

Lista de Exercícios

Sinais e Sistemas em Tempo Contínuo

Série de Fourier e Análise no Tempo Contínuo

Universidade de Brasília
Departamento de Engenharia Elétrica

1 Fundamentos e Definições Básicas

Exercício 1.1

Verifique se os sinais a seguir são periódicos ou aperiódicos, justificando. Para os sinais periódicos, calcule a frequência fundamental e determine quais harmônicas (1^{a} , 2^{a} , 3^{a} , etc.) estão presentes na série.

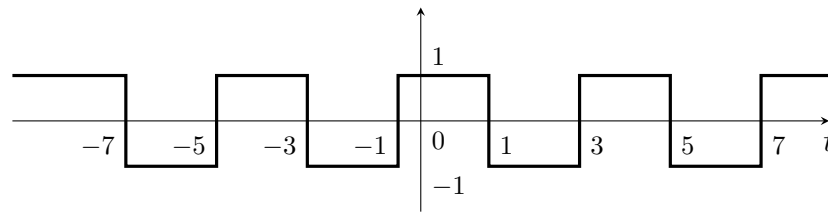
- (a) $x(t) = 3 \sin(t) + 2 \sin(3t)$
- (b) $x(t) = 2 + 5 \sin(4t) + 4 \cos(7t)$
- (c) $x(t) = 2 \sin(3t) + 7 \cos(\pi t)$
- (d) $x(t) = 7 \cos(\pi t) + 5 \sin(2\pi t)$
- (e) $x(t) = 3 \cos(\sqrt{2}t) + 5 \cos(2t)$
- (f) $x(t) = \sin\left(\frac{5}{2}t\right) + 3 \cos\left(\frac{6}{5}t\right) + 3 \sin\left(\frac{1}{7}t + 30^\circ\right)$
- (g) $x(t) = \sin(3t) + \cos\left(\frac{15}{4}t\right)$
- (h) $x(t) = [3 \sin(2t) + \sin(5t)]^2$
- (i) $x(t) = [5 \sin(2t)]^3$

2 Série Trigonométrica de Fourier

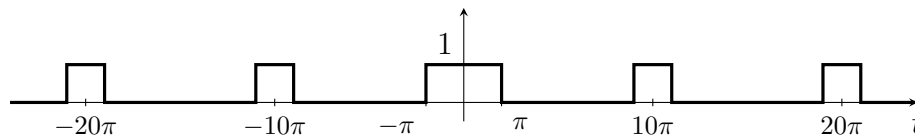
Exercício 2.1

Para cada um dos sinais a seguir, calcule a série de Fourier trigonométrica usando as equações de análise (Eqs. 6.11a, 6.11b e 6.11c do Lathi) e, em seguida, determine sua forma compacta. Quando possível, use os efeitos de simetria par e ímpar.

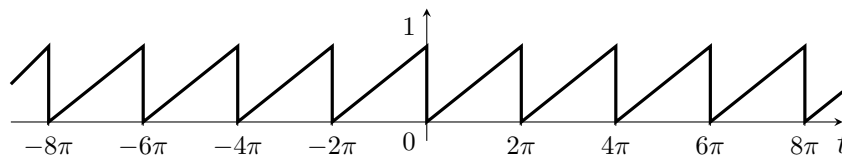
- (a) Onda quadrada simétrica:



(b) Trem de pulsos retangulares:



(c) Onda dente de serra:



Exercício 2.2

Dado o sinal periódico $x(t)$ com período $T_0 = \pi$ representado pela série trigonométrica de Fourier:

$$x(t) = 3 + 4 \cos(2t) + 2 \sin(2t) + 3 \cos(4t) - \sin(4t) + 2 \cos(6t)$$

Pede-se:

- Determine a série trigonométrica compacta de Fourier de $x(t)$.
- Determine a série exponencial de Fourier de $x(t)$.
- Trace o espectro de amplitude C_n e fase θ_n (série compacta).
- Trace o espectro exponencial D_n e $\angle D_n$.

Exercício 2.3

Calcule os coeficientes C_n e θ_n da forma compacta da série de Fourier trigonométrica dos seguintes sinais:

- $x(t) = 3 \cos(t) + \sin(5t - \pi/6) - 2 \cos(8t - \pi/3)$
- $x(t) = 3 + \sqrt{3} \cos(2t) + \sin(2t) + \sin(3t) - \frac{1}{2} \cos(5t + \pi/3)$

3 Propriedades de Simetria e seu Impacto

Exercício 3.1

Analise os sinais periódicos abaixo e, sem calcular os coeficientes, determine:

- Quais coeficientes são nulos ($a_n = 0$ ou $b_n = 0$) para cada sinal.
- Se os coeficientes são reais, imaginários puros ou complexos gerais.
- Se o espectro de fase é uma função par ou ímpar.

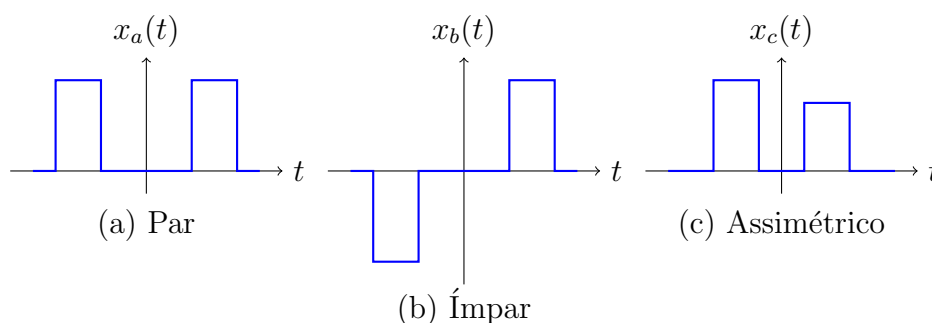


Figura 1: Sinais com diferentes simetrias.

Exercício 3.2

Considere o sinal periódico de onda quadrada mostrado na Figura 2. Sua versão par pode ser escrita como $x_p(t) = x(t + 1)$.

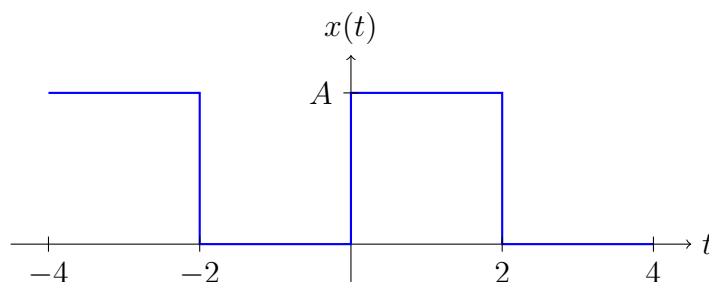


Figura 2: Onda quadrada com amplitude $A = 2$.

Pede-se:

- Verifique a simetria do sinal. Dica: se o sinal for decomposto em $x(t) = a_0 + z(t)$, em que a_0 é o valor médio do sinal, qual seria a simetria de $z(t)$?
- Determine a série trigonométrica compacta de Fourier de $x(t)$.
- Qual conclusão pode ser tirada sobre o efeito de deslocamento temporal na série de Fourier?

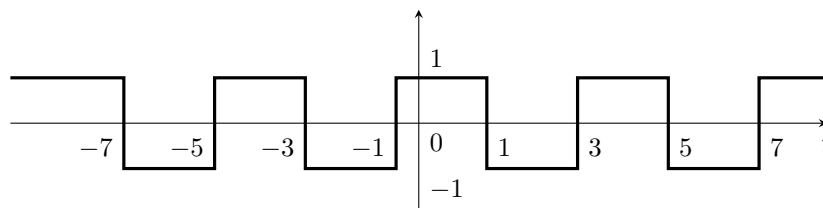
4 Série Exponencial de Fourier

Exercício 4.1

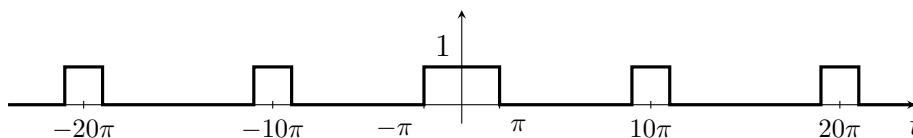
Para cada um dos sinais a seguir, calcule a série de Fourier exponencial, D_n , e, em seguida, determine o espectro de amplitude, $|D_n|$, e o espectro de fase, $\angle D_n$.

Obs: note que estes são os mesmos sinais que foram analisados na questão 2.1 da lista.

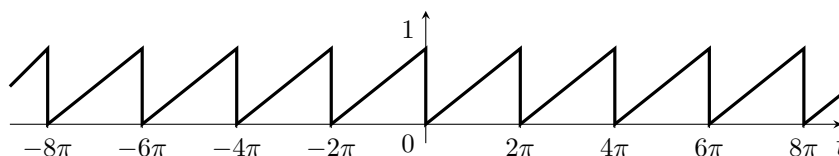
(a) Onda quadrada simétrica:



(b) Trem de pulsos retangulares:



(c) Onda dente de serra:



Exercício 4.2 *

Para cada um dos sinais a seguir, usando as relações $\cos \theta = \frac{e^{+j\theta} + e^{-j\theta}}{2}$ e $\sin \theta = \frac{e^{+j\theta} - e^{-j\theta}}{2j}$, calcule a série de Fourier exponencial, D_n , e, em seguida, determine o espectro de amplitude, $|D_n|$, e o espectro de fase, $\angle D_n$.

Obs: note que estes são os mesmos sinais que foram analisados na questão 2.3 da lista.

(a) $x(t) = 3 \cos(t) + \sin(5t - \pi/6) - 2 \cos(8t - \pi/3)$

(b) $x(t) = 3 + \sqrt{3} \cos(2t) + \sin(2t) + \sin(3t) - \frac{1}{2} \cos(5t + \pi/3)$

Exercício 4.3

Considere o trem de pulsos periódico mostrado na Figura 3, onde T é um parâmetro variável.

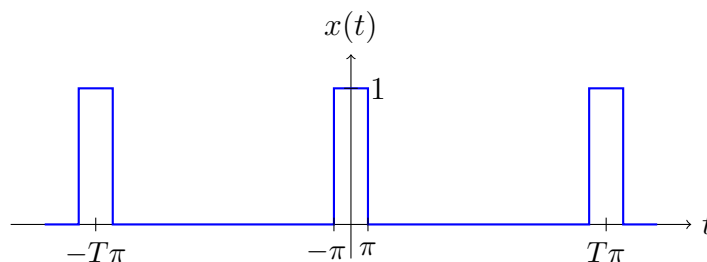


Figura 3: Trem de pulsos com largura 2π e período $T_0 = T\pi$.

Pede-se:

- Determine a série exponencial de Fourier de $x(t)$ em função de T .
- O que acontece com os coeficientes D_n e com a frequência fundamental ω_0 quando $T \rightarrow \infty$?
- Usando a definição da integral como o limite de uma soma de Riemann, expresse o somatório da série de Fourier como uma integral quando $T \rightarrow \infty$ e resolva essa integral.
- (EXTRA) Compare o resultado do item (c) com a transformada de Fourier de um pulso isolado.

5 Espectro de Fourier

Exercício 5.1

O espectro de amplitude e fase de um sinal periódico $x(t)$ com $\omega_0 = \pi$ rad/s está mostrado na Figura 4.

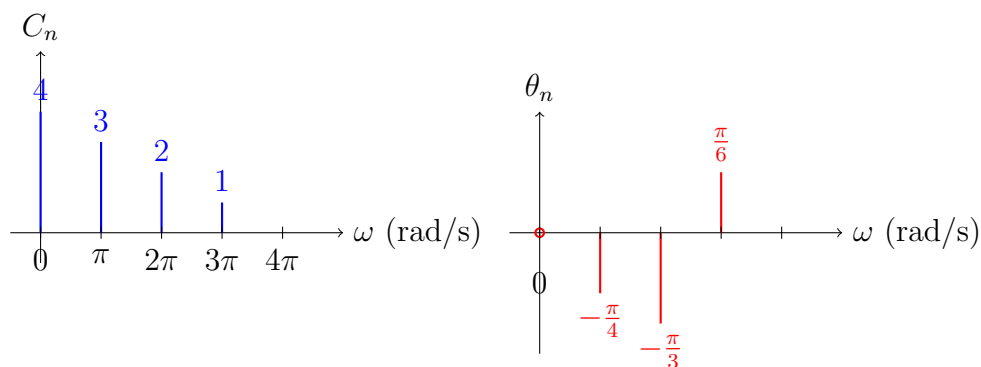


Figura 4: Espectros de amplitude C_n e fase θ_n .

Pede-se: A partir dos espectros fornecidos, determine os coeficientes da série exponencial de Fourier D_n e trace o espectro exponencial correspondente.

Exercício 5.2

O espectro exponencial de Fourier de um sinal periódico $x(t)$ com período $T_0 = 2$ s está mostrado na Figura 5.

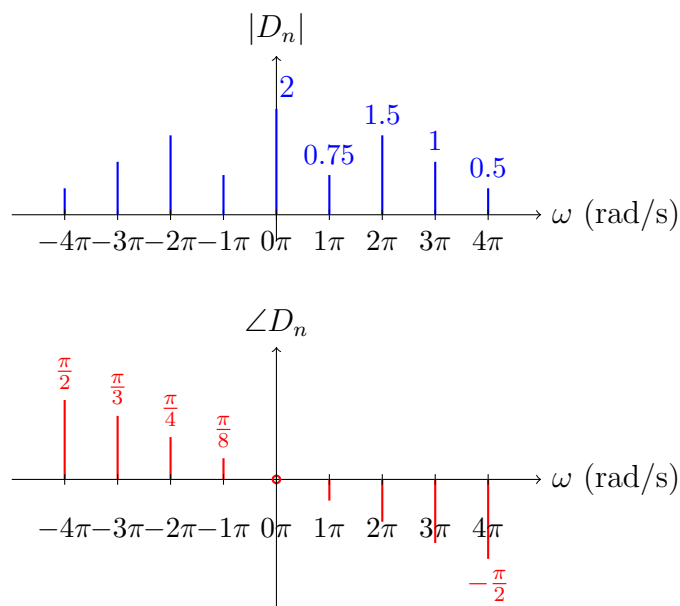


Figura 5: Espectro exponencial: módulo e fase de D_n .

Pede-se: A partir do espectro exponencial fornecido, determine os coeficientes C_n e θ_n da série trigonométrica compacta e trace os espectros correspondentes.

6 Potência, Energia e Teorema de Parseval

Exercício 6.1

Considere o sinal periódico triangular mostrado na Figura 6.

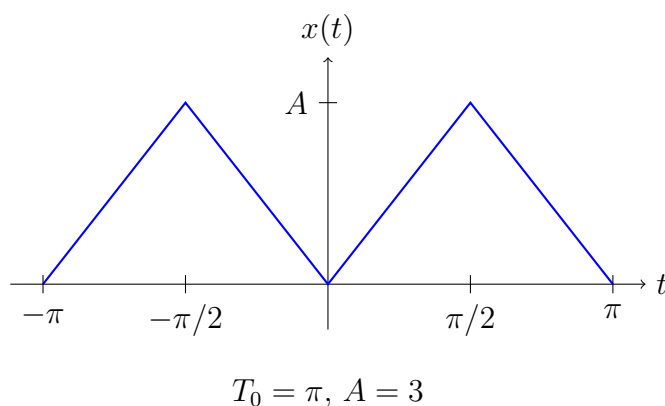


Figura 6: Sinal triangular periódico.

A série exponencial de Fourier deste sinal é:

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} D_n e^{jn2t}$$

onde:

$$D_n = \begin{cases} \frac{3}{2} & n = 0 \\ -\frac{6}{\pi^2 n^2} & n \text{ ímpar} \\ 0 & n \text{ par}, n \neq 0 \end{cases}$$

Pede-se:

- Calcule a potência de $x(t)$ diretamente a partir de sua forma temporal: $P_x = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} |x(t)|^2 dt$.
- Calcule a potência de $x(t)$ usando o teorema de Parseval: $P_x = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |D_n|^2$.
- Verifique que os resultados de (a) e (b) coincidem.
- Qual percentual da potência total está contido nas primeiras 5 harmônicas ímpares ($n = \pm 1, \pm 3, \pm 5, \pm 7, \pm 9$)?

Exercício 6.2

Um sinal periódico possui a seguinte série exponencial de Fourier com $\omega_0 = \pi$ rad/s:

$$x(t) = 2 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{3}{jn\pi} e^{jn\pi t} - \frac{3}{jn\pi} e^{-jn\pi t} \right]$$

Pede-se:

- Identifique os coeficientes D_n da série.
- Calcule a potência total do sinal usando o teorema de Parseval.
- Determine a potência da componente DC.
- Determine a potência da componente AC (todas as harmônicas).
- Calcule o valor RMS do sinal.

Exercício 6.3

O espectro de amplitude de um sinal periódico com $\omega_0 = 10$ rad/s está mostrado na Figura 7.

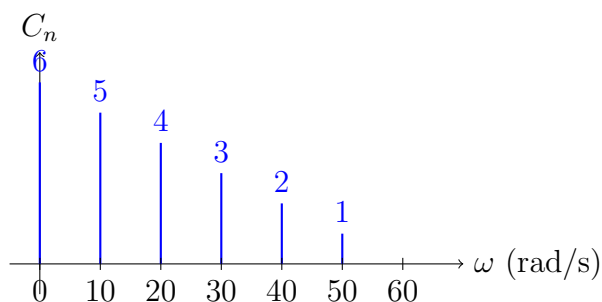


Figura 7: Espectro de amplitude C_n (as fases são todas nulas).

Pede-se:

- Calcule a potência total do sinal usando a relação entre C_n e a potência.
- Qual é o valor RMS do sinal?
- Se este sinal for aplicado a um resistor de 10Ω , qual será a potência dissipada?
- Calcule o percentual de potência contido até a 3ª harmônica (incluindo DC e harmônicas 1, 2 e 3).

7 Propriedades da Série de Fourier

Exercício 7.1

Dado que a série exponencial de Fourier de um sinal periódico $x(t)$ com período $T_0 = 2\pi$ é:

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} D_n e^{jnt}$$

onde:

$$D_n = \begin{cases} 1, & n = 0, \\ \frac{2}{jn\pi}, & n \text{ ímpar}, \\ 0, & n \text{ par}, n \neq 0. \end{cases}$$

Pede-se: Determine a série exponencial de Fourier do sinal deslocado $y(t) = x(t - 1)$.

Exercício 7.2

Considere dois sinais periódicos com mesmo período $T_0 = \pi$:

Sinal 1: Onda triangular simétrica (Figura 8)

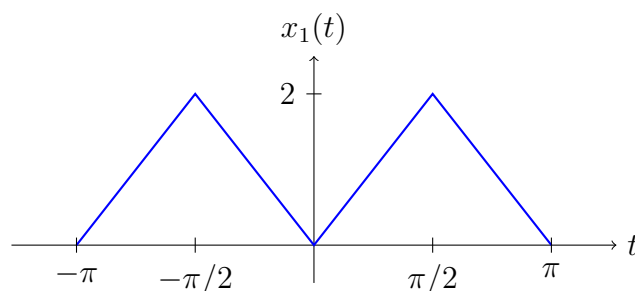


Figura 8: Dois períodos do sinal $x_1(t)$ - onda triangular.

Com série exponencial:

$$x_1(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} D_{1n} e^{jn2t}, \quad D_{1n} = \begin{cases} 1, & n = 0, \\ -\frac{4}{\pi^2 n^2}, & n \text{ ímpar}, \\ 0, & n \text{ par}, n \neq 0 \end{cases}$$

Sinal 2: Onda quadrada (Figura 9)

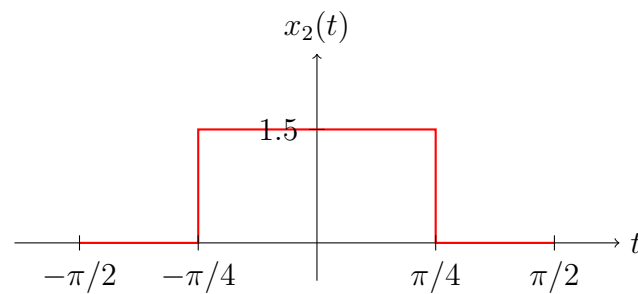


Figura 9: Um período do sinal $x_2(t)$ - onda quadrada.

Com série exponencial:

$$x_2(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} D_{2n} e^{jn2t}, \quad D_{2n} = \begin{cases} 0.75 & n = 0 \\ \frac{1.5}{\pi n} \sin\left(\frac{\pi n}{2}\right) & n \neq 0 \end{cases}$$

Pede-se: Determine a série exponencial de Fourier do sinal $y(t) = x_1(t) + x_2(t)$.

Exercício 7.3

Considere o sinal periódico de onda quadrada mostrado na Figura 10, cuja série exponencial de Fourier é:

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} D_n e^{jn\pi t}$$

onde:

$$D_n = \begin{cases} 0 & n = 0 \\ \frac{2}{jn\pi} [1 - (-1)^n] & n \neq 0 \end{cases}$$

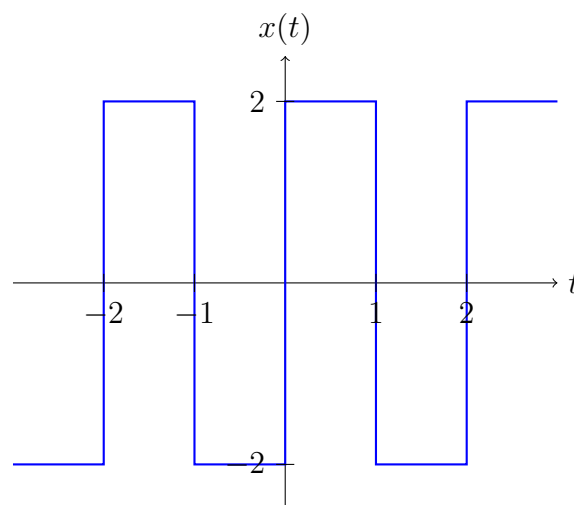


Figura 10: Sinal $x(t)$ do Exercício 9.

Pede-se:

- (a) Determine a forma do sinal $y(t) = \int_0^t x(\tau) d\tau$ e esboce seu gráfico.
- (b) Determine a série exponencial de Fourier de $y(t)$ usando a propriedade de integração.
- (c) Calcule os coeficientes D_n de $y(t)$ a partir dos coeficientes dados para $x(t)$.

Exercício 7.4

Verifique a seguinte equação:

$$u(t) \longleftrightarrow \pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}$$

8 Resposta de Sistemas Lineares (LCIT) a Entradas Periódicas

Exercício 8.1

Considere o seguinte sinal: $x(t) = \cos(5t) \sin(3t)$.

- (a) Determine a série de Fourier exponencial, D_n , desse sinal e, em seguida, determine e esboce o espectro de amplitude, $|D_n|$, e o espectro de fase, $\angle D_n$.
- (b) O que acontece se esse sinal for aplicado na entrada de um sistema passa-faixas ideal com a seguinte resposta em frequência?

$$H(j\omega) = \begin{cases} 1, & 2,5 \text{ rad/s} < |\omega| < 6 \text{ rad/s;} \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Exercício 8.2

Um sinal periódico de entrada, mostrado na Figura 11, é aplicado a um sistema LCIT com função de transferência:

$$H(s) = \frac{5}{s+2}$$

Em um período, tome $x(t) = 1$ para $|t| < 1/4$ e $x(t) = 0$ para $1/4 < |t| < 1$, com extensão periódica de período $T_0 = 2$.

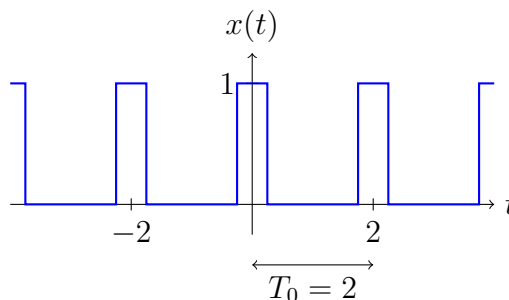


Figura 11: Sinal de entrada $x(t)$ - trem de pulsos.

Pede-se:

- (a) Determine a série exponencial de Fourier de $x(t)$.
- (b) Determine $H(j\omega)$ (resposta em frequência) do sistema.
- (c) Determine a série exponencial de Fourier da saída $y(t)$.
- (d) Escreva a expressão analítica de $y(t)$ como série.

Exercício 8.3

Um sinal periódico possui série trigonométrica de Fourier:

$$x(t) = 2 + 3 \cos(4t) + 4 \sin(4t) + 2 \cos(8t) + \sin(8t)$$

Este sinal é aplicado à entrada de um filtro passa-baixas com função de transferência:

$$H(s) = \frac{16}{s^2 + 4s + 16}$$

Pede-se:

- (a) Converta a série trigonométrica para a forma exponencial.
- (b) Calcule $H(jn\omega_0)$ para os valores relevantes de n .
- (c) Determine a saída $y(t)$ do filtro na forma de série trigonométrica.
- (d) Qual é a atenuação (em dB) da componente fundamental?

Exercício 8.4

O espectro de Fourier (série compacta) de um sinal periódico com $\omega_0 = 5$ rad/s está mostrado na Figura 12.

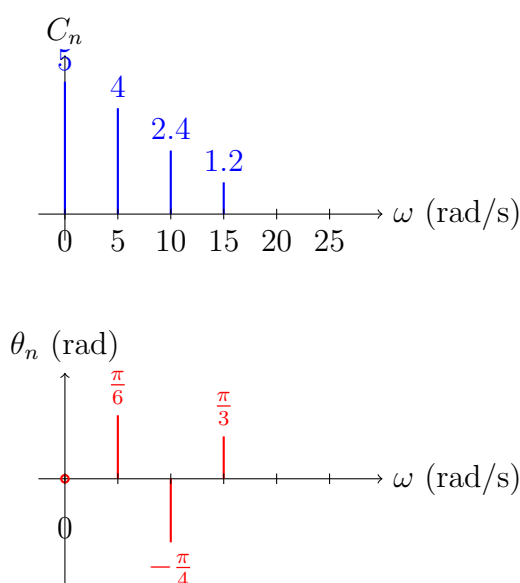


Figura 12: Espectro de amplitude e fase de $x(t)$.

Este sinal é aplicado a um sistema com função de transferência:

$$H(s) = \frac{20}{s + 4}$$

Pede-se:

- Escreva a série trigonométrica compacta de Fourier de $x(t)$.
- Calcule $|H(jn\omega_0)|$ e $\angle H(jn\omega_0)$ para $n = 0, 1, 2, 3$.
- Determine o espectro de amplitude e fase da saída $y(t)$.
- Escreva a expressão de $y(t)$.

Exercício 8.5

O espectro exponencial de Fourier de um sinal periódico com período $T_0 = 2$ s está mostrado na Figura 13.

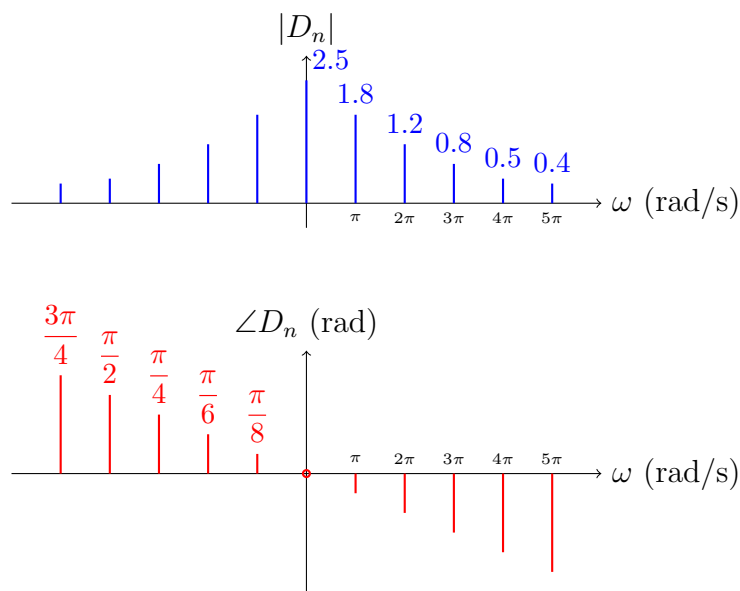


Figura 13: Espectro exponencial de $x(t)$.

Este sinal é aplicado a um sistema passa-faixa com função de transferência:

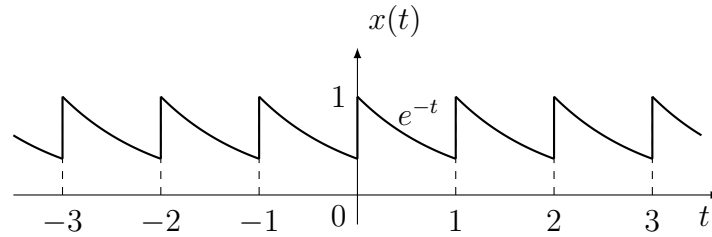
$$H(s) = \frac{s}{s^2 + 2s + (2\pi)^2}$$

Pede-se:

- Determine a resposta em frequência $H(j\omega)$ e calcule seus valores para $\omega = n \cdot \pi$ com $n = -5, \dots, 5$.
- Determine os coeficientes exponenciais de Fourier da saída.
- Trace o espectro exponencial da saída $y(t)$.
- Qual harmônica possui maior amplitude na saída? Por quê?

Exercício 8.6

Considere o seguinte sinal:



- Note que $x(t) = e^{-t}$ no intervalo $0 < t < 1$. Usando essa informação, determine a série de Fourier exponencial do sinal $x(t)$.
- Determine uma expressão para a resposta $y(t)$ obtida ao se aplicar o sinal $x(t)$ na entrada do sistema descrito pela equação diferencial abaixo. Dica: encontre primeiro a função de transferência $H(s)$ do sistema.

$$\frac{d}{dt}y(t) + y(t) = \frac{d}{dt}x(t)$$

9 Extra

Exercício 9.1

Um trem de pulsos retangulares, periódico com período T e razão cíclica τ/T , é definido por

$$p(t) = \begin{cases} 1, & |t| < \frac{\tau}{2}, \\ 0, & \frac{\tau}{2} < |t| < \frac{T}{2}, \end{cases} \quad p(t+T) = p(t) \quad \text{para todo } t,$$

em que $0 < \tau < T$. Considere também a resposta em frequência $H(\omega)$ de um canal de comunicação passa-baixas com largura de banda de 10 rad/s; por exemplo,

$$|H(\omega)| \approx 0 \quad \text{para } \omega > 10.$$

Se T e τ forem escolhidos adequadamente, podemos estimar $H(\omega)$ nos pontos $\omega = n\omega_0$ por

$$\hat{H}(n\omega_0) = \frac{1}{P_0}Y_n,$$

em que Y_n é o espectro da série exponencial de Fourier da saída $y(t)$ do canal em resposta à entrada $p(t)$, e P_0 é a componente contínua de $p(t)$.

- Usando integração direta, determine os coeficientes P_n da série exponencial de Fourier de $p(t)$.
- Determine um valor adequado de T para que $p(t)$, aplicado ao sistema $H(\omega)$, possua 21 frequências componentes dentro da largura de banda $0 \leq \omega \leq 10$.
- Supondo que T tenha sido escolhido adequadamente, determine uma razão cíclica τ/T adequada para que $\hat{H}(n\omega_0) \approx H(n\omega_0)$. Justifique cuidadosamente o resultado.

- (d) Do ponto de vista do uso de $p(t)$ para medir a resposta em frequência $H(\omega)$, o que acontece se T for escolhido adequadamente, mas τ/T for pequeno demais?
- (e) Do ponto de vista do uso de $p(t)$ para medir a resposta em frequência $H(\omega)$, o que acontece se T for escolhido adequadamente, mas τ/T for grande demais?