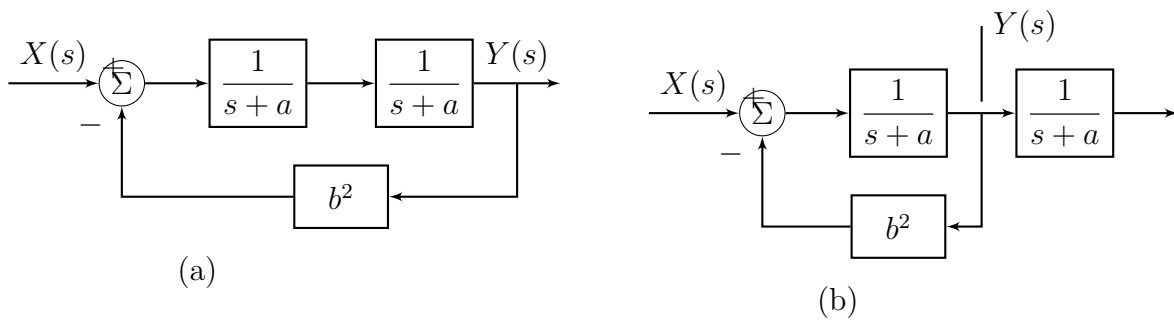


Figura 3: Diagramas de blocos (a) e (b)

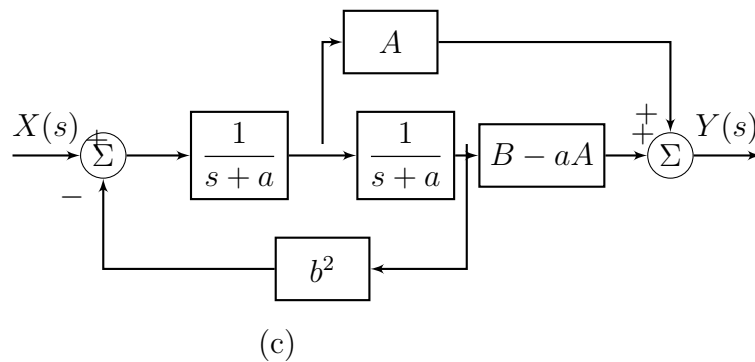


Figura 4: Diagrama de blocos (c)

Exercício 5.2

Dois sistemas LCIT estão conectados em cascata com funções de transferência:

$$H_1(s) = \frac{1}{s+1} \quad \text{e} \quad H_2(s) = \frac{2}{s+3}$$

(a) Determine a função de transferência global equivalente $H(s) = H_1(s)H_2(s)$.

(b) Se o sinal de entrada for $x(t) = e^{-2t}u(t)$, determine a expressão temporal da saída $y(t)$.

Exercício 5.3

Considere dois sistemas LCIT. O primeiro tem função de transferência $H_1(s) = \frac{2s}{s+1}$, e o segundo possui $H_2(s) = \frac{1}{se^{3(s+1)}}$.

- Determine a resposta impulsiva geral $h_s(t)$ se os dois sistemas estiverem conectados em série
- Determine a resposta impulsiva global $h_p(t)$ caso os dois blocos estejam conectados em paralelo.

Exercício 5.4

A realimentação pode ser utilizada para aumentar (ou diminuir) a largura de faixa do sistema. Considere o sistema da Fig. 5(a) com função de transferência $G(s) = \omega_c/(s + \omega_c)$.

- Mostre que a largura de faixa de 3 dB desse sistema é ω_c (isto é, $|H(\omega_0)| = 1/\sqrt{2}$ do seu valor máximo $G_0 = 1$), supondo o sistema com ganho CC (frequência zero) unitário, ou seja, $|H(j0)| = 1$.
- Para aumentar a largura de faixa deste sistema, utilizamos uma realimentação negativa com $H(s) = 9$, como mostrado na Fig. 5(b). Mostre que a largura de faixa de 3 dB desse sistema é $10\omega_c$. Qual é o ganho CC (ganho em $\omega = 0$ rad/s)?
- Para diminuir a largura de faixa deste sistema, utilizamos um ganho de realimentação positivo com $H(s) = -0.9$, como mostrado na Fig. 5(c). Mostre que a largura de faixa de 3 dB deste sistema é $0.1\omega_c$. Qual é o ganho CC (ganho em $\omega = 0$ rad/s)?
- O ganho CC do sistema vezes sua largura de faixa de 3 dB é o *produto ganho-largura de faixa* do sistema. Mostre que este produto é o mesmo para todos os três sistemas da Fig. 5. Este resultado mostra que se aumentarmos a largura de faixa, o ganho diminui e vice-versa.

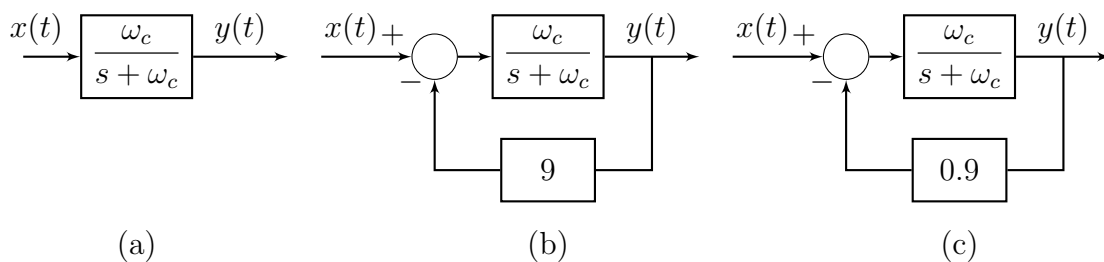


Figura 5: Sistemas com realimentação do Problema 4.7-1.

Exercício 5.5

Considere o sistema de realimentação negativa unitária mostrado a seguir, com ganho $K > 0$ e planta

$$G(s) = \frac{2}{s(s+3)}.$$

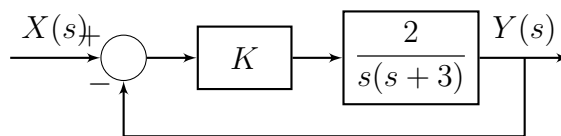


Figura 6: Sistema com realimentação unitária do Exercício 5.5.

- Determine K para que o sistema em malha fechada seja subamortecido com razão de amortecimento $\zeta = 0,707 \simeq 1/\sqrt{2}$.
- Determine K para que o sistema em malha fechada tenha dois polos reais iguais.
- Para uma entrada degrau de amplitude A , $X(s) = A/s$, determine $y(\infty)$ para $K > 0$.

6 Resposta em Frequência e Diagramas de Bode

Exercício 6.1

Para um sistema LCIT descrito pela função de transferência:

$$H(s) = \frac{s + 2}{s^2 + 5s + 4}$$

determine a resposta às seguintes entradas exponenciais de duração infinita:

- $x(t) = 5 \cos(2t + 30^\circ)$
- $x(t) = 10 \sin(2t + 45^\circ)$
- $x(t) = 10 \cos(3t + 40^\circ)$

Exercício 6.2

Para um filtro passa-tudo caracterizado analiticamente por:

$$H(s) = \frac{-(s - 10)}{s + 10}$$

determine a saída do sistema operando sob regime permanente para as seguintes excitações contínuas:

- $x(t) = e^{j\omega t}$
- $x(t) = \cos(\omega t + \theta)$
- $x(t) = \cos(t)$
- $x(t) = \sin(2t)$
- $x(t) = \cos(10t)$
- $x(t) = \cos(100t)$

Exercício 6.3

Obtenha os diagramas de Bode para as seguintes funções:

$$(a) \quad H_1(s) = \frac{s(s+100)}{(s+2)(s+20)}$$

$$(b) \quad H_2(s) = \frac{(s+10)(s+20)}{s^2(s+100)}$$

$$(c) \quad H_3(s) = \frac{(s+10)(s+200)}{(s+20)^2(s+1000)}$$

Exercício 6.4

Usando o método gráfico da Seção 4.10-1, obtenha um esboço da resposta em amplitude e fase para um sistema LCIT descrito pela seguinte função de transferência

$$\begin{aligned} H(s) &= \frac{s^2 - 2s + 50}{s^2 + 2s + 50} \\ &= \frac{(s - 1 - j7)(s - 1 + j7)}{(s + 1 - j7)(s + 1 + j7)} \end{aligned}$$

qual é o tipo deste filtro?

7 Extra

Exercício 7.1

Suponha que um engenheiro construa um sistema LCIT controlável e observável com função de transferência

$$H(s) = \frac{s^2 + 4}{2s^2 + 4s + 4}.$$

- (a) Por cálculo direto, determine a resposta de magnitude nas frequências

$$\omega = 0, 1, 2, 3, 5, 10 \quad \text{e} \quad \infty.$$

Use esses cálculos para esboçar aproximadamente a resposta de magnitude no intervalo $0 \leq \omega \leq 10$.

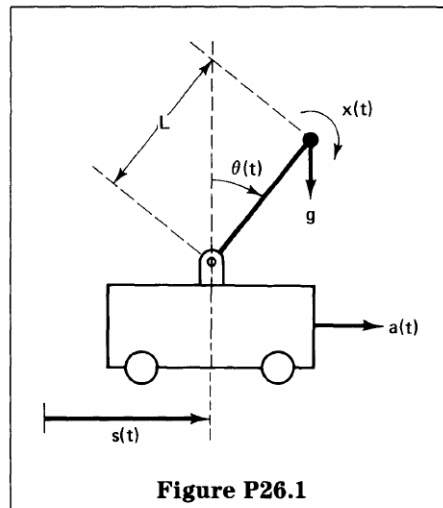
- (b) Para testar o sistema, o engenheiro conecta um gerador de sinais ao sistema com a intenção de medir a resposta de magnitude usando um osciloscópio comum. Que tipo de sinal o engenheiro deve aplicar ao sistema para realizar as medições? Como ele deve fazer as medições? Forneça detalhes suficientes para justificar completamente suas respostas.
- (c) Suponha que o engenheiro construa acidentalmente o sistema

$$H^{-1}(s) = \frac{1}{H(s)} = \frac{2s^2 + 4s + 4}{s^2 + 4}.$$

Que efeito esse engano terá sobre os testes?

Exercício 7.2

Considere um pêndulo invertido montado sobre um carrinho móvel, conforme a figura. O pêndulo é modelado como uma haste sem massa, de comprimento L , com uma massa m presa à extremidade. A variável $\theta(t)$ representa a deflexão angular do pêndulo em relação à vertical, g é a aceleração da gravidade, $s(t)$ é a posição do carrinho em relação a algum ponto de referência, $a(t)$ é a aceleração do carrinho e $x(t)$ representa a aceleração angular resultante de perturbações, como rajadas de vento.



O objetivo deste problema é analisar a dinâmica do pêndulo invertido e, mais especificamente, investigar o equilíbrio do pêndulo por meio de uma escolha adequada da aceleração $a(t)$ do carrinho. A equação diferencial que relaciona $\theta(t)$, $a(t)$ e $x(t)$ é

$$L \frac{d^2 \theta(t)}{dt^2} = g \sin[\theta(t)] - a(t) \cos[\theta(t)] + Lx(t).$$

Essa relação iguala a aceleração real da massa na direção perpendicular à haste às acelerações aplicadas nessa direção: a gravidade, a aceleração de perturbação devida a $x(t)$ e a aceleração do carrinho.

Observe que essa é uma equação diferencial não linear. A análise detalhada e exata do comportamento do pêndulo exigiria o estudo dessa equação não linear. Entretanto, pode-se obter bastante informação sobre sua dinâmica por meio de uma análise linear quando o pêndulo está próximo da vertical, isto é, quando $\theta(t)$ é pequeno. Nesse caso, use as aproximações

$$\sin[\theta(t)] \approx \theta(t), \quad \cos[\theta(t)] \approx 1.$$

- (a) Suponha que o carrinho esteja parado, isto é, $a(t) = 0$, e considere o sistema LTI causal com entrada $x(t)$ e saída $\theta(t)$ descrito pela equação anterior e pelas aproximações de pequenos ângulos. Determine a função de sistema e mostre que ela possui um polo no semiplano direito, o que implica que o sistema é instável.

O resultado do item (a) indica que, com o carrinho parado, qualquer pequena perturbação angular causada por $x(t)$ produz desvios angulares crescentes em relação à vertical. Quando esses desvios se tornam grandes, as aproximações de pequenos ângulos deixam de ser válidas. Ainda assim, sua validade para pequenos deslocamentos permite concluir que a posição de equilíbrio vertical é instável.

- (b) Deseja-se agora estabilizar a posição vertical do pêndulo movimentando o carrinho adequadamente. Considere inicialmente a realimentação proporcional

$$a(t) = K\theta(t).$$

Admita que $\theta(t)$ seja pequeno. Desenhe um diagrama de blocos do sistema linear com $\theta(t)$ como saída, $x(t)$ como entrada externa e $a(t)$ como o sinal realimentado. Mostre que o sistema em malha fechada resultante é instável. Determine um valor de K tal que, se $x(t) = \delta(t)$, o pêndulo oscile de um lado para o outro sem amortecimento.

- (c) Considere a realimentação proporcional-derivativa, ou PD,

$$a(t) = K_1\theta(t) + K_2\frac{d\theta(t)}{dt}.$$

Mostre que é possível encontrar valores de K_1 e K_2 que estabilizem o pêndulo. Para

$$g = 9,8 \text{ m/s}^2, \quad L = 0,5 \text{ m},$$

escolha K_1 e K_2 de modo que o sistema em malha fechada tenha razão de amortecimento igual a 1 e frequência natural igual a 3 rad/s.