

ENE0067 – Sinais e Sistemas em Tempo Contínuo

Sistemas

Prof. Eduardo Stockler Tognetti

Departamento de Engenharia Elétrica
Universidade de Brasília – UnB



Agenda da Aula

- 1 Introdução aos Sistemas
- 2 Classificação de Sistemas
 - Sistemas Lineares e Não-Lineares
 - Sistemas Invariantes e Variantes no Tempo
 - Sistemas Instantâneos e Dinâmicos
 - Sistemas Causais e Não-Causais
 - Sistemas em Tempo Contínuo e Discreto
 - Sistemas Analógicos e Digitais
 - Sistemas Inversíveis e Não-Inversíveis
 - Sistemas Estáveis e Instáveis
- 3 Descrição Interna e Externa
- 4 Descrição em Espaço de Estados
- 5 Modelos de Sistemas
 - Sistemas Elétricos
 - Sistemas Mecânicos
 - Sistemas Eletromecânicos
- 6 Exercícios de Aplicação
- 7 Resumo da Aula

O que é um Sistema?

Definição

Um **sistema** é uma entidade que processa sinais de entrada para produzir sinais de saída.

- Um sistema atua sobre um ou mais sinais de entrada para produzir um ou mais sinais de saída
- A relação entre entrada e saída caracteriza o sistema
- Sistemas podem ser físicos (circuitos, máquinas) ou abstratos (algoritmos)
- Representação matemática: $y(t) = T[x(t)]$

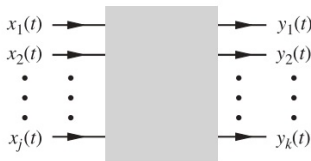


Figura: Representação básica de um sistema.

Exemplos de Sistemas

Sistemas Elétricos:

- Circuitos RLC
- Amplificadores
- Filtros

Sistemas Mecânicos:

- Sistemas massa-mola-amortecedor
- Sistemas rotacionais

Sistemas de Comunicação:

- Canais de transmissão
- Moduladores/demoduladores

Sistemas de Controle:

- Servomotores
- Controle de temperatura

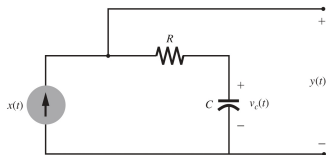


Figura: Exemplo de um sistema elétrico em que
$$y(t) = v_c(t_0) + Rx(t) + \frac{1}{C} \int_{t_0}^t x(\tau) d\tau, \quad t \geq t_0.$$

Exemplo de sistemas

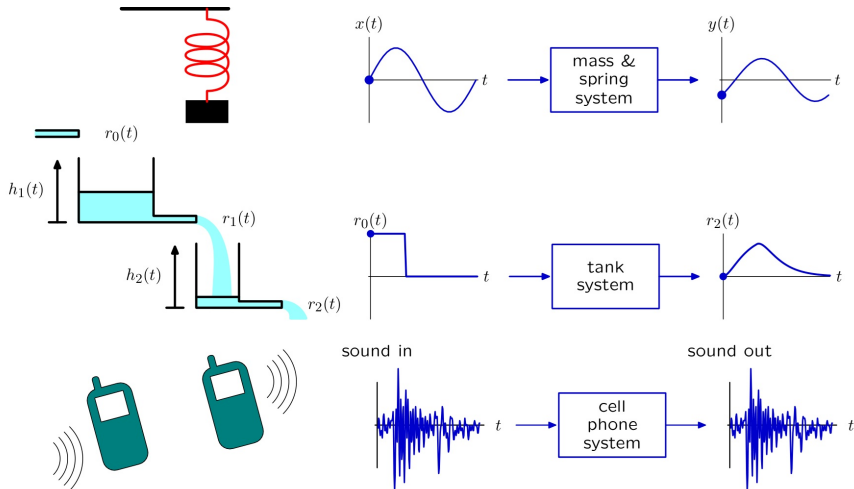


Figura: Sistemas massa-mola, tanques acoplados e telefonia celular. Fonte: MIT, Signals and Systems course.

Modelagem de Circuito RC

● Sistema com entrada $v_s(t)$ e saída $v_c(t)$. Nesse exemplo, $v_c(t)$ é também um **estado** do sistema.

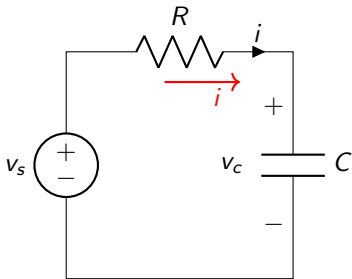


Figura: Circuito RC com fonte de tensão CC v_s , resistor R e capacitor C . A tensão do capacitor é denotada por v_c e a corrente do circuito por i .

- Corrente pela resistência:

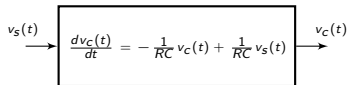
$$i(t) = \frac{v_s(t) - v_c(t)}{R}$$

- Corrente no capacitor:

$$i(t) = C \frac{dv_c(t)}{dt}$$

- Equação diferencial do circuito:

$$\frac{dv_c(t)}{dt} = -\frac{1}{RC} v_c(t) + \frac{1}{RC} v_s(t)$$



Os sistemas podem ser classificados segundo diversos critérios:

- ① **Linearidade:** Lineares vs. Não-lineares
- ② **Invariância temporal:** Invariantes vs. Variantes no tempo
- ③ **Memória:** Instantâneos vs. Dinâmicos
- ④ **Causalidade:** Causais vs. Não-causais
- ⑤ **Tipo de tempo:** Contínuo vs. Discreto
- ⑥ **Tipo de sinal:** Analógicos vs. Digitais
- ⑦ **Inversibilidade:** Inversíveis vs. Não-inversíveis
- ⑧ **Estabilidade:** Estáveis vs. Instáveis

Definição - Princípio da Superposição

Um sistema é **linear** se satisfaz o princípio da superposição:

$$T[a_1x_1(t) + a_2x_2(t)] = a_1 T[x_1(t)] + a_2 T[x_2(t)]$$

onde a_1 e a_2 são constantes arbitrárias.

Propriedades dos Sistemas Lineares:

- **Aditividade:** $T[x_1(t) + x_2(t)] = T[x_1(t)] + T[x_2(t)]$
- **Homogeneidade:** $T[ax(t)] = aT[x(t)]$
- Se entrada é zero, saída é zero: $T[0] = 0$

Exemplo: Sistema Linear

Exemplo 1: Considere o sistema $y(t) = 3x(t) + 2\frac{dx(t)}{dt}$

Verificação:

$$x(t) = a_1x_1(t) + a_2x_2(t) \quad (1)$$

$$y(t) = 3[a_1x_1(t) + a_2x_2(t)] + 2\frac{d}{dt}[a_1x_1(t) + a_2x_2(t)] \quad (2)$$

$$= 3a_1x_1(t) + 3a_2x_2(t) + 2a_1\frac{dx_1(t)}{dt} + 2a_2\frac{dx_2(t)}{dt} \quad (3)$$

$$= a_1[3x_1(t) + 2\frac{dx_1(t)}{dt}] + a_2[3x_2(t) + 2\frac{dx_2(t)}{dt}] \quad (4)$$

$$= a_1y_1(t) + a_2y_2(t) \quad (5)$$

Conclusão: O sistema é linear!

Exemplo: Sistema Não-Linear

Exemplo 2: Considere o sistema $y(t) = x^2(t)$

Verificação:

$$x(t) = a_1x_1(t) + a_2x_2(t) \quad (6)$$

$$y(t) = [a_1x_1(t) + a_2x_2(t)]^2 \quad (7)$$

$$= a_1^2x_1^2(t) + 2a_1a_2x_1(t)x_2(t) + a_2^2x_2^2(t) \quad (8)$$

$$\neq a_1x_1^2(t) + a_2x_2^2(t) = a_1y_1(t) + a_2y_2(t) \quad (9)$$

Conclusão: O sistema é não-linear!

Outros exemplos não-lineares:

- $y(t) = |x(t)|$
- $y(t) = \cos[x(t)]$
- $y(t) = x(t) + 5$ (termo constante)

Definição

Um sistema é **invariante no tempo** se um atraso na entrada resulta no mesmo atraso na saída.

Matematicamente: Se $x(t) \rightarrow y(t)$, então $x(t - t_0) \rightarrow y(t - t_0)$ para qualquer t_0 .

Características:

- Parâmetros do sistema não mudam com o tempo
- Coeficientes das equações são constantes
- Comportamento independente do instante de aplicação da entrada

Exemplo: $y(t) = 3x(t) + 2\frac{dx(t)}{dt}$ (coeficientes constantes)

Sistemas Variantes no Tempo

Definição

Um sistema é **variante no tempo** se suas características mudam com o tempo.

Exemplos:

- $y(t) = tx(t)$ (coeficiente varia com o tempo)
- $y(t) = x(t) \cos(\omega_0 t)$ (modulação)
- Sistemas com componentes que envelhecem

Verificação para $y(t) = tx(t)$:

- Se $x(t) \rightarrow y(t) = tx(t)$
- Então $x(t - t_0) \rightarrow ty(t - t_0) = tx(t - t_0)$
- Mas deveria ser $y(t - t_0) = (t - t_0)x(t - t_0)$
- Como $tx(t - t_0) \neq (t - t_0)x(t - t_0)$, o sistema é variante no tempo

Invariância no tempo

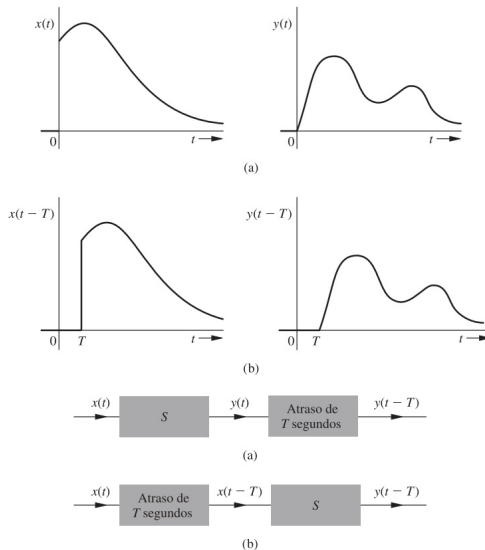


Figura: Ilustração de propriedades de invariância no tempo.

Sistemas Instantâneos (Sem Memória)

Definição

Um sistema é **instantâneo** ou **sem memória** se a saída em qualquer instante depende apenas da entrada no mesmo instante.

Matematicamente: $y(t) = f[x(t)]$

Exemplos:

- $y(t) = 5x(t)$ (amplificador)
- $y(t) = x^2(t)$ (detector quadrático)
- $y(t) = \cos[x(t)]$
- Resistor: $v(t) = Ri(t)$

Características:

- Resposta instantânea
- Não armazena energia
- Não possui elementos de memória

Definição

Um sistema é **dinâmico** ou **com memória** se a saída em qualquer instante depende de valores passados, presentes e/ou futuros da entrada.

Exemplos:

- $y(t) = x(t - 1)$ (atraso)
- $y(t) = \int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau$ (integrador)
- $y(t) = \frac{dx(t)}{dt}$ (diferenciador)
- Capacitor: $i(t) = C \frac{dv(t)}{dt}$
- Indutor: $v(t) = L \frac{di(t)}{dt}$

Características:

- Resposta depende da história do sistema
- Podem armazenar energia
- Possuem elementos de memória (C, L, etc.)

Exemplo MATLAB: Sistemas com e sem Memória

```
% Definir sinal de entrada
t = 0:0.01:5;
x = sin(2*pi*t);

% Sistema instantâneo:  $y_1(t) = 2x(t)$ 
y1 = 2*x;

% Sistema dinâmico:  $y_2(t) = \text{integral de } x(\tau) \text{ de } 0 \text{ a } t$ 
y2 = cumtrapz(t, x);

% Plotar resultados
figure;
subplot(3,1,1); plot(t,x); title('Entrada x(t)');
subplot(3,1,2); plot(t,y1); title('Sistema Instantâneo:  $y_1(t) = 2x(t)$ ');
subplot(3,1,3); plot(t,y2); title('Sistema Dinâmico:  $y_2(t) = \int_0^t x(\tau) d\tau$ ');
xlabel('Tempo (s)');
```

Listing 1: Comparação entre sistemas instantâneo e dinâmico

Definição

Um sistema é **causal** (ou **físico**) se a saída em qualquer instante depende apenas dos valores atual e passados da entrada, nunca de valores futuros.

Matematicamente: $y(t_0)$ depende apenas de $x(t)$ para $t \leq t_0$

Exemplos causais:

- $y(t) = x(t) + x(t - 1)$
- $y(t) = \int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau$
- $y(t) = x(t) + 2 \frac{dx(t)}{dt}$

Importância:

- Todos os sistemas físicos realizáveis são causais
- Não podemos construir um sistema que responda antes de receber a entrada
- Fundamental para sistemas em tempo real

Definição

Um sistema é **não-causal** (ou **antecipativo**) se a saída em qualquer instante depende de valores futuros da entrada.

Exemplos não-causais:

- $y(t) = x(t + 1)$ (avanço temporal)
- $y(t) = x(t + 2) + x(t) + x(t - 1)$
- $y(t) = \int_t^{t+5} x(\tau) d\tau$

Aplicações:

- Processamento offline de sinais gravados
- Análise de dados históricos
- Filtros não-causais em processamento de imagens
- Predição e interpolação

Nota: Sistemas não-causais não são fisicamente realizáveis em tempo real.

Sistemas Não-Causais

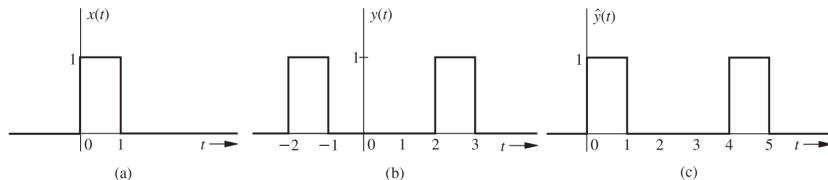


Figura: (a) Sinal de entrada. (b) Resposta de um sistema não causal $y(t) = x(t - 2) + x(t + 2)$ e (c) sua realização por um sistema causal atrasado $\hat{y}(t) = y(t - 2)$. Fonte: Lathi.

- Sistemas temporais não causais não podem ser implementados em *tempo real*.
- Podem ser implementados desde que estejamos dispostos a aceitar um atraso de tempo na saída (ex.: “sistemas gravados”).
- Contudo, sistemas não causais são realizáveis quando a variável independente for outra que não o “tempo” (por exemplo, o espaço).
- Sistemas não causais podem ser utilizados como modelos ideais a serem estudados.

Sistemas em Tempo Contínuo vs. Discreto

Tempo Contínuo:

- Sinais definidos para todo $t \in \mathbb{R}$
- Equações diferenciais
- Exemplos: circuitos analógicos, sistemas mecânicos

Exemplo:

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 3\frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = x(t)$$

Conversão: Sistemas contínuos podem ser aproximados por sistemas discretos através de amostragem.

Tempo Discreto:

- Sinais definidos apenas em instantes discretos
- Equações de diferenças
- Exemplos: sistemas digitais, algoritmos

Exemplo:

$$y[n] + 0.5y[n-1] = x[n] + 2x[n-1]$$

Sistemas em Tempo Contínuo e em Tempo Discreto

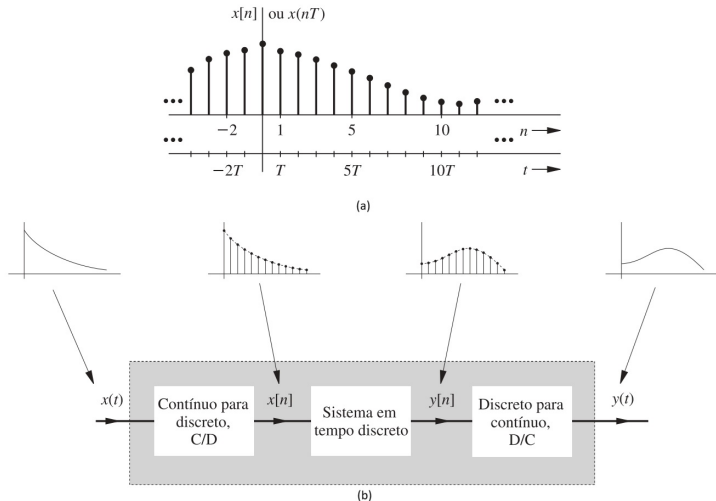


Figura: (a) Um sinal em tempo discreto. (b) Processamento de sinais contínuos no tempo por sistemas discretos no tempo.. Fonte: Lathi.

Sistemas Analógicos vs. Digitais

Sistemas Analógicos:

- Processam sinais analógicos
- Amplitude contínua
- Exemplos: amplificadores, filtros passivos

Vantagens dos Sistemas Digitais:

- Maior imunidade a ruído
- Flexibilidade de programação
- Reprodução perfeita
- Facilidade de armazenamento

Sistemas Digitais:

- Processam sinais digitais
- Amplitude quantizada
- Exemplos: processadores DSP, computadores

Definição

Um sistema é **inversível** se existe um sistema inverso tal que a cascata dos dois resulta em um sistema identidade.

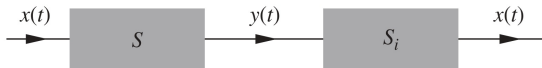


Figura: Sistema em cascata com seu inverso. Fonte: Lathi, 2006.

Exemplos inversíveis:

- $y(t) = 2x(t)$ (inverso: $x(t) = \frac{y(t)}{2}$)
- $y(t) = x(t - T)$ (inverso: $x(t) = y(t + T)$)
- $y(t) = \frac{dx(t)}{dt}$ (inverso: $x(t) = \int y(\tau) d\tau$)

Condição: Para cada entrada deve existir uma saída única, e vice-versa.

Definição

Um sistema é **não-inversível** se não é possível recuperar unicamente a entrada a partir da saída.

Exemplos não-inversíveis:

- $y(t) = x^2(t)$ (perda de sinal de entrada)
- $y(t) = |x(t)|$ (perda de informação de fase)
- $y(t) = 0$ (sistema que zera a saída)
- $y(t) = x(2t)$ (perda de informação por compressão temporal)

Razões para não-inversibilidade:

- Perda de informação
- Mapeamento muitos-para-um
- Operações irreversíveis

Importância: Sistemas inversíveis permitem recuperação perfeita do sinal original.

Definição - Estabilidade BIBO

Um sistema é **estável BIBO** (*Bounded-Input Bounded-Output*) se toda entrada limitada produz uma saída limitada.

Matematicamente: Se $|x(t)| \leq M_x < \infty$ para todo t , então $|y(t)| \leq M_y < \infty$ para todo t .

Exemplos estáveis:

- $y(t) = 2x(t)$ (amplificador)
- $y(t) = x(t - 1)$ (atraso)
- Circuito RC: $RC \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = x(t)$

Exemplos instáveis:

- $y(t) = tx(t)$ (ganho crescente)
- $y(t) = \int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau$ (integrador ideal com entrada constante)

Definição - Estabilidade Interna

Um sistema é **internamente estável** se todas as suas variáveis internas permanecem limitadas quando o sistema parte de condições iniciais limitadas.

Diferença entre estabilidades:

- **BIBO:** Relaciona entrada e saída (visão externa)
- **Interna:** Relaciona ao comportamento interno do sistema

Para sistemas lineares invariantes no tempo:

- Estabilidade interna $\Rightarrow$ Estabilidade BIBO
- Em sistemas controláveis e observáveis: as duas são equivalentes

Importância:

- Sistemas instáveis são impraticáveis
- Podem causar danos em implementações físicas
- Fundamental em sistemas de controle

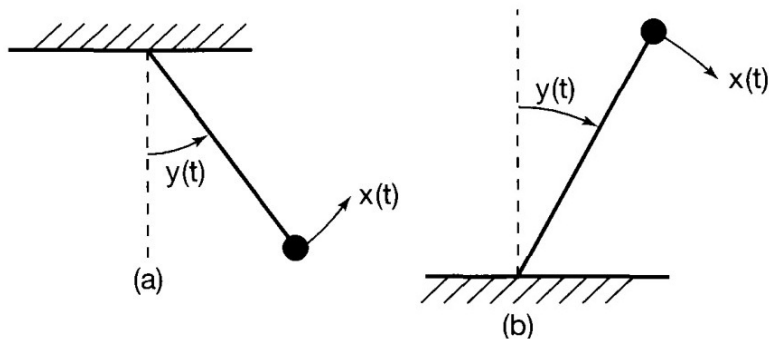


Figura: (a) Pêndulo estável. (b) Pêndulo invertido instável. Fonte: Oppenheim.

Definição

A **descrição externa** caracteriza o sistema através da relação entrada-saída, observável nos terminais externos.

Características:

- Baseada em medições nos terminais
- Não revela estrutura interna
- Adequada para análise "caixa-preta"
- Função de transferência é uma descrição externa

Métodos de obtenção:

- Aplicar entrada conhecida (impulso, degrau, senoide)
- Medir saída correspondente
- Determinar relação matemática

Limitação: Pode não fornecer informação completa sobre sistemas não-controláveis ou não-observáveis.

Definição

A **descrição interna** fornece informação completa sobre todas as variáveis internas do sistema.

Características:

- Revela estrutura e dinâmica internas
- Permite análise de todas as variáveis
- Equações de estado são descrições internas
- Mais completa que descrição externa

Vantagens:

- Informação sobre estabilidade interna
- Análise de controlabilidade e observabilidade
- Projeto de controladores avançados
- Compreensão física do sistema

Relação: Descrição externa sempre pode ser obtida da interna, mas o inverso nem sempre é verdadeiro.

Exemplo: Circuito RC

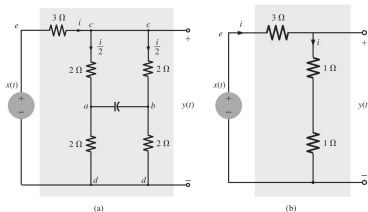


Figura: Circuito RC - análise interna vs externa. Fonte: Lathi, 2006.

Descrição Externa: $\frac{dy(t)}{dt} + \frac{1}{RC}y(t) = \frac{1}{RC}x(t)$

Descrição Interna (possível):

$$\frac{dv_C(t)}{dt} = \frac{1}{RC}[x(t) - v_C(t)] \quad (10)$$

$$i(t) = \frac{1}{R}[x(t) - v_C(t)] \quad (11)$$

$$y(t) = v_C(t) \quad (12)$$

A descrição interna revela a tensão do capacitor e a corrente, invisíveis externamente.

Definição

A **descrição em espaço de estados** representa um sistema de ordem n através de n equações diferenciais de primeira ordem usando variáveis de estado.

Variáveis de Estado:

- Menor conjunto de variáveis que caracteriza completamente o sistema
- Geralmente relacionadas ao armazenamento de energia
- Em circuitos: tensões de capacitores e correntes de indutores
- Em sistemas mecânicos: posições e velocidades

Forma Geral:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \quad (\text{equação de estado}) \quad (13)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t) \quad (\text{equação de saída}) \quad (14)$$

Vantagens do Espaço de Estados

Vantagens:

- Aplicável a sistemas MIMO (múltiplas entradas/saídas)
- Facilita análise de estabilidade interna
- Permite projeto de controladores modernos
- Eficiente para simulação computacional
- Revela propriedades estruturais (controlabilidade, observabilidade)

Aplicações:

- Sistemas de controle moderno
- Filtros de Kalman
- Controle ótimo
- Análise de robustez
- Sistemas adaptativos

Ferramentas Computacionais:

- MATLAB Control Systems Toolbox
- Simulink
- Análise numérica eficiente

Exemplo: Circuito RLC em Espaço de Estados

Variáveis de estado:

- $x_1(t) = i_L(t)$ (corrente no indutor)
- $x_2(t) = v_C(t)$ (tensão no capacitor)

Equações de estado:

$$\frac{dx_1(t)}{dt} = -\frac{R}{L}x_1(t) - \frac{1}{L}x_2(t) + \frac{1}{L}u(t) \quad (15)$$

$$\frac{dx_2(t)}{dt} = \frac{1}{C}x_1(t) \quad (16)$$

Forma matricial:
$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{R}{L} & -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{C} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{L} \\ 0 \end{bmatrix} u(t)$$

Se a saída for a corrente:
$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Exemplo MATLAB: Análise em Espaço de Estados

```
% Parâmetros do circuito
R = 1; L = 1; C = 1;
% Matrizes do espaço de estados
A = [-R/L, -1/L; 1/C, 0];
B = [1/L; 0];
C = [1, 0];      % Saída: corrente
D = 0;
% Criar sistema em espaço de estados
sys = ss(A, B, C, D);
% Resposta ao degrau
t = 0:0.01:10;
[y, t, x] = step(sys, t);
% Plotar resultados
figure; subplot(2,1,1); plot(t, y);
title('Corrente (saída)');
subplot(2,1,2); plot(t, x(:,2));
title('Tensão do capacitor (estado interno)');
xlabel('Tempo (s)');
```

Listing 2: Análise do circuito RLC em espaço de estados

Modelagem de sistemas.

Elementos Básicos:

- **Resistor:** $v(t) = Ri(t)$ (Lei de Ohm)
- **Capacitor:** $i(t) = C \frac{dv(t)}{dt}$ ou $v(t) = \frac{1}{C} \int i(\tau) d\tau$
- **Indutor:** $v(t) = L \frac{di(t)}{dt}$ ou $i(t) = \frac{1}{L} \int v(\tau) d\tau$

Leis de Conexão:

- **Lei de Kirchhoff das Tensões (LKT):** $\sum v_k = 0$
- **Lei de Kirchhoff das Correntes (LKC):** $\sum i_k = 0$

Procedimento de Modelagem:

- 1 Aplicar leis dos elementos
- 2 Aplicar leis de Kirchhoff
- 3 Eliminar variáveis indesejadas
- 4 Obter equação entrada-saída

Exemplo: Circuito RLC Série

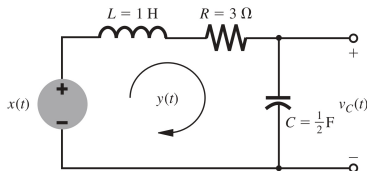


Figura: Circuito RLC série. Fonte: Lathi, 2006.

Aplicando LKT: $v_L(t) + v_R(t) + v_C(t) = x(t)$

Substituindo as relações dos elementos:

$$L \frac{di(t)}{dt} + Ri(t) + \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t i(\tau) d\tau = x(t)$$

Derivando para eliminar a integral:

$$L \frac{d^2 i(t)}{dt^2} + R \frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{C} i(t) = \frac{dx(t)}{dt}$$

Esta é a equação diferencial que relaciona a corrente $i(t)$ com a tensão de entrada $x(t)$.

Exemplo MATLAB: Resposta do Circuito RLC

```
% Parâmetros do circuito
R = 1;           % Resistência (Ohms)
L = 1;           % Indutância (H)
C = 1;           % Capacitância (F)
% Função de transferência:  $H(s) = s / (Ls^2 + Rs + 1/C)$ 
num = [1 0];      % Numerador: s
den = [L R 1/C];  % Denominador:  $Ls^2 + Rs + 1/C$ 
H = tf(num, den);
% Resposta ao degrau
t = 0:0.01:10;
[y, t] = step(H, t);
% Plotar resultado
figure; plot(t, y);
title('Resposta ao Degrau do Circuito RLC');
xlabel('Tempo (s)'); ylabel('Corrente (A)'); grid on;
```

Listing 3: Simulação da resposta do circuito RLC

Modelagem de Sistemas Mecânicos Translacionais

Elementos Básicos:

- **Massa:** $F = M \frac{d^2x}{dt^2}$ (2ª Lei de Newton)
- **Mola:** $F = Kx$ (Lei de Hooke)
- **Amortecedor:** $F = B \frac{dx}{dt}$ (amortecimento viscoso)

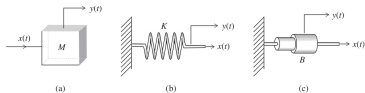


Figura: Sistema massa-mola-amortecedor. Fonte: Lathi, 2006.

Procedimento:

- 1 Desenhar diagrama de corpo livre
- 2 Aplicar 2ª Lei de Newton: $\sum F = Ma$
- 3 Substituir forças dos elementos
- 4 Obter equação diferencial

Exemplo: Sistema Massa-Mola-Amortecedor

Diagrama de corpo livre:

- Força aplicada: $F(t)$ (entrada)
- Força da mola: $-Kx(t)$
- Força do amortecedor: $-B \frac{dx(t)}{dt}$
- Posição da massa: $x(t)$ (saída)

Aplicando a 2ª Lei de Newton: $M \frac{d^2x(t)}{dt^2} = F(t) - Kx(t) - B \frac{dx(t)}{dt}$

Rearranjando: $M \frac{d^2x(t)}{dt^2} + B \frac{dx(t)}{dt} + Kx(t) = F(t)$

Esta equação tem a mesma forma do circuito RLC, mostrando a analogia entre sistemas elétricos e mecânicos.

Elementos Básicos:

- **Momento de Inércia:** $T = J \frac{d^2\theta}{dt^2}$
- **Mola Rotacional:** $T = K\theta$
- **Amortecedor Rotacional:** $T = B \frac{d\theta}{dt}$

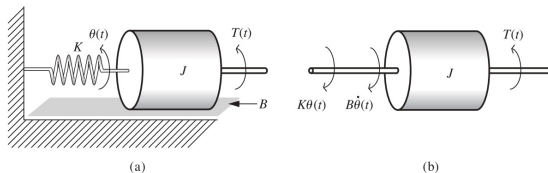


Figura: Sistema rotacional. Fonte: Lathi, 2006.

Equação do movimento: $J \frac{d^2\theta(t)}{dt^2} + B \frac{d\theta(t)}{dt} + K\theta(t) = T(t)$
onde $T(t)$ é o torque aplicado e $\theta(t)$ é o ângulo de rotação.

Analogias entre Sistemas

Elétrico	Mecânico Translacional	Mecânico Rotacional
Tensão $v(t)$	Força $F(t)$	Torque $T(t)$
Corrente $i(t)$	Velocidade $\frac{dx}{dt}$	Velocidade angular $\frac{d\theta}{dt}$
Carga $q(t)$	Posição $x(t)$	Ângulo $\theta(t)$
Resistência R	Amortecimento B	Amortecimento B
Indutância L	Massa M	Momento de inércia J
$\frac{1}{C}$	Rigidez K	Rigidez K

Vantagem: Permite transferir conhecimento entre diferentes domínios físicos.

Definição: Sistemas que combinam elementos elétricos e mecânicos.

Exemplos:

- Motores elétricos
- Geradores
- Alto-falantes
- Microfones
- Servomotores

Acoplamento: A conversão de energia entre domínios elétrico e mecânico requer equações de acoplamento específicas.

Análise:

- 1 Modelar a parte elétrica
- 2 Modelar a parte mecânica
- 3 Estabelecer equações de acoplamento
- 4 Combinar para obter modelo completo

Exemplo: Motor DC Controlado por Campo

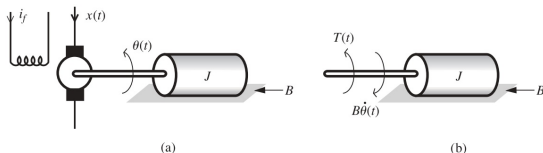


Figura: Motor DC controlado por campo. Fonte: Lathi, 2006.

Equações do sistema:

- **Parte elétrica:** $R_f i_f(t) + L_f \frac{di_f(t)}{dt} = v_f(t)$
- **Acoplamento:** $T(t) = K_T i_f(t)$
- **Parte mecânica:** $J \frac{d^2\theta(t)}{dt^2} + B \frac{d\theta(t)}{dt} = T(t)$

onde $v_f(t)$ é a tensão de campo (entrada) e $\theta(t)$ é a posição angular (saída).

Exercício 1: Classificação de Sistemas

Para cada sistema abaixo, determine se é:

- 1 Linear ou não-linear
- 2 Invariante ou variante no tempo
- 3 Causal ou não-causal
- 4 Estável ou instável (BIBO)

Sistemas:

- a) $y(t) = 3x(t) + 5$
- b) $y(t) = x(t - 2) + x(t + 1)$
- c) $y(t) = t \cdot x(t)$
- d) $y(t) = \int_{-\infty}^t e^{-(t-\tau)} x(\tau) d\tau$
- e) $y(t) = x^2(t) + 2x(t)$

Tempo para resolução: 10 minutos

Exercício 2: Modelagem de Sistema Mecânico

Problema: Um sistema massa-mola possui massa $M = 2$ kg, constante da mola $K = 8$ N/m, e está sujeito a uma força externa $F(t)$.

Tarefas:

- 1 Derive a equação diferencial que relaciona a posição $x(t)$ com a força $F(t)$
- 2 Determine a frequência natural de oscilação
- 3 Classifique o sistema quanto à estabilidade
- 4 Escreva as equações em espaço de estados

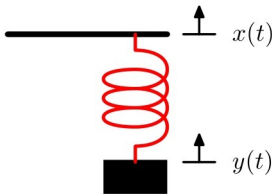


Figura: Sistema massa-mola para o exercício.

Tempo para resolução: 15 minutos

Exercício 3: Implementação MATLAB

Problema: Implementar e simular o sistema do Exercício 2.

```
% Parâmetros
M = 2; % massa (kg)
K = 8; % constante da mola (N/m)
% TODO: Definir matrizes A, B, C, D do espaço de estados
A = [?, ?; ?, ?];
B = [?; ?];
C = [?, ?];
D = 0;
% A FAZER: Criar sistema e simular resposta ao impulso
sys = ss(A, B, C, D);
[y, t] = impulse(sys);

% A FAZER: Plotar resultado e analisar
```

Listing 4: Template para o exercício

Objetivos:

- 1 Completar o código
- 2 Analisar a resposta ao impulso
- 3 Calcular e verificar a frequência natural

Propriedade	Tipo 1	Tipo 2
Linearidade	Linear (superposição)	Não-linear
Tempo	Invariante (LTI)	Variante
Memória	Instantâneo	Dinâmico
Causalidade	Causal	Não-causal
Tempo	Contínuo	Discreto
Sinais	Analógico	Digital
Inversibilidade	Inversível	Não-inversível
Estabilidade	Estável (BIBO)	Instável

Sistemas LTI (Lineares e Invariantes no Tempo):

- Mais importantes na prática
- Análise matemática bem desenvolvida
- Ferramentas poderosas disponíveis
- Base para sistemas de controle e processamento de sinais

Tipos de Descrição:

- **Externa:** Relação entrada-saída (função de transferência)
- **Interna:** Variáveis internas (espaço de estados)

Domínios de Aplicação:

- **Elétrico:** R, L, C + Leis de Kirchhoff
- **Mecânico:** M, K, B + Leis de Newton
- **Eletromecânico:** Combinação + equações de acoplamento

Ferramentas Matemáticas:

- Equações diferenciais ordinárias
- Transformada de Laplace
- Análise em espaço de estados
- Simulação computacional (MATLAB)

Próxima Aula: Análise no Domínio do Tempo de Sistemas LTI

- Resposta ao impulso
- Integral de convolução
- Resposta a condições iniciais
- Estabilidade de sistemas LTI

Preparação:

- Revisar equações diferenciais ordinárias
- Estudar o conceito de função impulso $\delta(t)$
- Praticar os exercícios propostos
- Ler Capítulo 2 do Lathi (Seções 2.1-2.3)

Recursos Adicionais:

- MATLAB/Simulink para simulações
- Exercícios do livro: Problemas 1.6-1 a 1.8-4
- Material complementar no moodle