

ENE0067 – Sinais e Sistemas em Tempo Contínuo

Classificação de Sinais e Conceitos Fundamentais

Prof. Eduardo Stockler Tognetti

Departamento de Engenharia Elétrica
Universidade de Brasília – UnB



Sumário

- 1 Revisão da Aula Anterior
- 2 Classificação de Sinais
 - Sinais Contínuos e Discretos no Tempo
 - Sinais Analógicos e Digitais
 - Sinais Periódicos e Não Periódicos
 - Sinais de Energia e Potência
 - Sinais Determinísticos e Aleatórios
- 3 Revisão: Números Complexos e Senóides
 - Álgebra de Números Complexos
 - Senóides e a Fórmula de Euler
- 4 Modelos Úteis de Sinais
 - Função Degrau Unitário
 - Função Impulso Unitário
 - Função Exponencial
- 5 Funções Pares e Ímpares
 - Propriedades de Funções Pares e Ímpares
 - Decomposição em Componentes Pares e Ímpares
- 6 Exercícios e Aplicações
- 7 Resumo e Conclusões

Conceitos principais estudados:

- **Tamanho do Sinal:**

- Energia: $E_x = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt$
- Potência: $P_x = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T |x(t)|^2 dt$

- **Operações com Sinais:**

- Deslocamento temporal: $x(t) \rightarrow x(t \mp T)$
- Escalamento temporal: $x(t) \rightarrow x(at)$
- Reversão temporal: $x(t) \rightarrow x(-t)$

Hoje: Classificação de sinais, revisão matemática e modelos fundamentais

Objetivos desta Seção

- Compreender as diferentes **classes de sinais**
- Distinguir entre características temporais e de amplitude
- Identificar sinais de **energia** vs **potência**
- Reconhecer sinais **periódicos** e **não periódicos**
- Diferenciar sinais **determinísticos** e **aleatórios**

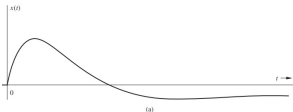
Classes de Sinais Estudadas

- 1 Sinais contínuos e discretos no tempo
- 2 Sinais analógicos e digitais
- 3 Sinais periódicos e não periódicos
- 4 Sinais de energia e potência
- 5 Sinais determinísticos e aleatórios

Sinais Contínuos vs Discretos no Tempo

Sinal Contínuo no Tempo:

- Especificado para valores **contínuos** de t
- $x(t)$ definido para $t \in \mathbb{R}$
- Exemplos:
 - Tensão elétrica
 - Sinal de áudio e vídeo
 - Temperatura ambiente



Sinal Discreto no Tempo:

- Especificado apenas para valores **discretos** de t
- $x[n]$ definido para $n \in \mathbb{Z}$
- Exemplos:
 - PIB trimestral
 - Vendas mensais
 - Índice IBOVESPA diário

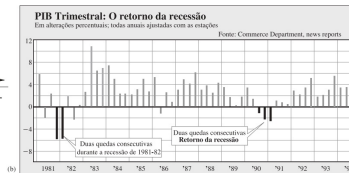


Figura 1: (a) Sinal contínuo no tempo e (b) sinal discreto no tempo. Fonte: Lathi, 2000.

Amostragem de sinais contínuos

- Sinais discretos podem ser obtidos por meio de amostragem de sinais contínuos.
- A sequência em tempo discreto obtido por uma amostragem uniforme de $x(t) = \cos(\omega t)$, $\omega = 2\pi f$, $f = 1/T$, $T = 0.5$, com intervalos 0.5s, 0.25s, 0.1s e 0.01s é mostrada abaixo.

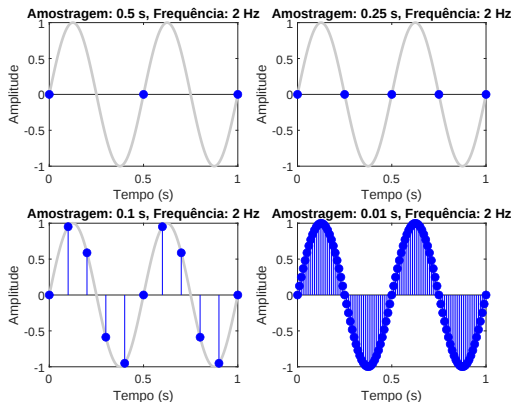


Figura 2: Amostragem de $x(t) = \cos(4\pi t)$. Fonte: Notas de aula Profa. Flávia M. G. S. A. Oliveira.

Conversão contínuo-discreto

- Amostragem: importante para manipulação computacional de dados físicos.
 - representações digitais de sinais de áudio (por exemplo, MP3)
 - representações digitais de imagens (por exemplo, JPEG)
- Reconstrução:
 - Segurador de ordem zero: comumente usado em dispositivos de saída de áudio, como tocadores de CD
 - Segurador linear por partes: comumente usado na renderização de imagens

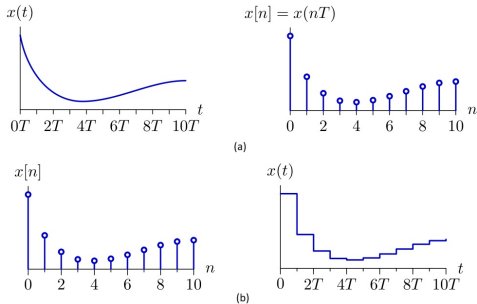


Figura 3: (a) Amostragem com período T : conversão do tempo contínuo para o discreto. (b). Reconstrução com segurador de ordem zero: conversão do tempo discreto para o contínuo. Fonte: MIT, Signals and Systems.

Conceito Importante

Tempo contínuo/discreto $\neq$ analógico/digital

Tempo: qualifica o **eixo horizontal** (variável independente)

Analógico/digital: qualifica o **eixo vertical** (amplitude)

Sinal Analógico:

- Amplitude pode assumir **qualquer valor** em faixa contínua
- **Infinitos** valores possíveis
- Exemplo: tensão de 0 a 5V

Sinal Digital:

- Amplitude assume **número finito** de valores
- Sinal **binário**: $M = 2$ valores
- Exemplo: $\{0V, 5V\}$ (binário)
- Sinal **M-ário**: M valores discretos

Sinais contínuo, discreto, analógico e digital

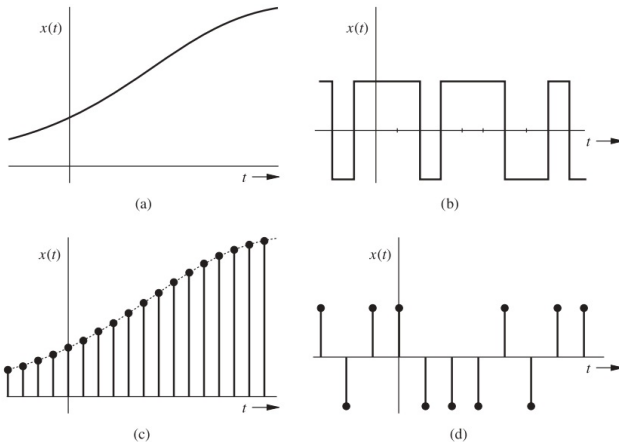


Figura 4: Exemplos de sinais: (a) analógico, contínuo no tempo, (b) digital, contínuo no tempo, (c) analógico, discreto no tempo e (d) digital, discreto no tempo. Fonte: Lathi, 2000.

Sinais analógicos e sinais digitais

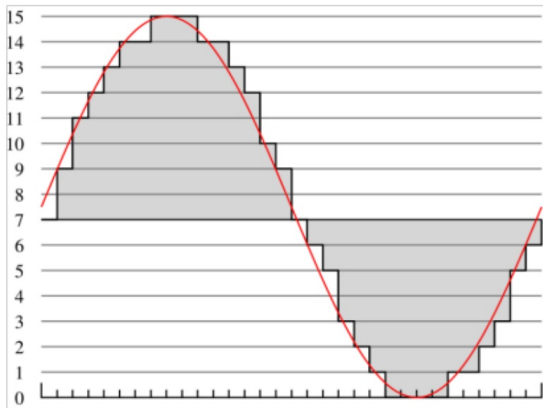


Figura 5: Sinal analógico (—) e digital (—).

Combinações Possíveis

Tipo	Tempo	Amplitude
Analógico Contínuo	Contínuo	Analógica
Analógico Amostrado	Discreto	Analógica
Digital Quantizado	Contínuo	Digital
Digital	Discreto	Digital

Aplicação: Computadores digitais trabalham com sinais digitais e discretos no tempo.

Definição

Um sinal $x(t)$ é **periódico** se:

$$x(t) = x(t + T_0) \quad \text{para algum } T_0 > 0 \quad (1)$$

O menor valor de T_0 é o **período fundamental**.

Propriedades importantes:

- Sinal periódico deve existir para $-\infty < t < \infty$
- Pode ser gerado pela **extensão periódica** de qualquer segmento de duração T_0
- $x(t) = x(t + kT_0)$ para qualquer inteiro k

Sinal Não Periódico

Qualquer sinal que não satisfaça a condição de periodicidade. Inclui sinais causais: $x(t) = 0$ para $t < 0$.

Exemplo: Análise de Periodicidade

Determine se os sinais são periódicos e encontre o período:

(a) $x_1(t) = \cos(2\pi t)$

$$x_1(t + T) = \cos(2\pi(t + T)) = \cos(2\pi t + 2\pi T) \quad (2)$$

$$= \cos(2\pi t) = x_1(t) \quad (3)$$

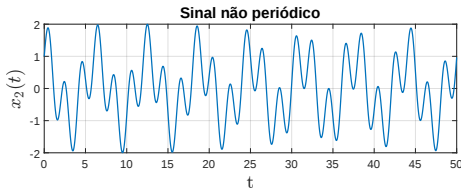
Para $2\pi T = 2\pi k$ (onde k é inteiro), temos $T = k$. O menor valor positivo:
 $T_0 = 1$ segundo.

(b) $x_2(t) = \cos(t) + \sin(\pi t)$

Para periodicidade: $T = k_1 \cdot 2\pi = k_2 \cdot 2$ (onde k_1, k_2 são inteiros)

$$\Rightarrow \frac{k_1}{k_2} = \frac{1}{\pi} \text{ (irracional)}$$

Conclusão: Não existe solução inteira $\Rightarrow$ sinal não periódico.



Classificação por Energia e Potência

Sinal de Energia: Sinal com **energia finita**

$$0 < E_x = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt < \infty \quad (4)$$

Consequência: $P_x = 0$ (potência nula)

Sinal de Potência: sinal com **potência finita não nula**

$$0 < P_x = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T |x(t)|^2 dt < \infty \quad (5)$$

Consequência: $E_x = \infty$ (energia infinita)

Importante

Um sinal **não pode** ser simultaneamente de energia e potência! Existem sinais que não são nem de energia nem de potência (ex: sinal rampa).

Características dos Sinais de Energia e Potência

Sinais de Energia:

- Todos os sinais **práticos**
- Duração **finita**
- Amplitude **limitada**
- Exemplos:
 - $e^{-at}u(t)$ com $a > 0$
 - Pulsos retangulares
 - Sinais causais limitados

Sinais de Potência:

- Duração **infinita**
- **Impossíveis** de gerar na prática
- Sinais **periódicos** (com área finita por período)
- Exemplos:
 - $\cos(\omega_0 t)$
 - Constantes
 - $e^{j\omega_0 t}$

Observação: Sinais periódicos são de potência se a área sob $|x(t)|^2$ em um período for finita.

Sinais Determinísticos vs Aleatórios

Sinal Determinístico:

- Descrição física **completamente conhecida**
- Forma **matemática** ou **gráfica** bem definida
- Valores **previsíveis**
- Exemplos:
 - $x(t) = 5 \cos(2\pi t)$
 - $x(t) = e^{-2t} u(t)$
 - Formas de onda conhecidas

Sinal Aleatório:

- Valores **não previsíveis** precisamente
- Descrição apenas **probabilística**
- Caracterizado por:
 - Valor médio
 - Variância
 - Densidade espectral
- Exemplos:
 - Ruído térmico
 - Variações climáticas
 - Sinais de comunicação

Escopo do Curso

Neste curso trabalharemos **exclusivamente** com sinais determinísticos. Sinais aleatórios estão além do escopo desta disciplina.

Números Complexos

Motivação: Resolução de equações algébricas

Exemplo: $0.5x^2 + x + 2 = 0$

Solução:

- $x = -1 \pm \sqrt{-3}$, contudo $\sqrt{-3}$ não é um número real.
- Definindo $j := \sqrt{-1}$ (i também é adotado ao invés de j), $x = -1 \pm j\sqrt{3}$

Analogia

Viajar entre duas cidades do país X pode ser mais rápido passando pelo país Y, mesmo que o destino final seja o país X.

Similarmente: Problemas reais podem ser resolvidos mais facilmente usando números complexos como intermediários.

Benefícios em Sinais e Sistemas:

- Representação compacta de senóides
- Análise fasorial
- Transformadas de Fourier e Laplace

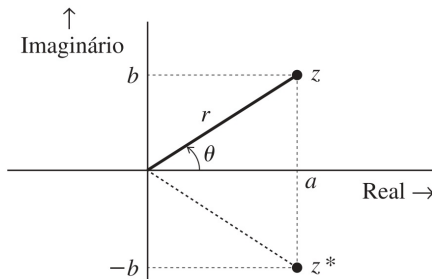
Representações de Números Complexos

Forma Cartesiana: $z = a + jb$

- $a = \text{Re}\{z\}$ (parte real)
- $b = \text{Im}\{z\}$ (parte imaginária)

Forma Polar: $z = re^{j\theta}$

- $r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ (módulo)
- $\theta = \angle z = \arctan(b/a)$ (ângulo)



Conversões:

$$a = r \cos \theta$$

$$b = r \sin \theta$$

$$r = \sqrt{a^2 + b^2} \quad (6)$$

$$\theta = \arctan(b/a) \quad (7)$$

Exponencial complexa

● **Número complexo:** $z = a + jb = re^{j\theta}$

$$e^{\pm jn\pi} = -1 \quad (n \text{ inteiro ímpar})$$

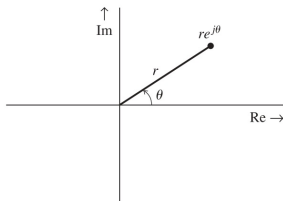
$$e^{j2n\pi} = 1 \quad (n \text{ inteiro})$$

$$e^{\pm j\pi/2} = \pm j$$

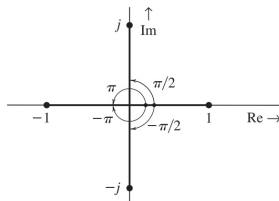
$$e^{-j\pi/2} = -j$$

$$e^{(\alpha + j\omega)t} = e^{\alpha t} e^{j\omega t} \Rightarrow$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e^{(\alpha + j\omega)t} = \begin{cases} 0, & \alpha < 0 \\ \infty, & \alpha > 0 \end{cases}$$



(a)



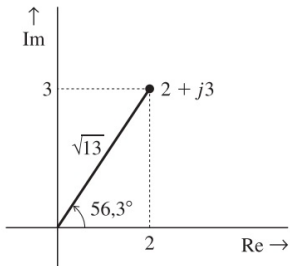
(b)

Fórmula de Euler

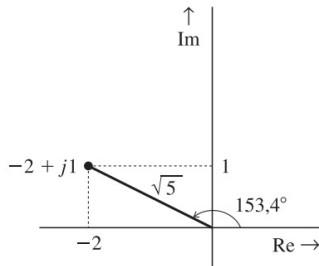
$$e^{j\theta} = \cos \theta + j \sin \theta$$

↪ Prova: série de Taylor ou verificando que $df(x)/dx = 0$, com $f(x) = (\cos x - j \sin x)e^{jx}$

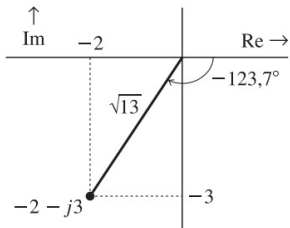
Forma Cartesiana para a forma polar



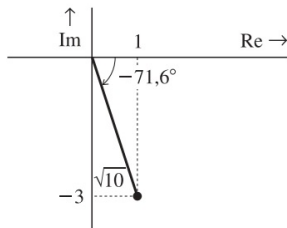
(a)



(b)



(c)



(d)

Operações com Números Complexos

Adição/Subtração: (forma cartesiana)

$$z_1 \pm z_2 = (a_1 \pm a_2) + j(b_1 \pm b_2) \quad (8)$$

Multiplicação: (forma polar)

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 r_2 e^{j(\theta_1 + \theta_2)} \quad (9)$$

Divisão: (forma polar)

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} e^{j(\theta_1 - \theta_2)} \quad (10)$$

Conjugado: $z^* = a - jb = re^{-j\theta}$

Propriedades úteis:

$$z + z^* = 2a = 2\text{Re}\{z\} \quad (11)$$

$$z \cdot z^* = |z|^2 = r^2 \quad (12)$$

Exemplo: Operações Complexas

Dados $z_1 = 3 + j4$ e $z_2 = 2 - j1$, calcule:

(a) Conversão para forma polar:

$$z_1 : |z_1| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5, \quad \angle z_1 = \arctan(4/3) = 53,13 \quad (13)$$

$$z_2 : |z_2| = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}, \quad \angle z_2 = \arctan(-1/2) = -26,57 \quad (14)$$

(b) Multiplicação:

$$z_1 \cdot z_2 = 5\sqrt{5}e^{j(53,13-26,57)} = 5\sqrt{5}e^{j26,56} \quad (15)$$

$$= (3 + j4)(2 - j1) = 6 - j3 + j8 + 4 = 10 + j5 \quad (16)$$

(c) Divisão:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{5}{\sqrt{5}}e^{j(53,13+26,57)} = \sqrt{5}e^{j79,7} \quad (17)$$

$$= \frac{3 + j4}{2 - j1} \cdot \frac{2 + j1}{2 + j1} = \frac{2 + j11}{5} \quad (18)$$

Senóides em Termos de Exponenciais

Fórmulas fundamentais:

$$\cos \omega t = \frac{e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}}{2} \quad (19)$$

$$\text{sen } \omega t = \frac{e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}}{2j} \quad (20)$$

Fórmula de Euler:

$$e^{j\omega t} = \cos \omega t + j \text{sen } \omega t \quad (21)$$

$$e^{-j\omega t} = \cos \omega t - j \text{sen } \omega t \quad (22)$$

Vantagens da Representação Exponencial

- Operações algébricas são mais simples
- Multiplicação/divisão tornam-se adição/subtração de fases
- Base para análise fasorial
- Fundamental para transformadas de Fourier

$$\text{Seja } \begin{cases} Ae^{j(\omega t + \theta)} &= A \cos(\omega t + \theta) + jA \sin(\omega t + \theta) \\ Ae^{j(\omega t + \theta)} &= Ae^{j\theta} e^{j\omega t} \\ A \sin(\omega t + \theta) &= A \cos(\omega t + \theta - 90^\circ) \end{cases}$$

$$A \cos(\omega t + \theta) = \operatorname{Re} \left\{ Ae^{j(\omega t + \theta)} \right\} = \operatorname{Re} \left\{ Ae^{j\theta} e^{j\omega t} \right\}$$

$$A \sin(\omega t + \theta) = \operatorname{Im} \left\{ Ae^{j(\omega t + \theta)} \right\} = \operatorname{Im} \left\{ Ae^{j\theta} e^{j\omega t} \right\}$$

$$A \sin(\omega t + \theta) = \operatorname{Re} \left\{ Ae^{j(\omega t + \theta - 90^\circ)} \right\} = \operatorname{Re} \left\{ Ae^{j(\theta - 90^\circ)} e^{j\omega t} \right\}$$

● O termo $Ae^{j\theta}$ pode ser representado por $A\angle\theta$ e, quando *representa uma função senoidal*, é denominado de **fasor**.

- A multiplicação do fasor por uma constante complexa, $Be^{j\phi}$, ou a derivada do tempo ou integral de um fasor produz outro fasor.
- A soma de vários fasores produz outro fasor. Isso é porque a soma de sinusóides com a mesma frequência é também uma senoíde com a mesma frequência.
- Operações com fasores só podem ser realizadas se representam funções senoidais de *mesma frequência*.

● Aplicação: representação de tensão e corrente elétrica senoidal em um circuito linear.

$$v(t) = 20 \sin(\omega t) \Leftrightarrow 20e^{j0} \text{ ou } 20/\underline{0^\circ}$$

$$i(t) = 5 \sin(\omega t + 45^\circ) \Leftrightarrow 5e^{j45} \text{ ou } 5/\underline{45^\circ}$$

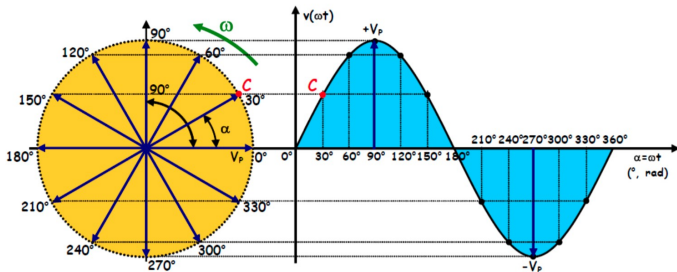


Figura 7: Representação de uma senóide projeções de seus pontos como um ponto girando em um movimento circular uniforme.

Exemplo de Análise Fasorial

Transformação de Equações Diferenciais

Princípio Fundamental

Na análise fasorial de equações diferenciais lineares, realizamos a **fatoração** do termo $e^{j\omega t}$ de todos os componentes da equação, aplicando-o posteriormente à solução final.

Exemplo: Circuito RC

Equação diferencial para a tensão no capacitor:

$$\frac{dv_C(t)}{dt} + \frac{1}{RC} v_C(t) = \frac{1}{RC} v_S(t) \quad (23)$$

Com fonte senoidal:

$$v_S(t) = V_P \cdot \cos(\omega t + \theta) \quad (24)$$

Representação Fasorial e Transformação

Conversão para o Domínio Complexo

Substituições fasoriais:

$$v_s(t) = \text{Re}\{V_s \cdot e^{j\omega t}\} \quad (25)$$

$$v_c(t) = \text{Re}\{V_c \cdot e^{j\omega t}\} \quad (26)$$

onde $V_s = V_P e^{j\theta}$ é o fasor conhecido e V_c é o fasor a determinar.

Equação Diferencial Transformada

A equação diferencial original reduz-se à forma algébrica:

$$j\omega V_c e^{j\omega t} + \frac{1}{RC} V_c e^{j\omega t} = \frac{1}{RC} V_s e^{j\omega t} \quad (27)$$

Vantagem: Transformação de problema diferencial em problema algébrico complexo.

Solução e Interpretação Física

Função de Transferência e Resposta Temporal

Solução para o fasor tensão do capacitor:

$$V_c = \underbrace{\frac{1}{1 + j\omega RC}}_{H(\omega)} \cdot V_s = \frac{1 - j\omega RC}{1 + (\omega RC)^2} \cdot V_P e^{j\theta} \quad (28)$$

Forma polar de $H(\omega)$ (função de transferência):

$$H(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega RC)^2}} \cdot e^{-j\phi(\omega)} \quad (29)$$

onde $\phi(\omega) = \arctan(\omega RC)$

Resposta no Domínio do Tempo

$$v_C(t) = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega RC)^2}} \cdot V_P \cos(\omega t + \theta - \phi(\omega)) \quad (30)$$

Interpretação: Atenuação de magnitude por $|H(\omega)|$ e defasagem de $-\phi(\omega)$.

Adição de Senóides usando Fasores

Problema: Expressar $f(t) = 3 \cos(\omega_0 t) + 4 \sin(\omega_0 t)$ como senóide única.

Método Fasorial:

$$3 \cos(\omega_0 t) \leftrightarrow 3e^{j0} = 3 \quad (31)$$

$$4 \sin(\omega_0 t) \leftrightarrow 4e^{-j90} = -j4 \quad (32)$$

Soma dos fasores:

$$F = 3 + (-j4) = 3 - j4 \quad (33)$$

$$|F| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5 \quad (34)$$

$$\angle F = \arctan(-4/3) = -53,13 \quad (35)$$

Resultado:

$$f(t) = 5 \cos(\omega_0 t - 53,13) \quad (36)$$

Script MATLAB: Fasores e Senóides

```
% Definir fasores
fasor1 = 3;           % 3*cos(wt)
fasor2 = -4j;         % 4*sin(wt) = 4*cos(wt-90°)

% Soma fasorial
fasor_total = fasor1 + fasor2;

% Converter para forma polar
magnitude = abs(fasor_total);
fase_rad = angle(fasor_total);
fase_graus = fase_rad * 180/pi;

fprintf('Resultado: %.2f*cos(wt + %.1f°)\n', magnitude,
        fase_graus);

% Verificação gráfica
t = linspace(0, 4*pi, 1000);
w = 1; % frequência normalizada

original = 3*cos(w*t) + 4*sin(w*t);
equivalente = magnitude*cos(w*t + fase_rad);

figure;
plot(t, original, 'b-', t, equivalente, 'r--', 'LineWidth', 2);
legend('3cos(t) + 4sin(t)', '5cos(t - 53.1°)');
xlabel('Tempo'); ylabel('Amplitude');
title('Verificação da Equivalência Fasorial');
grid on;
```

Na análise de sinais e sistemas, três funções têm papel fundamental:

- 1 **Função Degrau Unitário** $u(t)$
- 2 **Função Impulso Unitário** $\delta(t)$
- 3 **Função Exponencial** e^{st}

Importância:

- Servem como **base** para representação de outros sinais
- Simplificam vários aspectos da análise
- Fundamentais para convolução e análise de sistemas
- Aplicações em modelagem e simulação

Função Degrau Unitário $u(t)$

Definição

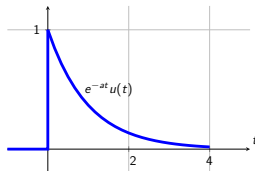
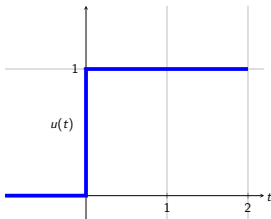
$$u_{\Delta}(t) = \begin{cases} 0, & t \leq 0 \\ \frac{1}{\Delta}, & 0 < t \leq \Delta \\ 1, & t > \Delta \end{cases}$$

$$u(t) = \lim_{\Delta \rightarrow 0^+} u_{\Delta}(t)$$

$$u(t) = \begin{cases} 0, & t \leq 0 \\ 1, & t > 0 \end{cases}$$

Aplicações principais:

- Representar sinais **causais** (que começam em $t = 0$)
- Multiplicar sinal por $u(t)$ para torná-lo causal
- Construir sinais com descrições diferentes em intervalos distintos



Aplicações da Função Degrau

Exemplo 1: Tornar uma exponencial causal

$$e^{-2t} \quad (\text{duração infinita}) \quad (37)$$

$$e^{-2t}u(t) \quad (\text{causal, inicia em } t = 0) \quad (38)$$

Exemplo 2: Construir pulso retangular

$$x(t) = u(t) - u(t - T) \quad (39)$$

Exemplo 3: Degrau atrasado

$$u(t - T) = \begin{cases} 1, & t \geq T \\ 0, & t < T \end{cases} \quad (40)$$

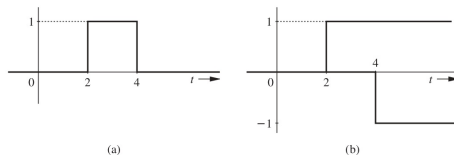


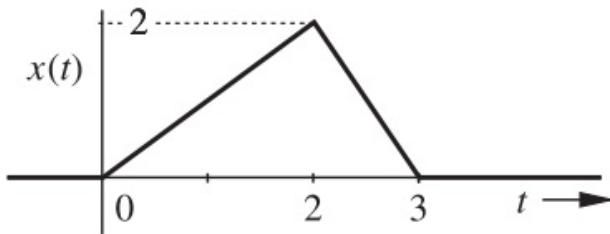
Figura 8: Representação de pulso através de funções degrau $x(t) = u(t - 2) - u(t - 4)$.

Fonte: Lathi, 2000.

Exemplo: Sinal Definido por Partes

Represente o sinal da figura usando funções degrau.

$$x(t) = \begin{cases} t, & 0 \leq t \leq 2 \\ -2(t - 3), & 2 \leq t \leq 3 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (41)$$



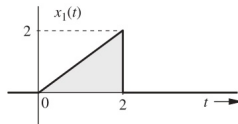
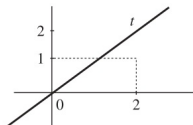
(a)

Exemplo: Sinal Definido por Partes

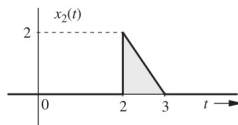
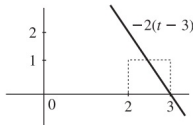
Solução: Separar em componentes $x_1(t)$ e $x_2(t)$:

$$x_1(t) = t[u(t) - u(t-2)] \quad (42)$$

$$x_2(t) = -2(t-3)[u(t-2) - u(t-3)] \quad (43)$$



(b)



(c)

Resultado final:

$$x(t) = x_1(t) + x_2(t) = t[u(t) - u(t-2)] - 2(t-3)[u(t-2) - u(t-3)] \quad (44)$$

$$= tu(t) - 3(t-2)u(t-2) + 2(t-3)u(t-3) \quad (45)$$

Função Impulso Unitário

Função Impulso Unitário (delta de Dirac)

$$\delta(t) = 0, \quad t \neq 0 \quad \text{e} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1 \quad (46)$$

Representação gráfica:

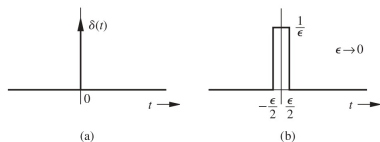


Figura 9: $\delta(t)$ e sua aproximação.

$$\delta_\epsilon(t) = \begin{cases} \frac{1}{\epsilon}, & -\epsilon/2 \leq t < \epsilon/2 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

$$\delta(t) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \delta_\epsilon(t)$$

Interpretação física:

- Pulso **muito estreito** e **muito alto**
- Largura $\epsilon \rightarrow 0$, altura $1/\epsilon \rightarrow \infty$
- Área sempre igual a **1**

Propriedades:

$$\delta(-t) = \delta(t)$$

$$\delta(at) = \frac{1}{a} \delta(t), \quad a > 0$$

Propriedade de Amostragem

Propriedade fundamental:

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\delta(t)dt = x(0) \quad (47)$$

Versão generalizada:

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\delta(t - t_0)dt = x(t_0) \quad (48)$$

Interpretação

O impulso "extraí" ou "amostra" o valor da função no ponto onde está localizado.

Exemplos:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-2t}\delta(t)dt = e^{-2 \cdot 0} = 1 \quad (49)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \cos(3t)\delta(t - \pi/6)dt = \cos(3 \cdot \pi/6) = \cos(\pi/2) = 0 \quad (50)$$

Relação entre Impulso e Degrau

Derivada do degrau:

$$\frac{du(t)}{dt} = \delta(t) \quad (51)$$

Integral do impulso:

$$\int_{-\infty}^t \delta(\tau) d\tau = u(t) \quad (52)$$

Verificação gráfica:

- $u(t)$ tem descontinuidade em $t = 0$
- Sua derivada deve ser infinita em $t = 0$
- A integral de $\delta(t)$ de $-\infty$ a t é 0 para $t < 0$ e 1 para $t \geq 0$

Funções de Singularidade

Sucessivas integrais e derivadas do impulso formam a família de **funções de singularidade**: $\delta'(t)$, $\delta''(t)$, ..., $u(t)$, rampa, parábola, etc.

Função Exponencial e^{st}

Forma Geral

$$e^{st} = e^{(\sigma + j\omega)t} = e^{\sigma t} e^{j\omega t} = e^{\sigma t} (\cos \omega t + j \sin \omega t) \quad (53)$$

onde $s = \sigma + j\omega$ é a **frequência complexa**.

Casos especiais:

- ❶ $s = 0$: $e^{0 \cdot t} = 1$ (constante)
- ❷ $s = \sigma$ (real): $e^{\sigma t}$ (exponencial monotônica)
- ❸ $s = j\omega$ (imaginário): $e^{j\omega t}$ (senóide complexa)
- ❹ $s = \sigma + j\omega$: $e^{\sigma t} \cos \omega t$ (senóide modulada)

Interpretação no plano s :

- $\sigma > 0$: crescimento exponencial
- $\sigma < 0$: decaimento exponencial
- $\sigma = 0$: amplitude constante (oscilação pura)

Exemplos de Exponenciais Complexas e^{st} , $s \in \mathbb{C}$

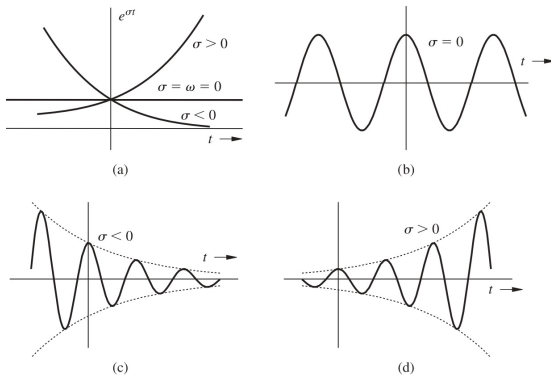


Figura 10: Vários tipos de exponenciais. Fonte: Lathi, 2000.

- (a) $s = -2$: e^{-2t} (decaimento exponencial); $s = 0$: e^{0t} (constante); $s = 2$: e^{2t} (crescimento exponencial)
- (b) $s = j\pi$: $e^{j\pi t} = \cos(\pi t) + j \sin(\pi t)$ (senóide)
- (c) $s = -1 + j2\pi$: $e^{-t} \cos(2\pi t)$ (senóide decrescente)
- (d) $s = 0.5 + j3\pi$: $e^{0.5t} \cos(3\pi t)$ (senóide crescente)

Plano da Frequência Complexa

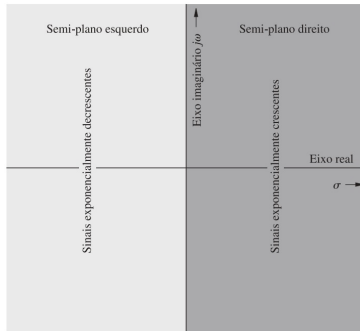


Figura 11: Plano da frequência complexa. Fonte: Lathi, 2000.

Características por região:

- **Eixo $j\omega$ ($\sigma = 0$):** senóides de amplitude constante
- **Semiplano direito ($\sigma > 0$):** sinais crescentes
- **Semiplano esquerdo ($\sigma < 0$):** sinais decrescentes
- **Eixo σ ($\omega = 0$):** exponenciais monotônicas

Script MATLAB: Exponenciais Complexas

```
% Parâmetros de tempo
t = linspace(0, 4, 1000);

% Diferentes tipos de exponenciais
% (a) Decaimento exponencial
s1 = -2;
x1 = exp(s1*t);

% (b) Senóide (parte real)
s2 = 1j*pi;
x2 = real(exp(s2*t)); % cos(pi*t)

% (c) Senóide decrescente
s3 = -1 + 1j*2*pi;
x3 = real(exp(s3*t)); % exp(-t)*cos(2*pi*t)

% (d) Senóide crescente
s4 = 0.5 + 1j*3*pi;
x4 = real(exp(s4*t)); % exp(0.5*t)*cos(3*pi*t)

% Plotagem
figure;
subplot(2,2,1); plot(t, x1, 'LineWidth', 2);
title('s = -2 (Decaimento)'); xlabel('t'); ylabel('x(t)');
subplot(2,2,2); plot(t, x2, 'LineWidth', 2);
title('s = j\pi (Senoide)'); xlabel('t'); ylabel('x(t)');
subplot(2,2,3); plot(t, x3, 'LineWidth', 2);
title('s = -1+j2\pi (Senoide Decrescente)'); xlabel('t'); ylabel('x(t)');
subplot(2,2,4); plot(t, x4, 'LineWidth', 2);
title('s = 0.5+j3\pi (Senoide Crescente)'); xlabel('t'); ylabel('x(t)');
for i = 1:4, subplot(2,2,i); grid on; end
```

Parte real da exponencial de frequência complexa

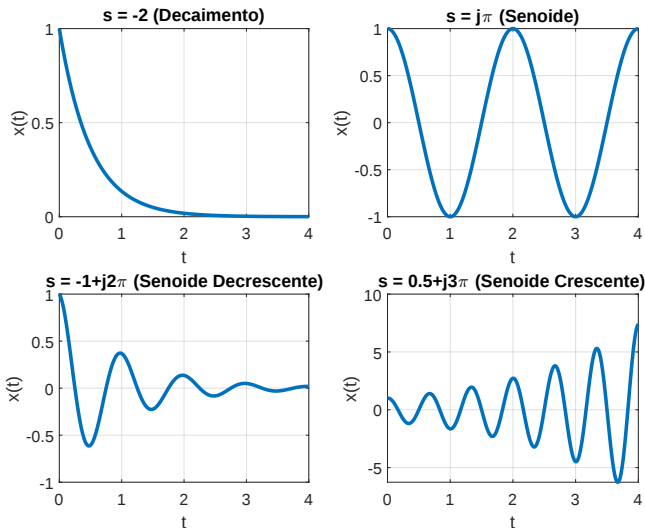


Figura 12: Senoides de frequência complexa $x(t) = \text{Re}\{e^{st}\}$.

Definições

Função Par

$x_e(t)$ é par se:

$$x_e(t) = x_e(-t) \quad (54)$$

Propriedade: **simétrica** em relação ao eixo vertical

Função Ímpar

$x_o(t)$ é ímpar se:

$$x_o(t) = -x_o(-t) \quad (55)$$

Propriedade: **anti-simétrica** em relação ao eixo vertical

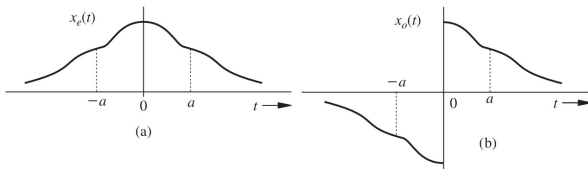


Figura 13: (a) Função par e (b) função ímpar. Fonte: Lathi, 2000.

Propriedades Algébricas

Multiplicação:

$$\text{par} \times \text{par} = \text{par} \quad (56)$$

$$\text{ímpar} \times \text{ímpar} = \text{par} \quad (57)$$

$$\text{par} \times \text{ímpar} = \text{ímpar} \quad (58)$$

Propriedades de área:

$$\int_{-a}^a x_e(t) dt = 2 \int_0^a x_e(t) dt \quad (59)$$

$$\int_{-a}^a x_o(t) dt = 0 \quad (60)$$

Exemplos de funções:

- **Pares:** $\cos(t)$, e^{-t^2} , t^2 , $|t|$
- **Ímpares:** $\sin(t)$, t , t^3 , $\text{sgn}(t)$

Observação: Válido apenas se não há impulsos (ou derivadas) na origem.

Teorema Fundamental

Todo sinal $x(t)$ pode ser decomposto como:

$$x(t) = x_e(t) + x_o(t) \quad (61)$$

onde:

$$x_e(t) = \frac{x(t) + x(-t)}{2} \quad (\text{componente par}) \quad (62)$$

$$x_o(t) = \frac{x(t) - x(-t)}{2} \quad (\text{componente ímpar}) \quad (63)$$

Verificação:

$$x_e(t) + x_o(t) = \frac{x(t) + x(-t)}{2} + \frac{x(t) - x(-t)}{2} \quad (64)$$

$$= \frac{2x(t)}{2} = x(t) \quad \checkmark \quad (65)$$

Exemplo: Decomposição de $e^{-at}u(t)$

Dado: $x(t) = e^{-at}u(t)$ com $a > 0$

Primeiro, encontrar $x(-t)$:

$$x(-t) = e^{-a(-t)}u(-t) = e^{at}u(-t) \quad (66)$$

Componente par:

$$x_e(t) = \frac{x(t) + x(-t)}{2} = \frac{e^{-at}u(t) + e^{at}u(-t)}{2} \quad (67)$$

$$= \frac{1}{2}[e^{-a|t|}] \quad (\text{função par}) \quad (68)$$

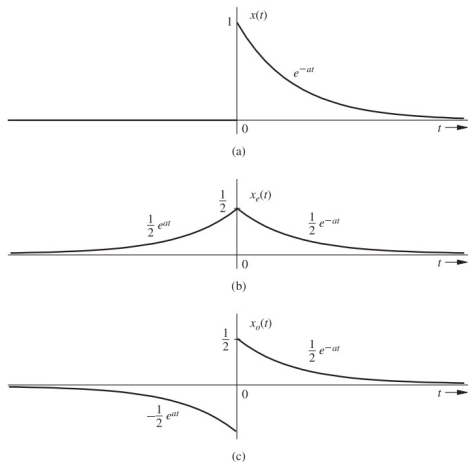
Componente ímpar:

$$x_o(t) = \frac{x(t) - x(-t)}{2} = \frac{e^{-at}u(t) - e^{at}u(-t)}{2} \quad (69)$$

$$= \frac{1}{2}e^{-a|t|}\text{sgn}(t) \quad (\text{função ímpar}) \quad (70)$$

onde $\text{sgn}(t) = u(t) - u(-t)$ é a função sinal.

Visualização da Decomposição de $e^{-at}u(t)$



Observações:

- $x_e(t)$ é simétrica:
 $x_e(t) = x_e(-t)$
- $x_o(t)$ é anti-simétrica:
 $x_o(t) = -x_o(-t)$
- $x(t) = x_e(t) + x_o(t)$ para $t \geq 0$
- $x(-t) = x_e(t) - x_o(t)$ para $t \geq 0$

Figura 14: Decomposição de $e^{-at}u(t)$ em componentes par e ímpar. Fonte: Lathi, 2000.

Script MATLAB: Decomposição Par/Ímpar de $e^{-at}u(t)$

```
% Definir sinal original
t = linspace(-4, 4, 1000);
a = 1;
x = exp(-a*abs(t)) .* (t >= 0); % e^(-at)*u(t)
% Versão espelhada x(-t)
x_invertido = exp(-a*abs(-t)) .* (-t >= 0); % x(-t)
% Componentes par e ímpar
x_par = (x + x_invertido) / 2;
x_impar = (x - x_invertido) / 2;
% Verificação: x = x_par + x_impar
x_reconstruido = x_par + x_impar;
erro = max(abs(x - x_reconstruido));
fprintf('Erro de reconstrução: %.2e\n', erro);
% Plotagem
figure; subplot(2,2,1); plot(t, x, 'b-', 'LineWidth', 2);
axis([-4 4 -0.5 1.5]);
title('Sinal Original x(t)'); xlabel('t'); ylabel('x(t)'); grid on;
subplot(2,2,2); plot(t, x_invertido, 'r-', 'LineWidth', 2);
title('Sinal Invertido x(-t)'); xlabel('t'); ylabel('x(-t)');
grid on; axis([-4 4 -0.5 1.5]);
subplot(2,2,3); plot(t, x_par, 'g-', 'LineWidth', 2);
title('Componente Par x_e(t)'); xlabel('t'); ylabel('x_e(t)');
grid on; axis([-4 4 -0.5 1.5]);
subplot(2,2,4); plot(t, x_impar, 'm-', 'LineWidth', 2);
title('Componente Ímpar x_o(t)'); xlabel('t'); ylabel('x_o(t)');
grid on; axis([-4 4 -0.5 1.5]);
```

Exemplo: Exponencial Complexa

Problema: Encontrar componentes par e ímpar de e^{jt} .

Solução:

$$x(t) = e^{jt} \quad (71)$$

$$x(-t) = e^{-jt} \quad (72)$$

Componente par:

$$x_e(t) = \frac{e^{jt} + e^{-jt}}{2} = \cos(t) \quad (73)$$

Componente ímpar:

$$x_o(t) = \frac{e^{jt} - e^{-jt}}{2} = \frac{2j \sin(t)}{2} = j \sin(t) \quad (74)$$

Verificação:

$$x_e(t) + j x_o(t) = \cos(t) + j \sin(t) = e^{jt} \quad \checkmark \quad (75)$$

Fórmula de Euler recuperada!

Exercício 1: Classificação de Sinais

Classifique os seguintes sinais:

- 1 $x_1(t) = 3 \cos(2\pi t + \pi/4)$
- 2 $x_2(t) = e^{-2t} u(t)$
- 3 $x_3[n] = \cos(\pi n/4)$ (sinal discreto)
- 4 $x_4(t) = t^2 u(t)$
- 5 $x_5(t) = \text{sgn}(\sin(t))$ (onda quadrada)

Critérios de classificação:

- Contínuo/Discreto no tempo
- Analógico/Digital
- Periódico/Não periódico
- Energia/Potência
- Determinístico/Aleatório
- Par/Ímpar

Exercício 2: Números Complexos

Dado $z_1 = 2 + j3$ e $z_2 = 1 - j2$, calcule:

- 1 $z_1 + z_2$ e $z_1 - z_2$
- 2 $z_1 \cdot z_2$ e z_1/z_2
- 3 $|z_1|$, $|z_2|$ e $\angle z_1$, $\angle z_2$
- 4 z_1^* e z_2^* (conjugados)
- 5 Represente graficamente no plano complexo

Exercício adicional: Expresse $3 \cos(t) - 4 \sin(t)$ como uma única senóide usando método fasorial.

Resposta parcial: $z_1 + z_2 = 3 + j1$, $z_1 \cdot z_2 = 8 - j1$

Exercício 3: Funções Singulares

Para os sinais da figura, expresse usando funções degrau e impulso:

- ① Pulso triangular de amplitude 2 e duração 4 segundos
- ② Rampa que inicia em $t = 1$ com inclinação 3
- ③ Sinal constante igual a 5 entre $t = -2$ e $t = 3$
- ④ Sequência de três impulsos: $\delta(t - 1) + 2\delta(t) + \delta(t + 2)$

Dicas:

- Use combinações de $u(t - a)$ para delimitar intervalos
- Rampa = $t \cdot u(t)$ deslocada e escalada
- Impulsos representam samples instantâneos

Exercício 4: Decomposição Par/Ímpar

Encontre as componentes par e ímpar dos sinais:

① $x_1(t) = te^{-t}u(t)$

② $x_2(t) = \cos(t)u(t)$

③ $x_3(t) = e^{j2t}$

④ $x_4(t) = t^3 + t^2 + t + 1$

Procedimento:

- Calcular $x(-t)$
- $x_e(t) = [x(t) + x(-t)]/2$
- $x_o(t) = [x(t) - x(-t)]/2$
- Verificar: $x(t) = x_e(t) + x_o(t)$

Para $x_4(t)$: Observe que é um polinômio - separe termos pares e ímpares diretamente.

Exercício MATLAB: Análise Espectral

```
% Criar sinal composto periódico
fs = 1000; % Frequência de amostragem
t = 0:1/fs:2-1/fs; % 2 segundos
f1 = 5; f2 = 15; f3 = 25; % Frequências em Hz

% Sinal composto
x = 2*cos(2*pi*f1*t) + 1.5*sin(2*pi*f2*t) + cos(2*pi*f3*t + pi/4);

% Análise de energia vs potência
energia = sum(x.^2) / fs; % Energia por unidade
potencia = mean(x.^2); % Potência média

% Verificar periodicidade
T1 = 1/f1; T2 = 1/f2; T3 = 1/f3;
% Período fundamental = MMC dos períodos individuais

% FFT para análise espectral
N = length(x);
X = fft(x);
f = (0:N-1)*fs/N;

% Plotagem
figure; subplot(2,1,1);
plot(t(1:500), x(1:500)); % Mostrar apenas 0.5s
title('Sinal no Tempo'); xlabel('Tempo (s)'); ylabel('Amplitude');
subplot(2,1,2);
plot(f(1:N/2), abs(X(1:N/2))*2/N); title('Espectro de Magnitude');
xlabel('Frequência (Hz)'); ylabel('|X(f)|');
fprintf('Energia total: %.2f\n', energia);
fprintf('Potência média: %.2f\n', potencia);
```

Listing 3: Análise espectral de sinais periódicos

Classificação de Sinais

- **Temporal:** Contínuos vs Discretos no tempo
- **Amplitude:** Analógicos vs Digitais
- **Periodicidade:** Periódicos vs Não periódicos
- **Energia:** Sinais de energia vs potência
- **Previsibilidade:** Determinísticos vs Aleatórios

Ferramentas Matemáticas

- **Números complexos:** Representação cartesiana e polar
- **Fórmula de Euler:** $e^{j\theta} = \cos \theta + j \sin \theta$
- **Análise fasorial:** Adição de senóides

Modelos Fundamentais

- **Degrau:** $u(t)$ para sinais causais
- **Impulso:** $\delta(t)$ para amostragem
- **Exponencial:** e^{st} para análise geral
- **Simetria:** Decomposição par/ímpar

Telecomunicações:

- Classificação analógica vs digital
- Análise espectral usando números complexos
- Modulação usando exponenciais complexas

Processamento Digital:

- Sinais discretos no tempo
- Quantização (analógico $\rightarrow$ digital)
- Análise de periodicidade para compressão

Sistemas de Controle:

- Modelos usando exponenciais e^{st}
- Análise de estabilidade no plano s
- Resposta a degrau para caracterização

Análise de Fourier:

- Decomposição par/ímpar simplifica cálculos
- Simetrias reduzem complexidade computacional

Aula 03: Sistemas - Conceitos e Classificação

- Definição e caracterização de sistemas
- Sistemas lineares vs não lineares
- Sistemas invariantes no tempo
- Sistemas causais vs não causais
- Sistemas com e sem memória
- Sistemas estáveis vs instáveis

Preparação: Revisar conceitos de equações diferenciais lineares.

Referências Bibliográficas

- **Principal:** LATHI, B. P. *Sinais e Sistemas Lineares*. 2ª ed. Porto Alegre: Bookman, 2000.
 - Capítulo 1, Seções 1.3 a 1.5
 - Background, Seções B.1 e B.2
- **Complementar:** OPPENHEIM, A. V.; WILLSKY, A. S.; NAWAB, S. H. *Signals and Systems*. 2nd ed. Upper Saddle River: Prentice Hall, 1997.
 - Capítulos 1 e 2, seções relacionadas

Lista de Exercícios 02:

- ➊ Problemas 1.3-1 a 1.3-6 (Lathi, páginas 137-138)
- ➋ Problemas 1.4-1 a 1.4-6 (Lathi, páginas 138-139)
- ➌ Problemas 1.5-1 a 1.5-4 (Lathi, páginas 139-140)
- ➍ Problemas B.1 a B.8 (Background - Números Complexos)
- ➎ Implementar no MATLAB/Octave:
 - Função para classificar sinais automaticamente
 - Calculadora de números complexos (4 operações + polar)
 - Decomposição automática em componentes par e ímpar
 - Gerador de sinais fundamentais (degrau, impulso, exponencial)

Entrega: Aula 04 (duas semanas)

Formato: Resolução analítica + códigos MATLAB comentados + relatório

Conceitos Importantes para Fixar

Pontos Chave - Classificação

- Tempo contínuo/discreto $\neq$ analógico/digital
- Sinais de energia têm duração finita; sinais de potência têm duração infinita
- Sinais periódicos são sempre de potência (se limitados)
- Todos os sinais práticos são de energia

Pontos Chave - Ferramentas

- Números complexos simplificam análise de senóides
- Fórmula de Euler conecta exponenciais e trigonometria
- Impulso "amostra" valores de funções
- Degrau $u(t)$ constrói sinais causais e por partes
- Todo sinal = componente par + componente ímpar

Dicas de Estudo

- Pratique conversões cartesiana $\Leftrightarrow$ polar
- Memorize as propriedades do impulso e degrau
- Use MATLAB para visualizar conceitos abstratos
- Aplique decomposição par/ímpar em exemplos variados

Você deve ser capaz de:

- 1 **Classificar** qualquer sinal dado segundo os 5 critérios estudados
- 2 **Converter** números complexos entre formas cartesiana e polar
- 3 **Somar senóides** usando análise fasorial
- 4 **Representar** sinais usando funções degrau e impulso
- 5 **Decompor** sinais em componentes par e ímpar
- 6 **Identificar** se um sinal é periódico e encontrar seu período
- 7 **Calcular** energia e potência de sinais básicos
- 8 **Usar** propriedades de simetria para simplificar cálculos

Teste rápido: Classifique $x(t) = e^{-|t|} \cos(3t)$ e encontre suas componentes par e ímpar.

Cálculo e Análise Matemática:

- Funções generalizadas (distribuições)
- Séries de Fourier e transformadas
- Análise complexa

Álgebra Linear:

- Sinais como vetores em espaços funcionais
- Ortogonalidade e projeções
- Bases de funções (Fourier, wavelets)

Equações Diferenciais:

- Exponenciais como soluções fundamentais
- Impulso como entrada de teste
- Métodos de transformadas

Física:

- Oscilações harmônicas
- Ondas e propagação
- Mecânica quântica (função de onda)