

Lista de Exercícios

Sinais e Sistemas em Tempo Contínuo

Transformada de Fourier

Universidade de Brasília
Departamento de Engenharia Elétrica

1 Fundamentos e Definição da Transformada de Fourier

Exercício 1.1

Usando a definição da transformada de Fourier, calcule a transformada de Fourier do sinal $x(t)$ da figura abaixo.

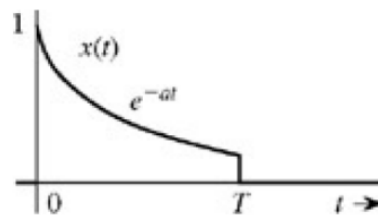


Figura 1:

Exercício 1.2

Mostre que, se $x(t)$ for uma função par de t , então a integral de Fourier se reduz a

$$X(\omega) = 2 \int_0^{\infty} x(t) \cos(\omega t) dt.$$

Se $x(t)$ for uma função ímpar de t , mostre que a integral de Fourier se reduz a

$$X(\omega) = -2j \int_0^{\infty} x(t) \sin(\omega t) dt.$$

Daí, mostre que, se $x(t)$ for uma função real e par de t , então $X(\omega)$ será uma função real e par de ω . Além disso, se $x(t)$ for uma função real e ímpar de t , então $X(\omega)$ será uma função imaginária e ímpar de ω .

Exercício 1.3

A partir da definição

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t} dt,$$

obtenha as transformadas de Fourier dos sinais mostrados na figura.

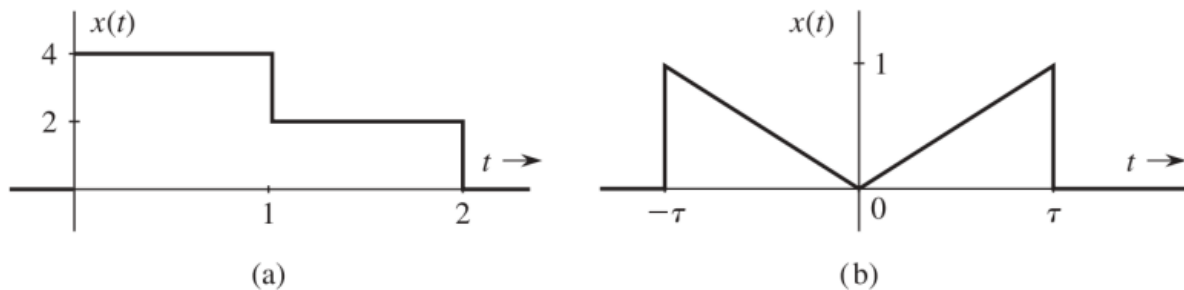


Figura 2:

Exercício 1.4

A partir da definição

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)e^{j\omega t} d\omega,$$

obtenha as transformadas de Fourier inversas dos espectros mostrados na figura.

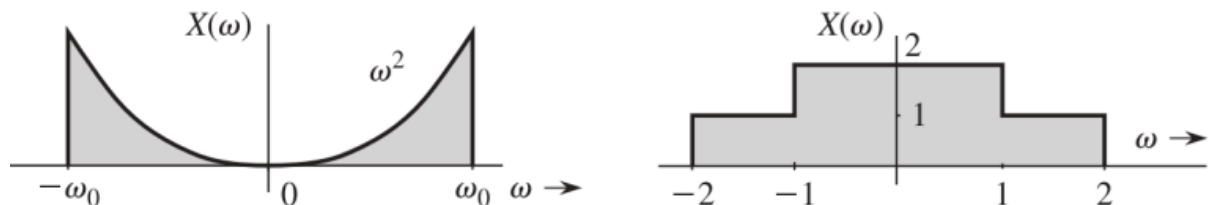


Figura 3:

2 Transformadas de Funções Especiais e Conexão com Laplace

Exercício 2.1

Esboce o gráfico de cada uma das seguintes funções:

(a) $x(t) = \text{rect}\left(\frac{t}{2}\right);$

(b) $X(\omega) = \Delta\left(\frac{3\omega}{100}\right);$

(c) $x(t) = \text{rect}\left(\frac{t-10}{8}\right);$

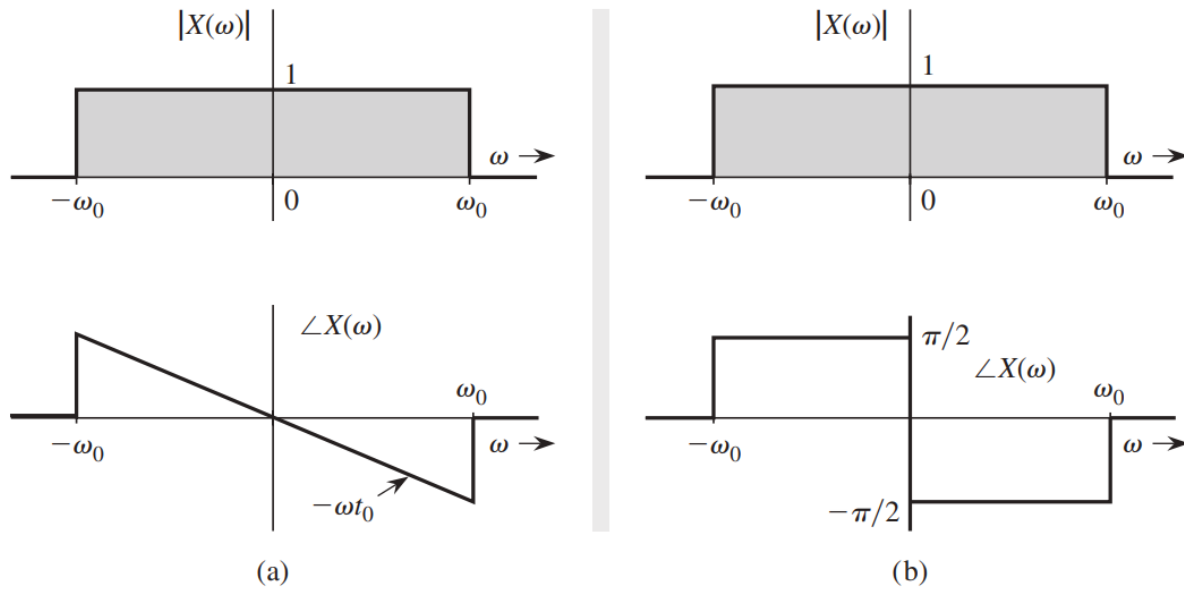


Figura 4:

(d) $X(\omega) = \text{sinc}\left(\frac{\pi\omega}{5}\right);$

(e) $X(\omega) = \text{sinc}\left(\frac{\omega}{5} - 2\pi\right);$

(f) $x(t) = \text{sinc}\left(\frac{t}{5}\right) \text{rect}\left(\frac{t}{10\pi}\right).$

Exercício 2.2

Usando a definição da transformada de Fourier, mostre que

$$x_1(t) = \text{rect}(t - 5) \iff X_1(\omega) = \text{sinc}\left(\frac{\omega}{2}\right) e^{-j5\omega}.$$

Trace os espectros de amplitude e de fase resultantes.

Exercício 2.3

Obtenha a transformada de Fourier inversa de $X(\omega)$ para os espectros mostrados na figura. Observe que espectros de fase diferentes, com o mesmo espectro de amplitude, representam sinais totalmente diferentes.

3 Propriedades da Transformada de Fourier

Exercício 3.1

Usando a definição da transformada de Fourier, mostre que a transformada de Fourier inversa de

$$X_2(\omega) = \text{rect}\left(\frac{\omega - 10}{2\pi}\right)$$

é

$$x_2(t) = \text{sinc}(\pi t)e^{j10t}.$$

Exercício 3.2

A transformada de Fourier do sinal $x(t)$ mostrado na figura é

$$X(\omega) = \frac{e^{j\omega} - j\omega e^{j\omega} - 1}{\omega^2}.$$

Use esse resultado e as propriedades de deslocamento no tempo e de escalamento no tempo para determinar as transformadas de Fourier dos sinais $x_i(t)$, $i = 1, 2, \dots, 5$, mostrados na figura.

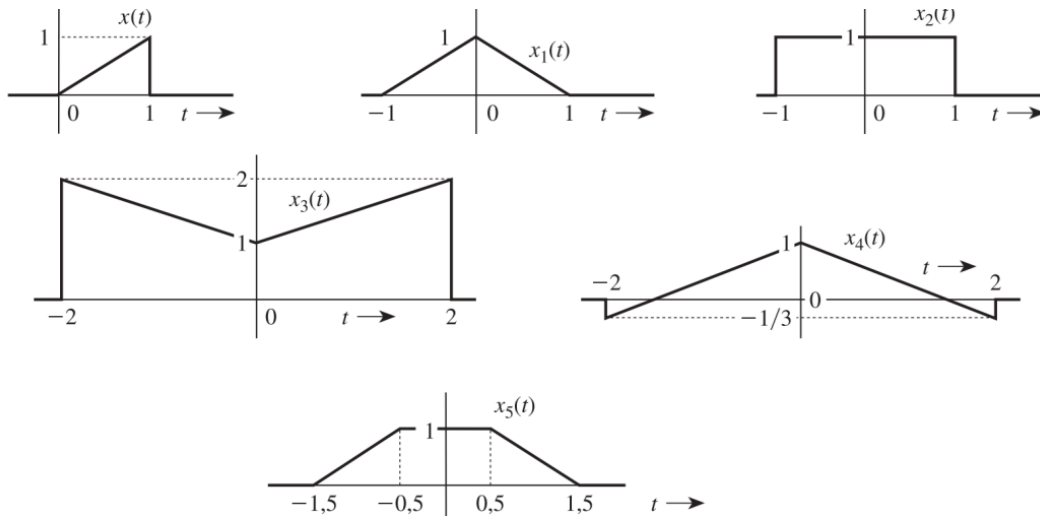


Figura 5:

Exercício 3.3

Se $x(t) \iff X(\omega)$, use as propriedades de deslocamento no tempo e de linearidade para mostrar que

$$x(t+T) + x(t-T) \iff 2X(\omega) \cos(T\omega).$$

Use esse resultado e uma tabela de transformadas de Fourier para determinar as transformadas de Fourier dos sinais mostrados na figura.

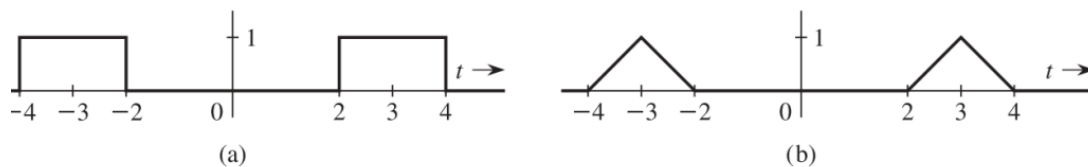


Figura 6:

Exercício 3.4

Mostre a relação dual

$$x(t) \cos(\omega_0 t) \iff \frac{1}{2} [X(\omega - \omega_0) + X(\omega + \omega_0)].$$

Exercício 3.5

Use a propriedade de deslocamento na frequência e uma tabela de transformadas de Fourier para determinar as transformadas de Fourier inversas dos espectros mostrados na figura.

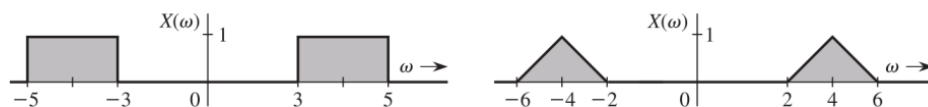


Figura 7:

Exercício 3.6

Prove os seguintes resultados:

(a) Se $x(t) \iff X(\omega)$, então

$$\frac{dx(t)}{dt} \iff j\omega X(\omega).$$

(b) Se $x(t) \iff X(\omega)$, então

$$-jtx(t) \iff \frac{dX(\omega)}{d\omega}.$$

4 Análise de Sistemas Lineares e Transmissão de Sinais

Exercício 4.1

Um sistema LCIT estável é especificado pela resposta em frequência

$$H(\omega) = -\frac{1}{j\omega - 2}.$$

Obtenha a resposta ao impulso desse sistema e mostre que ele é um sistema não causal. Obtenha a resposta de estado nulo desse sistema para cada uma das seguintes entradas:

(a) $x(t) = e^{-t}u(t)$;

(b) $x(t) = e^t u(-t)$.

Exercício 4.2

Os sinais

$$x_1(t) = 10^4 \text{ret}(10^4 t) \quad \text{e} \quad x_2(t) = \delta(t)$$

são aplicados às entradas dos filtros passa-baixas ideais

$$H_1(\omega) = \text{ret}\left(\frac{\omega}{40000\pi}\right) \quad \text{e} \quad H_2(\omega) = \text{ret}\left(\frac{\omega}{20000\pi}\right),$$

como mostrado na figura. As saídas $y_1(t)$ e $y_2(t)$ desses filtros são multiplicadas para obter o sinal $y(t) = y_1(t)y_2(t)$.

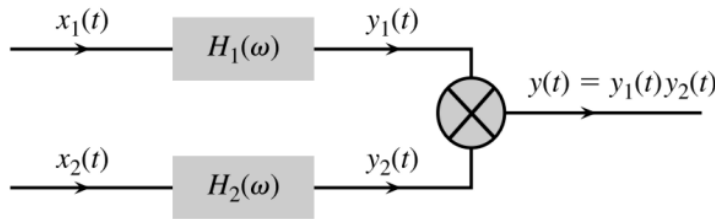


Figura 8:

- Trace $X_1(\omega)$ e $X_2(\omega)$.
- Trace $H_1(\omega)$ e $H_2(\omega)$.
- Trace $Y_1(\omega)$ e $Y_2(\omega)$.
- Obtenha as larguras de faixa espectral de $y_1(t)$, $y_2(t)$ e $y(t)$.

Lembrete:

$$\text{ret}\left(\frac{t}{\tau}\right) \Longleftrightarrow \tau \text{sinc}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right), \quad \delta(t) \Longleftrightarrow 1,$$

e

$$y_1(t)y_2(t) \Longleftrightarrow \frac{1}{2\pi} Y_1(\omega) * Y_2(\omega).$$

Exercício 4.3

Um sistema LCIT estável tem a função de transferência

$$H(s) = \frac{1}{s+1}.$$

Obtenha a resposta de estado nulo para cada uma das seguintes entradas:

- $x(t) = e^{-2t}u(t)$;
- $x(t) = e^{-t}u(t)$;
- $x(t) = e^t u(-t)$;
- $x(t) = u(t)$.

5 Filtragem: Filtros Ideais e Práticos

Exercício 5.1

Considere o filtro com resposta em frequência

$$H(\omega) = e^{-(k\omega^2 + j\omega t_0)}.$$

Mostre, pelos critérios no domínio do tempo e no domínio da frequência, que esse filtro não é realizável. Ele pode ser aproximadamente realizado escolhendo-se t_0 suficientemente grande? Escolha seu próprio critério para uma realização aproximada e determine um valor adequado de t_0 .

Dica: use o par 22 da Tabela 7.1.

Exercício 5.2

Mostre que um filtro com resposta em frequência

$$H(\omega) = \frac{2(10^5)}{\omega^2 + 10^{10}} e^{-j\omega t_0}$$

é não realizável. Esse filtro pode ser aproximadamente realizado escolhendo-se t_0 suficientemente grande? Escolha seu próprio critério para uma realização aproximada e determine um valor adequado de t_0 .

Exercício 5.3

Determine se os filtros com as seguintes respostas em frequência $H(\omega)$ são fisicamente realizáveis. Se não forem realizáveis, eles podem ser aproximadamente realizados permitindo-se um atraso finito na resposta?

(a) $10^{-6} \text{sinc}(10^{-6}\omega)$;

(b) $10^{-4} \Delta\left(\frac{\omega}{40000\pi}\right)$;

(c) $2\pi\delta(\omega)$.

6 Energia do Sinal e Largura de Faixa

Exercício 6.1

Mostre que a energia do pulso gaussiano

$$x(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/(2\sigma^2)}$$

é $1/(2\sigma\sqrt{\pi})$. Verifique o resultado usando o teorema de Parseval para calcular a energia a partir de $X(\omega)$.

Dica: consulte o par 22 da Tabela 7.1 e use

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2} dx = \sqrt{2\pi}.$$

Exercício 6.2

Use o teorema de Parseval para mostrar que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \text{sinc}^2(kx) dx = \frac{\pi}{k}.$$

Exercício 6.3

Para o sinal

$$x(t) = \frac{2a}{t^2 + a^2},$$

determine a largura de faixa essencial B (em hertz) de $x(t)$ tal que a energia contida nas componentes espectrais de $x(t)$ de frequências abaixo de B Hz seja 99% da energia total E_x do sinal.

Informação útil:

$$e^{-a|t|} \Longleftrightarrow \frac{2a}{a^2 + \omega^2}, \quad E_x = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |X(\omega)|^2 d\omega.$$

Além disso, a energia na faixa $[0, \omega_B]$ é

$$E_{[0, \omega_B]} = \frac{1}{\pi} \int_0^{\omega_B} |X(\omega)|^2 d\omega.$$

Exercício 6.4

Generalize o teorema de Parseval para mostrar que, para dois sinais reais $x_1(t)$ e $x_2(t)$ transformáveis em Fourier,

$$\int_{-\infty}^{\infty} x_1(t)x_2(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X_1(-\omega)X_2(\omega) d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X_1(\omega)X_2(-\omega) d\omega.$$

7 Extra

Exercício 7.1

A constante de tempo de um sistema passa-baixas é frequentemente definida como a largura de sua resposta ao impulso unitário $h(t)$; veja a Seção 2.6-2 (Lathi). Um pulso de entrada $p(t)$ aplicado a esse sistema se comporta como um impulso cuja intensidade é igual à área de $p(t)$ quando a largura de $p(t)$ é muito menor que a constante de tempo do sistema e desde que $p(t)$ seja um pulso passa-baixas, isto é, que seu espectro esteja concentrado nas baixas frequências.

Verifique esse comportamento considerando um sistema cuja resposta ao impulso unitário é

$$h(t) = \text{rect}\left(\frac{t}{10^{-3}}\right).$$

O pulso de entrada é o pulso triangular

$$p(t) = \Delta\left(\frac{t}{10^{-6}}\right).$$

Mostre que a resposta do sistema a esse pulso é aproximadamente igual à resposta do sistema à entrada

$$A\delta(t),$$

em que A é a área sob o pulso $p(t)$.

Exercício 7.2

Um sinal passa-baixas $x(t)$ é aplicado a um dispositivo quadrático. A saída $x^2(t)$ do dispositivo é aplicada a um filtro passa-baixas de largura de banda Δf , em hertz, conforme a figura. Mostre que, se Δf for muito pequena, $\Delta f \rightarrow 0$, a saída do filtro será o sinal contínuo

$$y(t) \approx 2E_x\Delta f.$$

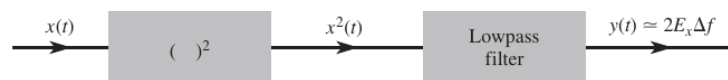


Figure P7.6-4

Sugestão: se

$$x^2(t) \Longleftrightarrow A(\omega),$$

mostre que

$$Y(\omega) \approx [4\pi A(0)\Delta f]\delta(\omega) \quad \text{quando } \Delta f \rightarrow 0.$$

Em seguida, mostre que $A(0) = E_x$.