

Lista de Exercícios

Sinais e Sistemas em Tempo Contínuo

Análise no Espaço de Estados

Universidade de Brasília
Departamento de Engenharia Elétrica

1 Introdução e Estrutura da Descrição no Espaço de Estados

Exercício 1.1

Converta cada uma das seguintes equações diferenciais de segunda ordem em um conjunto de duas equações diferenciais de primeira ordem (equações de estado). Indique quais dos conjuntos representam equações não lineares:

(a) $\ddot{y} + 10\dot{y} + 2y = x$

(b) $\ddot{y} + 2e^y\dot{y} + \log y = x$

(c) $\ddot{y} + \phi_1(y)\dot{y} + \phi_2(y)y = x$

Exercício 1.2

Encontre as equações de estado de um sistema LTI de tempo contínuo descrito por $\ddot{y}(t) + 3\dot{y}(t) + 2y(t) = x(t)$.

2 Determinação das Equações de Estado (Sistemas Físicos)

Exercício 2.1

Considere o sistema mecânico mostrado na Figura 1, cuja dinâmica é descrita pela equação diferencial

$$m\ddot{y}(t) + k_2\dot{y}(t) + k_1y(t) = x(t).$$

Ele consiste em um bloco de massa m conectado a uma parede por uma mola. Seja k_1 a constante da mola e k_2 o coeficiente de atrito viscoso. Sendo a saída $y(t)$ o deslocamento do bloco e a entrada $x(t)$ a força aplicada, encontre uma representação no espaço de estados do sistema.

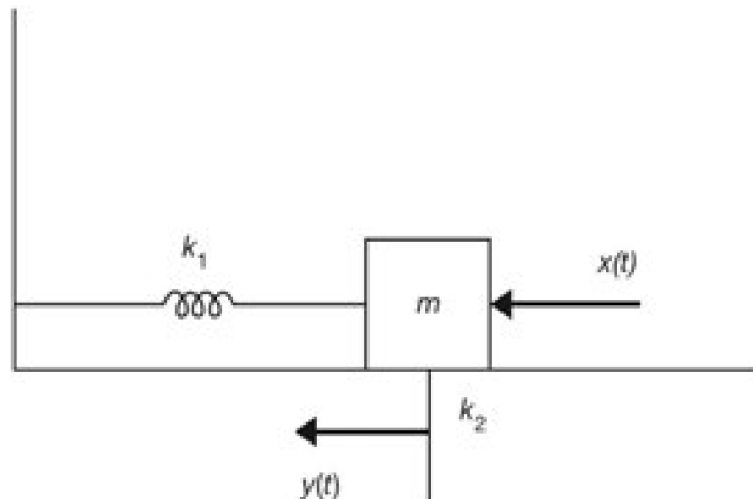


Figura 1:

Exercício 2.2

Considere o circuito RLC mostrado na Figura 2. Seja $y(t)$ a corrente de malha (saída do sistema) e $x(t)$ a tensão de entrada. A dinâmica do circuito é descrita pelo sistema de equações diferenciais de primeira ordem

$$\dot{q}_1(t) = -\frac{R}{L}q_1(t) - \frac{1}{L}q_2(t) + \frac{1}{L}x(t),$$

$$\dot{q}_2(t) = \frac{1}{C}q_1(t), \quad y(t) = q_1(t),$$

onde $q_1(t) = i_L(t)$ é a corrente no indutor e $q_2(t) = v_C(t)$ é a tensão no capacitor. Encontre a representação no espaço de estados do circuito.

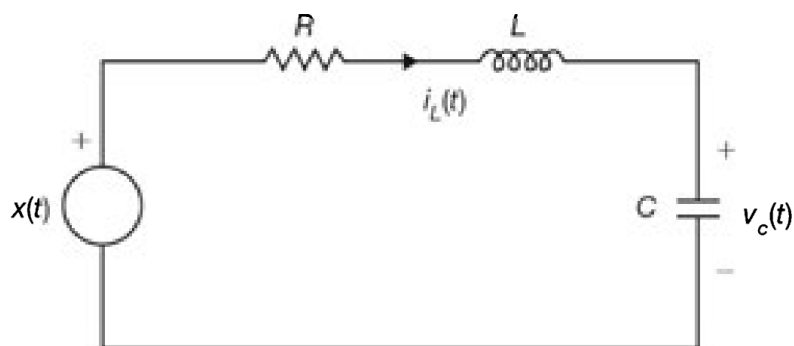


Figura 2:

3 Transformação Linear do Vetor de Estado e Diagonalização

Exercício 3.1

As equações de estado de um certo sistema são dadas por:

$$\dot{q}_1 = q_2 + 2x$$

$$\dot{q}_2 = -q_1 - q_2 + x$$

Defina um novo vetor de estado $\mathbf{w}$ tal que:

$$w_1 = q_2, \quad w_2 = q_2 - q_1.$$

Encontre as equações de estado do sistema com $\mathbf{w}$ como o vetor de estado. Determine as raízes características (autovalores) da matriz $\mathbf{A}$ nas equações de estado originais e transformadas.

Exercício 3.2

Dado um sistema

$$\dot{\mathbf{q}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -3 \end{bmatrix} \mathbf{q} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} x$$

determine um novo vetor de estado $\mathbf{w}$ tal que as equações de estado sejam diagonalizadas.

Exercício 3.3

Considere a seguinte equação de espaço de estados na forma canônica controlável de ordem dois:

$$\dot{q} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -8 & -6 \end{bmatrix} q + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} x$$

Calcule os polos do sistema, os autovalores da matriz de estados e, para cada autovalor encontrado, determine os autovetores associados.

4 Métodos de Solução das Equações de Estado

Exercício 4.1

Encontre o vetor de estado $\mathbf{q}(t)$ usando o método da transformada de Laplace se

$$\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{A}\mathbf{q} + \mathbf{B}x$$

onde

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -1 & -3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$
$$\mathbf{q}(0) = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad x(t) = 0.$$

Exercício 4.2

Repita o Exercício 4.1 para

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$
$$\mathbf{q}(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad x(t) = u(t).$$

Exercício 4.3

Encontre o vetor de estado $\mathbf{q}(t)$ usando o método do domínio do tempo se

$$\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{A}\mathbf{q} + \mathbf{B}x$$

onde

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -1 & -3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$
$$\mathbf{q}(0) = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad x(t) = 0.$$

Exercício 4.4

Encontre $e^{\mathbf{A}t}$ para

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -6 & -5 \end{bmatrix}$$

usando o método da transformada de Laplace.

Exercício 4.5

Repita o Exercício 4.4 usando o método de decomposição espectral (fórmula de Sylvester).

Exercício 4.6

Repita o Exercício 4.4 usando o método da diagonalização (ou seja, com A na forma diagonal). Para isso, encontre os autovalores λ_1 e λ_2 de A e reescreva a matriz como

$$A = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$$

Exercício 4.7

Usando o método das variáveis de estado, resolva a equação diferencial linear de segunda ordem

$$y''(t) + 5y'(t) + 6y(t) = x(t)$$

com as condições iniciais $y(0) = 2$, $y'(0) = 1$, e $x(t) = e^{-t}u(t)$.

Exercício 4.8

Use o método da transformada de Laplace para encontrar a resposta y para

$$\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{A}\mathbf{q} + \mathbf{B}x(t), \quad y = \mathbf{C}\mathbf{q} + \mathbf{D}x(t),$$

onde

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D} = 0,$$

e

$$x(t) = u(t), \quad \mathbf{q}(0) = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

5 Relação com a Função de Transferência

Exercício 5.1

Encontre a matriz da função de transferência $H(s)$ para o sistema do Exercício 4.8.

Exercício 5.2

Encontre a matriz da função de transferência $\mathbf{H}(s)$ para o sistema

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D} = 1.$$

Considere também

$$x(t) = u(t), \quad \mathbf{q}(0) = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Exercício 5.3

Considere o sistema LTI de tempo contínuo mostrado na Figura 3:

- O sistema é assintoticamente estável?
- Encontre a função do sistema $H(s)$.
- O sistema é BIBO estável?

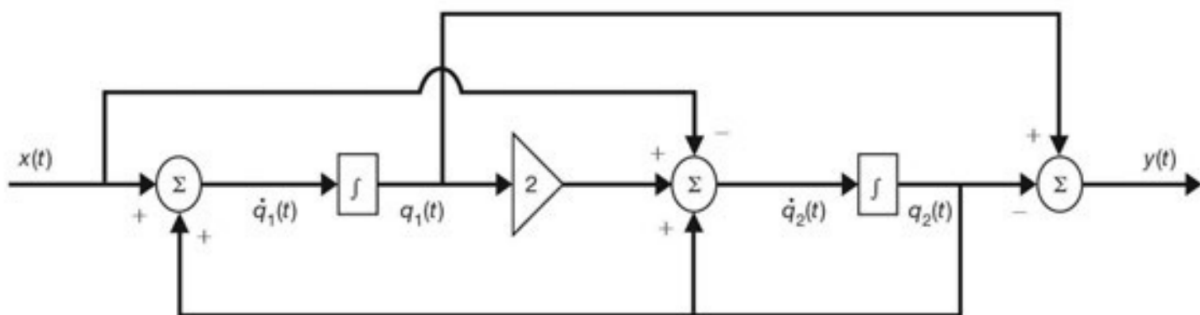


Figura 3:

Exercício 5.4

Considere o sistema LTI de tempo contínuo mostrado na Figura 4.

- Encontre a representação no espaço de estados do sistema com as variáveis de estado $q_1(t)$ e $q_2(t)$ como mostrado.
- O sistema é assintoticamente estável?
- Encontre a função do sistema $H(s)$.
- O sistema é BIBO estável?

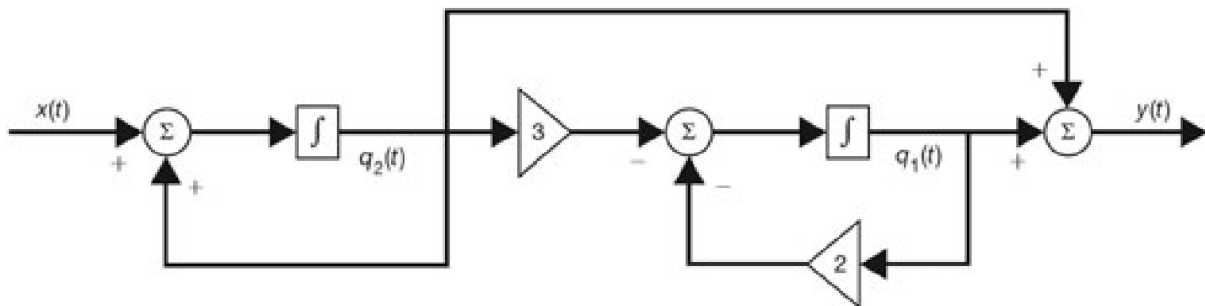


Figura 4:

6 Propriedades Estruturais (Controlabilidade e Observabilidade)

Exercício 6.1

Considere o sistema LTI de tempo contínuo do exercício 5.3.

- O sistema é controlável?
- O sistema é observável?

Exercício 6.2

Considere o sistema mostrado na Figura 5.

- O sistema é controlável?
- O sistema é observável?
- Encontre a função do sistema $H(s)$.

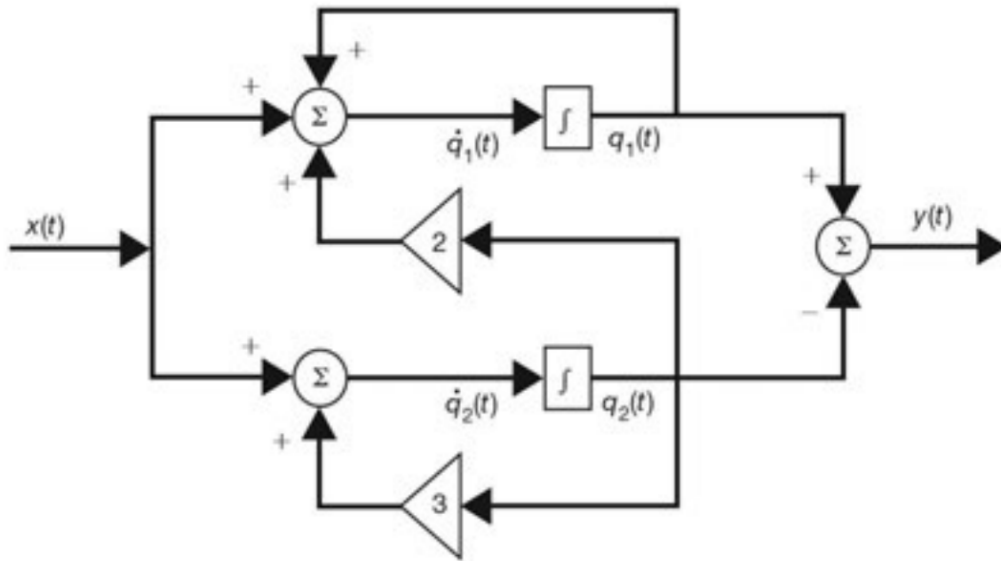


Figura 5:

Exercício 6.3

Identifique a Controlabilidade e Observabilidade dos sistemas da Figura 6.

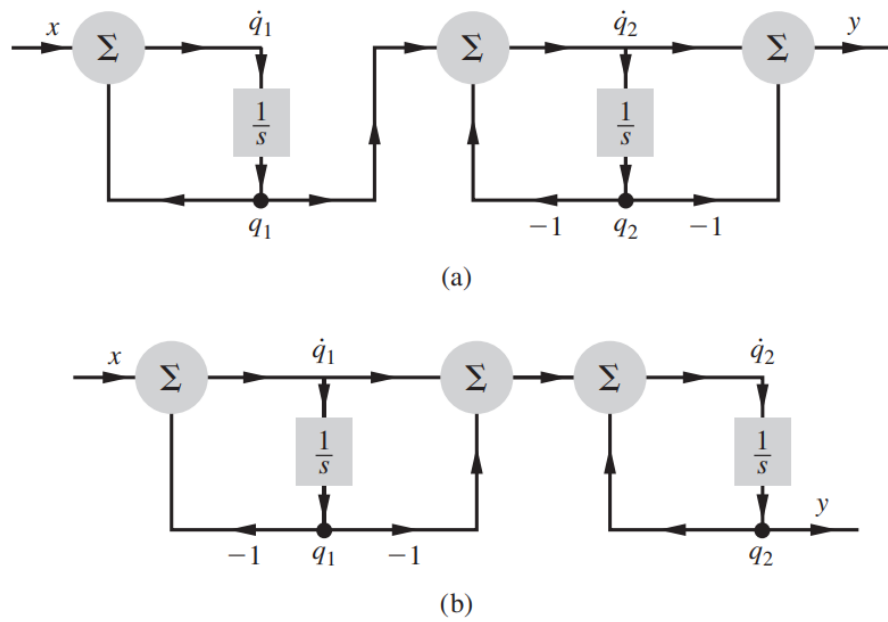


Figura 6:

Exercício 6.4

Dado o diagrama de blocos abaixo (realização paralela):

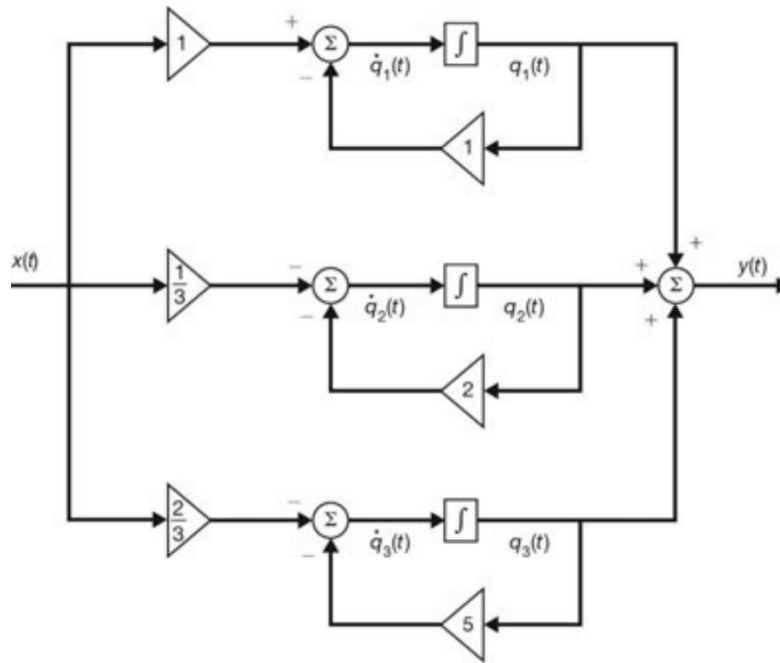


Figura 7:

- (a) Encontre as matrizes de espaço de estados (A , B , C e D) do sistema.
- (b) O sistema é controlável?
- (c) O sistema é observável?

7 Realizações e Formas Canônicas

Exercício 7.1

Considere as funções de transferência (FT) dos sistemas de tempo contínuo descritos nos itens de (a) a (d) abaixo. Para cada uma das funções de transferência, pede-se:

- (I) Obtenha as representações em espaço de estados nas formas canônica controlável, canônica observável, cascata e paralela (diagonal).
- (II) Desenhe um diagrama de blocos com integradores ($1/s$), ganhos e somadores para representar cada uma das realizações obtidas.
- (III) Informe se a realização obtida é mínima (ou seja, se a dimensão do vetor de estados é igual à ordem da função de transferência após o cancelamento de eventuais polos e zeros). Justifique.

$$(a) H_1(s) = \frac{(s+1)(s+2)}{(s+3)(s+4)(s+5)}$$

$$(b) H_2(s) = \frac{(s-1)(s+2)}{(s-2)(s+1)(s+3)}$$

$$(c) H_3(s) = \frac{(s-2)(s+1)}{(s-2)(s+3)(s+4)}$$

$$(d) H_4(s) = \frac{10}{s^2+2s+5}$$

8 Interconexão de Sistemas no Espaço de Estados

Exercício 8.1

Considere os dois sistemas na forma $\dot{q}_i = A_i q_i + B_i u_i$, $y_i = C_i q_i$:

$$\Sigma_1 : \quad \dot{q}_1 = -2q_1 + u_1, \quad y_1 = q_1$$

$$\Sigma_2 : \quad \dot{q}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -4 \end{bmatrix} q_2 + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u_2, \quad y_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} q_2$$

- Determine as funções de transferência $G_1(s)$ e $G_2(s)$ de Σ_1 e Σ_2 , respectivamente.
- Determine uma realização em espaço de estados para a conexão em cascata $\Sigma_1 \rightarrow \Sigma_2$ (a saída de Σ_1 alimenta a entrada de Σ_2).
- Determine uma realização em espaço de estados para a conexão em paralelo (ambos os sistemas recebem a mesma entrada u e suas saídas são somadas: $y = y_1 + y_2$).

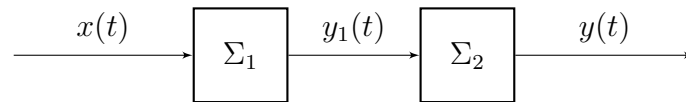


Figura 8: Conexão em série (cascata) para Exercício 8.1(b).

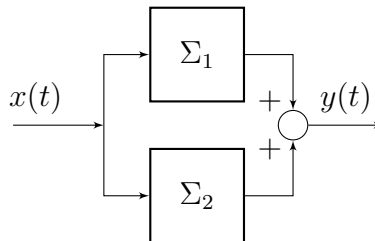


Figura 9: Conexão em paralelo para Exercício 8.1(c).

Exercício 8.2

Considere os dois sistemas na forma $\dot{q}_i = A_i q_i + B_i u_i$, $y_i = C_i q_i$:

$$\Sigma_1 : \quad \dot{q}_1 = -3q_1 + 2u_1, \quad y_1 = q_1$$

$$\Sigma_2 : \quad \dot{q}_2 = -5q_2 + u_2, \quad y_2 = 4q_2$$

- Determine as funções de transferência $G_1(s)$ e $G_2(s)$ de Σ_1 e Σ_2 , respectivamente.
- Determine uma realização em espaço de estados para a conexão em cascata $\Sigma_1 \rightarrow \Sigma_2$ (a saída de Σ_1 alimenta a entrada de Σ_2).
- Determine uma realização em espaço de estados para a conexão em paralelo (ambos os sistemas recebem a mesma entrada u e suas saídas são somadas: $y = y_1 + y_2$).

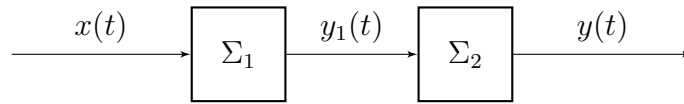


Figura 10: Conexão em série (cascata) para Exercício 8.2(b).

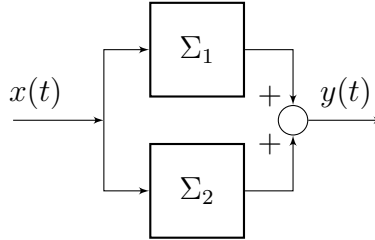


Figura 11: Conexão em paralelo para Exercício 8.2(c).

Exercício 8.3

Considere dois sistemas LTI descritos no espaço de estados:

Sistema direto (planta) G , com entrada $e(t)$ e saída $y(t)$:

$$\dot{q}_1 = A_1 q_1 + B_1 e, \quad y = C_1 q_1$$

Sistema de realimentação H , com entrada $y(t)$ e saída $y_2(t)$:

$$\dot{q}_2 = A_2 q_2 + B_2 y, \quad y_2 = C_2 q_2$$

Os dois sistemas são conectados em realimentação negativa, de modo que:

$$e(t) = x(t) - y_2(t)$$

sendo $x(t)$ a entrada externa do sistema em malha fechada e $y(t)$ a sua saída.

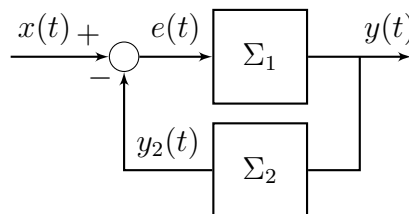


Figura 12: Conexão em realimentação para o Exercício 8.3.

Definindo o vetor de estado da malha fechada como $q = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix}$, encontre as matrizes A , B e C da representação no espaço de estados $\dot{q} = Aq + Bx$, $y = Cq$, para os dois casos abaixo:

(a)

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}, \quad B_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -4 \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}$$

(b)

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -4 \end{bmatrix}, \quad B_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C_1 = [2 \quad 0]$$

$$A_2 = [-2], \quad B_2 = [1], \quad C_2 = [1]$$

Exercício 8.4

Considere uma conexão em realimentação negativa em que a planta G é descrita no espaço de estados por:

$$\dot{q}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -4 & -5 \end{bmatrix} q_1 + \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} e, \quad y = [1 \quad 0] q_1$$

e o ramo de realimentação é um sistema com função de transferência:

$$H(s) = \frac{5s}{2s + 1}$$

A entrada externa é $x(t)$, a saída do sistema é $y(t)$, e $e(t) = x(t) - y_2(t)$, onde $y_2(t)$ é a saída de $H(s)$ quando sua entrada é $y(t)$.

(a) Obtenha a realização no espaço de estados (A, B, C) resultante da conexão em realimentação do sistema completo, definindo $q = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix}$ como o vetor de estado da malha fechada, onde q_2 é o estado associado a $H(s)$.

(b) Obtenha a função de transferência de malha fechada $H_{mf}(s) = \frac{Y(s)}{X(s)}$.

9 Projeto de Controladores por Realimentação de Estados

Exercício 9.1

Considere o sistema:

$$\dot{q} = Aq + Bx, \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

(a) Calcule os polos de malha aberta (autovalores de A) e verifique que o sistema é controlável.

(b) Aplique o controlador por realimentação de estados $x = Kq + v$, com $K = [k_1 \quad k_2]$. Determine os ganhos k_1 e k_2 de forma que os polos do sistema em malha fechada

$$\dot{q} = (A + BK)q + Bv$$

sejam -2 e -3 .

Exercício 9.2

Considere o sistema descrito pela seguinte função de transferência, que relaciona a saída $Y(s)$ e a entrada $X(s)$:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{1}{s^2 - s - 2}$$

- Calcule os polos de malha aberta do sistema e identifique o polo instável.
- Aplique o controlador por realimentação de estados $x = Kq + v$, com $K = [k_1 \ k_2]$, assumindo que q é o vetor de estados. Determine os ganhos k_1 e k_2 de forma que os polos do sistema em malha fechada sejam -2 e -3 .

Dica: para resolver este problema, converta a função de transferência numa realização de equações de estado na forma canônica controlável antes de calcular os ganhos do controlador.

10 Extra

Exercício 10.1

O modelo de espaço de estados não linear em tempo contínuo a seguir tem sido usado para representar a evolução temporal da concentração de glicose $y(t)$ no plasma sanguíneo em resposta à concentração de insulina $x(t)$ no plasma:

$$\begin{aligned}\frac{dq_1(t)}{dt} &= -k_1(q_1(t) - 90) - q_1(t)q_2(t), \\ \frac{dq_2(t)}{dt} &= -k_2q_2(t) + k_3(x(t) - 11), \\ y(t) &= q_1(t).\end{aligned}$$

Aqui, $q_1(t) = y(t)$ é a concentração de glicose no plasma, enquanto $q_2(t)$ representa a atividade efetiva da insulina. Os parâmetros k_1 , k_2 e k_3 são constantes positivas; admita que k_1 seja diferente de k_2 .

- Determine o estado de equilíbrio desse modelo quando $x(t)$ permanece fixo no valor $x = 11$, isto é, determine os valores de equilíbrio $\bar{q}_1$ e $\bar{q}_2$ das duas variáveis de estado.
- Escreva o modelo de espaço de estados LTI linearizado que governa pequenas perturbações $q_{e1}(t)$, $q_{e2}(t)$, $x_e(t)$ e $y_e(t)$ das variáveis de estado, da entrada e da saída em relação aos respectivos valores de equilíbrio.
- Com $x_e(t)$ identicamente nulo, isto é, com $x(t)$ fixo em 11, é possível que $q_{e1}(t)$ varie sem que $q_{e2}(t)$ varie? É possível que $q_{e2}(t)$ varie sem que $q_{e1}(t)$ varie?