

ENE0067 – Sinais e Sistemas em Tempo Contínuo

Análise do Domínio do Tempo de Sistemas em Tempo Contínuo

Prof. Eduardo Stockler Tognetti

Departamento de Engenharia Elétrica
Universidade de Brasília – UnB



Sumário

- 1 Introdução
- 2 Resposta de Entrada Nula
- 3 Resposta forçada
- 4 Resposta ao Impulso Unitário
- 5 Propriedades Fundamentais
- 6 Exercícios Aplicados
- 7 Conceitos Importantes
- 8 Resumo da Aula

Introdução à Análise no Domínio do Tempo

- A análise no domínio do tempo permite estudar o comportamento dos sistemas através de suas respostas temporais
- Para sistemas LCIT (Lineares, Contínuo e Invariantes no Tempo), podemos decompor a resposta total em duas componentes:
 - **Resposta de entrada nula:** devido às condições internas
 - **Resposta de estado nulo:** devido à entrada externa
- Esta decomposição é fundamental para entender o comportamento completo do sistema

Devido a linearidade tem-se:

Resposta Total

$$y(t) = y_0(t) + y_x(t)$$

onde $y_0(t)$ é a resposta de entrada nula (equação homogênea) e $y_x(t)$ é a resposta de estado nulo (resposta forçada, equação não homogênea).

- Análise de sistemas lineares invariantes no tempo (LIT) ou LTI do inglês *linear time-invariant systems*.

Sistema LCIT

Um sistema é Linear, Contínuo e Invariante no Tempo (LCIT) quando:

- **Linear:** satisfaz o princípio da superposição
- **Contínuo:** os sinais são definidos para todo $t \in \mathbb{R}$
- **Invariante no Tempo:** as características não mudam com o tempo
- **Causal:** assume-se também que o sistema é causal, i.e, a saída depende apenas da entrada presente e passada

Sistemas lineares diferenciais

- A entrada $x(t)$ e a saída $y(t)$ estão relacionadas por equações diferenciais lineares na forma

$$\frac{d^N y}{dt^N} + a_{N-1} \frac{d^{N-1} y}{dt^{N-1}} + \dots + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y(t) = b_M \frac{d^M x}{dt^M} + b_{M-1} \frac{d^{M-1} x}{dt^{M-1}} + \dots + b_1 \frac{dx}{dt} + b_0 x(t) \quad (1)$$

coeficientes a_i e b_i são constantes. Em sistemas práticos $M \leq N$, pois (1) se comporta como diferenciador de ordem $M - N$ (amplificação de ruídos).

⇒ Operador p : $p = d/dt$, $p^k y(t) = \frac{d^k y(t)}{dt^k}$

Equação Diferencial Geral

Um sistema LCIT de ordem N é descrito por:

$$Q(p)y(t) = P(p)x(t)$$

onde $Q(p) = p^N + a_{N-1}p^{N-1} + \dots + a_1p + a_0$ e $P(p) = b_Mp^M + \dots + b_1p + b_0$

Conceito de Resposta de Entrada Nula

Definição

A **resposta de entrada nula** $y_0(t)$ é a resposta do sistema gerada apenas pelas condições internas (condições iniciais), considerando que todas as entradas externas são nulas ($x = 0$).

- Representa o comportamento natural do sistema
- Depende apenas das condições iniciais
- É solução da **equação homogênea**: $Q(p)y_0(t) = 0$
- Revela as características intrínsecas do sistema (ex. pêndulo livre)

Espaço da solução

$Q(p)y_0(t) = 0$ é uma combinação linear das funções $y(t)$, $dy(t)/dt, \dots, d^N y(t)/dt^N$ e portanto a solução $y(t)$ deve necessariamente estar em um espaço de dimensão N .

• **Objetivo**: achar sinais **linearmente independentes** que formam uma **base** para o espaço de soluções da equação.

Independência Linear

Definição (Independência Linear)

Um conjunto de sinais $\{y_k(t), k = 1, \dots, m\}$ é linearmente independente se e somente se

$$\sum_{k=1}^m c_k y_k(t) = 0, \quad \forall t \quad \Rightarrow \quad c_k = 0, \quad k = 1, \dots, m$$

Exemplo (Linearmente independentes)

Os sinais $y_1(t) = 1$, $y_2(t) = t$ e $y_3(t) = t^2$ são linearmente independentes.

$$c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t) + c_3 y_3(t) = 0, \quad \forall t \quad \Rightarrow \quad c_1 = c_2 = c_3 = 0, \quad \text{pois} \quad (2)$$

$$\text{para } t = 0, 1, 2 : \det \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix} = 2 \neq 0 \quad (3)$$

Definição (Base)

A **combinação linear** de um conjunto de m sinais $y_k(t)$, isto é,

$$y(t) = \sum_{k=1}^m c_k y_k(t)$$

com escalares $c_k \in \mathbb{C}$ gera um espaço linear, cuja dimensão é dada pelo número $r \leq m$ de sinais linearmente independentes. Qualquer conjunto de r sinais que gere o mesmo espaço é uma **base** para esse espaço.

Propriedade (Independência linear)

Os sinais $y_1(t) = \exp(\lambda_1 t)$ e $y_2(t) = \exp(\lambda_2 t)$ são **linearmente independentes** se e somente se $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Note que $a_1 \exp(\lambda_1 t) + a_2 \exp(\lambda_2 t) = 0, \forall t$, implica

$$\left. \begin{array}{l} a_1 + a_2 = 0 \\ a_1 \exp(\lambda_1) + a_2 \exp(\lambda_2) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow a_1 = a_2 = 0$$

Determinação da Resposta de Entrada Nula

Método dos coeficientes a determinar

Para determinar $y_0(t)$, assumimos uma solução da forma $y_0(t) = ce^{\lambda t}$ e substituímos na equação homogênea:

$$Q(p)y_0(t) = 0$$

- Observe

$$\begin{aligned}y_0(t) = ce^{\lambda t} &\Rightarrow p^N y_0(t) = c\lambda^N e^{\lambda t} \\ Q(p)y_0(t) = 0 &\Rightarrow Q(\lambda)ce^{\lambda t} = 0\end{aligned}$$

- Para solução não trivial ($c \neq 0$):

$$Q(\lambda) = \lambda^N + a_{N-1}\lambda^{N-1} + \dots + a_1\lambda + a_0 = 0$$

- $Q(\lambda) = 0$ é a **equação característica** do sistema
- As raízes $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N$ de $Q(\lambda) = 0$ são as **raízes características** do sistema
- $e^{\lambda_i t}$ são os **modos próprios ou característicos** e são **linearmente independentes**.

Modos Característicos

Definição

Os **modos característicos** são as formas de resposta que o sistema pode manter por si só, sem entrada externa. São dados por $e^{\lambda_i t}$ para cada raiz característica λ_i .

Resposta de Entrada Nula Geral

Possíveis soluções: $c_1 e^{\lambda_1 t}, \dots, c_N e^{\lambda_N t}$. Para N raízes características distintas:

$$y_0(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t} + \dots + c_N e^{\lambda_N t}$$

As constantes $c_1, c_2, \dots, c_N$ são determinadas pelas N condições iniciais. A solução é a combinação linear dos modos característicos.

Importância

Os modos característicos determinam não apenas a resposta de entrada nula, mas também influenciam toda a resposta do sistema!

Resposta de Entrada Nula

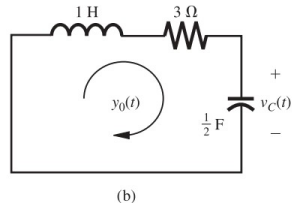
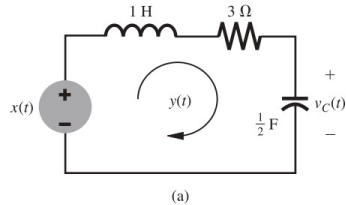


Figura: Resposta total $y(t) = y_0(t) + y_x(t)$ e resposta a entrada nula $y_0(t)$ do circuito RLC.

Exemplo com Duas Raízes Reais Distintas

Exemplo (Duas raízes reais distintas)

Considere o sistema descrito pela equação diferencial

$$p(p + 1/\tau)y = 0, \quad y(0) = 0, \quad \dot{y}(0) = 1/\tau$$

cuja equação característica é

$$\lambda(\lambda + 1/\tau) = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = -1/\tau$$

A solução é dada por

$$y(t) = a_1 + a_2 \exp(-t/\tau)$$

Das condições iniciais, tem-se

$$a_1 = 1, \quad a_2 = -1$$

Exemplo com Raízes Complexas Conjugadas

Exemplo (Duas raízes complexas conjugadas)

Considere o sistema descrito pela equação diferencial

$$(p^2 + 2\sqrt{3}p + 4)y = 0, \quad y(0) = 1, \quad \dot{y}(0) = 0$$

cujas raízes da equação característica são $\lambda_1 = -\sqrt{3} + j$, $\lambda_2 = -\sqrt{3} - j$

A solução é dada por $y(t) = a_1 \exp(\lambda_1 t) + a_2 \exp(\lambda_2 t)$

Das condições iniciais, tem-se

$$a_1 = \frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad a_2 = \frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}$$

De maneira equivalente, a combinação linear de modos próprios complexos conjugados pode ser escrita como

$$y(t) = a \exp(-\sqrt{3}t) \cos(t + \theta), \quad \theta = -\pi/3, \quad a = 2$$

Raiz Dupla

Propriedade (Raiz dupla)

Se λ é raiz dupla da equação característica $Q(\lambda) = 0$, então $\exp(\lambda t)$ e $t \exp(\lambda t)$ são modos próprios da equação (1), ou seja,

$$Q(p)(t \exp(\lambda t)) = \exp(\lambda t) \left(tQ(\lambda) + \frac{d}{d\lambda} Q(\lambda) \right) = 0$$

pois $Q(\lambda) = 0$ e $\frac{d}{dp} Q(p) \Big|_{p=\lambda} = 0$ quando λ é raiz dupla de $Q(\lambda)$.

Propriedade 8 (Raiz múltipla)

Se λ é raiz de multiplicidade r de $Q(\lambda)$, então $\exp(\lambda t)$, $t \exp(\lambda t)$, $\dots$, $t^{r-1} \exp(\lambda t)$ são modos próprios da equação (1).

1. Raízes Repetidas

Se λ é uma raiz de multiplicidade r , a solução geral é:

$$y_0(t) = (c_1 + c_2 t + c_3 t^2 + \dots + c_r t^{r-1})e^{\lambda t}$$

- Se o polinômio característico for

$$Q(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^r (\lambda - \lambda_{r+1}) \dots (\lambda - \lambda_N)$$

- a resposta à entrada nula será

$$y_0(t) = (c_1 + c_2 t + \dots + c_r t^{r-1})e^{\lambda_1 t} + c_{r+1}e^{\lambda_{r+1} t} + \dots + c_N e^{\lambda_N t}$$

- São N raízes características, dentre essas, r repetidas

2. Raízes Complexas Conjugadas

Para raízes $\lambda = \alpha \pm j\beta$ (**sempre aparecem em pares complexos conjugados**):

- Então a resposta à entrada nula é: $y_0(t) = c_1 e^{(\alpha+j\beta)t} + c_2 e^{(\alpha-j\beta)t}$
- Para $y_0(t)$ ser **real**, c_1 e c_2 devem ser **complexos conjugados**
- Reescrevendo os coeficientes c_1 e c_2 na forma polar como $c_1 = \frac{c}{2} e^{j\theta}$ e $c_2 = \frac{c}{2} e^{-j\theta}$, $c \in \mathbb{R}$:

$$y_0(t) = \frac{c}{2} e^{j\theta} e^{(\alpha+j\beta)t} + \frac{c}{2} e^{-j\theta} e^{(\alpha-j\beta)t} = ce^{\alpha t} \left(\frac{e^{j(\theta+\beta t)} + e^{-j(\theta+\beta t)}}{2} \right)$$

- Por Euler $y_0(t) = ce^{\alpha t} \cos(\beta t + \theta)$

● Interpretação:

- Raízes reais negativas: decaimento exponencial
- Raízes complexas: oscilações com envelope exponencial
- Raízes no eixo imaginário: oscilações sustentadas

Exemplo 1: Sistema de Segunda Ordem

• Sistema:

$$(p^2 + 3p + 2)y(t) = 0, \quad y_0(0) = 0, \quad \dot{y}_0(0) = 5$$

Solução

- 1 Equação característica: $\lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0$
- 2 Fatoração: $(\lambda + 1)(\lambda + 2) = 0$
- 3 Raízes: $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = -2$
- 4 Resposta geral: $y_0(t) = c_1 e^{-t} + c_2 e^{-2t}$

• Determinação das Constantes

$$y_0(0) = c_1 + c_2 = 0 \tag{4}$$

$$\dot{y}_0(0) = -c_1 - 2c_2 = -5 \tag{5}$$

Solução: $c_1 = 5, c_2 = -5 \Rightarrow \boxed{y_0(t) = 5e^{-t} - 5e^{-2t} = 5(e^{-t} - e^{-2t})}$

Gráfico da Resposta - Exemplo 1

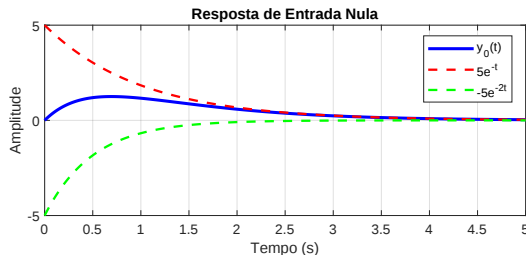


Figura: Resposta de entrada nula $y_0(t) = 5(e^{-t} - e^{-2t})$.

- Ambos os modos são decrescentes exponencialmente
- O modo e^{-2t} decai mais rapidamente que e^{-t}
- A resposta inicial é determinada pela diferença dos modos
- O sistema retorna ao estado de equilíbrio (zero) conforme $t \rightarrow \infty$

Código MATLAB - Exemplo 1

```
1 % Exemplo 1: Sistema de segunda ordem
2 % ( $p^2 + 3p + 2$ ) $y(t) = x(t)$ 
3 % Condições iniciais:  $y(0) = 0$ ,  $y'(0) = 5$ 
4 t = 0:0.01:5; % Definição do tempo
5 y0 = 5*(exp(-t) - exp(-2*t)); % Resposta de entrada nula
6 % Componentes individuais
7 modo1 = 5*exp(-t);
8 modo2 = -5*exp(-2*t);
9 % Gráfico
10 figure; plot(t, y0, 'b-', 'LineWidth', 2);
11 hold on; grid on;
12 plot(t, modo1, 'r—', 'LineWidth', 1.5);
13 plot(t, modo2, 'g—', 'LineWidth', 1.5);
14 xlabel('Tempo (s)'); ylabel('Amplitude');
15 title('Resposta de Entrada Nula');
16 legend('y_0(t)', '5e^{-t}', '-5e^{-2t}', 'Location', 'best');
```

Listing 1: Simulação da resposta de entrada nula

Exemplo 2: Raízes Complexas

• Sistema

$$(p^2 + 4p + 40)y(t) = 0, \quad y_0(0) = 2, \quad \dot{y}_0(0) = 16.78$$

Solução

- 1 Equação característica: $\lambda^2 + 4\lambda + 40 = 0$
- 2 Raízes complexas: $\lambda_1 = -2 + j6$, $\lambda_2 = -2 - j6$
- 3 Forma real: $y_0(t) = e^{-2t}(c \cos(6t) + d \sin(6t))$

• Determinação das Constantes

$$y_0(0) = c = 2 \tag{6}$$

$$\dot{y}_0(0) = -2c + 6d = 16.78 \tag{7}$$

Solução: $c = 2$, $d = 3.463 \Rightarrow$ $y_0(t) = e^{-2t}(2 \cos(6t) + 3.463 \sin(6t))$

Interpretação Física da Resposta Oscilatória

- Forma alternativa: $y_0(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t}$
- Determinação das Constantes

$$y_0(0) = c_1 + c_2 = 2 \quad (8)$$

$$\dot{y}_0(0) = c_1 \lambda_1 + c_2 \lambda_2 = 16.78 \quad (9)$$

Solução: $c_1 = 1 - j1.7317 = 2e^{-j\pi/3}$, $c_2 = 1 + j1.7317 = 2e^{j\pi/3} \Rightarrow y_0(t) = 4e^{-2t} \cos(6t - \pi/3)$

- Interpretação:
 - **Envelope exponencial:** e^{-2t} - determina o decaimento
 - **Oscilação:** $\cos(6t)$ e $\sin(6t)$ - frequência de 6 rad/s

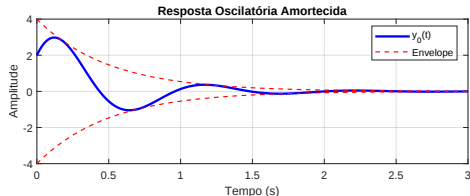


Figura: Resposta oscilatória amortecida com envelope exponencial.

Código MATLAB - Exemplo 2

```
1 % Exemplo 2: Raízes complexas
2 % (p^2 + 4p + 40)y(t) = x(t)
3 % Condições iniciais: y(0) = 2, y'(0) = 16.78
4 t = 0:0.01:3; % Definição do tempo
5 % Parâmetros
6 alpha = -2; beta = 6; c = 2; d = 3.463;
7 % Resposta de entrada nula
8 envelope = exp(alpha*t);
9 y0 = envelope.*(c*cos(beta*t) + d*sin(beta*t));
10 % Envelope superior e inferior
11 env_sup = envelope*sqrt(c^2 + d^2);
12 env_inf = -env_sup;
13 % Gráfico
14 figure; hold on;
15 plot(t, y0, 'b-', 'LineWidth', 2);
16 plot(t, env_sup, 'r—', 'LineWidth', 1);
17 plot(t, env_inf, 'r—', 'LineWidth', 1);
18 xlabel('Tempo (s)'); ylabel('Amplitude'); grid on;
19 title('Resposta Oscilatória Amortecida');
20 legend('y_0(t)', 'Envelope', 'Location', 'best');
```

Listing 2: Simulação de resposta oscilatória amortecida

Solução da equação não homogênea

Considere a equação diferencial não homogênea

$$Q(p)y(t) = P(p)x(t) \quad (10)$$

com condições iniciais conhecidas, que descreve um sistema linear não autônomo.

A equação (10) pode ser resolvida pelo método dos coeficientes a determinar sempre que $x(t)$ for solução de uma equação diferencial homogênea dada por $\bar{Q}(p)x(t) = 0$

O polinômio $\bar{Q}(p)$ define os modos do espaço que contém $x(t)$. Portanto, multiplicando a equação dos dois lados por $\bar{Q}(p)$, tem-se a equação homogênea

$$\bar{Q}(p)Q(p)y(t) = P(p)\bar{Q}(p)x(t) = 0$$

que contém os **modos próprios** de $Q(p)$ e os **modos forçados** de $\bar{Q}(p)$.

As condições iniciais que permitem a solução desse sistema aumentado são as originais acrescidas de tantas quanto for o grau de $\bar{Q}(p)$, obtidas por substituição sistemática na equação (10).

Solução forçada

O método dos coeficientes a determinar pode ser aplicado diretamente à equação diferencial não homogênea (10). Para isso, identificam-se as parcelas da **resposta natural ou homogênea**, $y_n(t)$, e **resposta forçada**, $y_f(t)$, (devido à entrada) da solução.

$$\begin{aligned}y(t) = y_n(t) + y_f(t) &\Rightarrow Q(p)(y_n(t) + y_f(t)) = P(p)x(t) \\ Q(p)y_f(t) &= N(p)x(t)\end{aligned}\tag{11}$$

pois $Q(p)y_n(t) = 0$. As parcelas homogênea e forçada são dadas por

$$y_n(t) = \sum_{k=1}^m a_k f_k(t) \quad , \quad y_f(t) = \sum_{k=1}^{\bar{m}} b_k g_k(t)$$

sendo $f_k(t)$ os m modos próprios associados a $Q(\lambda) = 0$ e g_k os $\bar{m}$ modos forçados associados a $\bar{Q}(\gamma) = 0$, **considerando-se as possíveis multiplicidades com as raízes λ** .

Determinando os coeficientes a_k e b_k

Os coeficientes são obtidos sequencialmente. Primeiro, os coeficientes b_k são obtidos da equação (11) e, em seguida, os coeficientes a_k são obtidos a partir das condições iniciais aplicadas na solução $y(t) = y_n(t) + y_f(t)$ ($y_n(0) + y_f(0) = y(0)$, $\dot{y}_n(0) + \dot{y}_f(0) = \dot{y}(0)$, ...).

Solução forçada

Exemplo: de raízes γ da equação característica que fornece os modos forçados $g_k(t)$, espaço que gera a entrada $x(t)$, considerando que os modos forçados (γ_i) são distintos dos modos próprios (λ_i) obtidos a partir da equação homogênea.

- $x(t) = 2e^{-3t}$: $\bar{Q}(p) = p + 3$, $\bar{Q}(\gamma) = 0 \Rightarrow \gamma = -3 \Rightarrow g(t) = be^{-3t}$
- $x(t) = 5u(t)$: $\bar{Q}(p) = p$, $\bar{Q}(\gamma) = 0 \Rightarrow \gamma = 0 \Rightarrow g(t) = be^0$
- $x(t) = \cos(2t)$: $\bar{Q}(p) = p^2 + 4$, $\bar{Q}(\gamma) = 0 \Rightarrow \gamma_1 = 2j, \gamma_2 = -2j \Rightarrow g(t) = b_1 e^{j2t} + b_2 e^{-j2t}$
- $x(t) = t$: $\bar{Q}(p) = p^2$, $\bar{Q}(\gamma) = 0 \Rightarrow \gamma_1 = 0, \gamma_2 = 0 \Rightarrow g(t) = b_1 + b_2 t$
- $x(t) = t^2 + 5t + 3$: $\bar{Q}(p) = p^3$, $\bar{Q}(\gamma) = 0 \Rightarrow \gamma_{1,2,3} = 0 \Rightarrow g(t) = b_2 t^2 + b_2 t + b_1$
- $x(t) = 3te^{4t}$: $\bar{Q}(p) = (p - 4)^2$, $\bar{Q}(\gamma) = 0 \Rightarrow \gamma_1 = 4, \gamma_2 = 4 \Rightarrow g(t) = (b_1 + b_2 t)e^{4t}$

Se os modos não são distintos ($\gamma_i = \lambda_i$, para algum i), considerar multiplicidade. Exemplo:

- $\lambda_1 = -3$ e $x(t) = 2e^{-3t}$: $\bar{Q}(p) = p + 3$, $\bar{Q}(\gamma) = 0 \Rightarrow \gamma = -3 \Rightarrow g(t) = bte^{-3t}$

Exemplo – Solução forçada à entrada senoidal

Exemplo: Solução forçada à entrada senoidal)

Considere o sistema descrito pela equação diferencial

$$(p + 1)y = 10 \cos(2t) \quad , \quad y(0) = 0$$

A raiz de $Q(\lambda) = 0$ é -1 e as raízes de $\bar{Q}(\gamma) = 0$ são $\gamma_1 = 2j$, $\gamma_2 = -2j$ e portanto não há coincidência de raízes entre $Q(\lambda) = 0$ e $\bar{Q}(\gamma) = 0$. Assim,

$$y_f(t) = b_1 \exp(\gamma_1 t) + b_2 \exp(\gamma_2 t)$$

Substituindo na equação, tem-se

$$\gamma_1 b_1 \exp(\gamma_1 t) + \gamma_2 b_2 \exp(\gamma_2 t) + b_1 \exp(\gamma_1 t) + b_2 \exp(\gamma_2 t) = 5 \exp(\gamma_1 t) + 5 \exp(\gamma_2 t)$$

resultando em $b_1 = \frac{5}{\gamma_1 + 1} = 1 - j2$, $b_2 = \frac{5}{\gamma_2 + 1} = 1 + j2$

Exemplo – Solução forçada à entrada senoidal

Assim,

$$y(t) = a \exp(-t) + (1 - j2) \exp(j2t) + (1 + j2) \exp(-j2t)$$

Das condições iniciais, obtém-se $a = -2$.

Note que os modos forçados podem ser escritos em termos trigonométricos, ou seja,

$$y_f(t) = b_c \cos(2t) + b_s \sin(2t)$$

Derivando e substituindo na equação, obtêm-se

$$b_c = 2 \quad , \quad b_s = 4$$

ou, ainda,

$$y_f(t) = 10 \left| \frac{1}{1 + j2} \right| \cos \left(2t + \angle \frac{1}{1 + j2} \right) \approx 4.47 \cos(2t - 1.11)$$

Exemplo – Solução forçada à entrada exponencial

Raízes características coincidentes

Considere o sistema $Q(p)y(t) = P(p)x(t)$ dado por

$$(p + 1)y(t) = 10 \exp(-t) \quad , \quad y(0) = 1$$

Observe que as raízes características são

$$\lambda = -1 \text{ (devido a eq. homogênea, } Q(\lambda) = 0) \quad , \quad \gamma = -1 \text{ (devido a entrada, } \bar{Q}(\gamma) = 0)$$

Portanto, a parte forçada é dada por

$$y_f(t) = b t \exp(-t) \implies b = 10$$

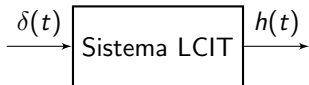
A solução é

$$y(t) = a \exp(-t) + 10t \exp(-t) \implies a = 1$$

Conceito da Resposta ao Impulso

Definição

A **resposta ao impulso unitário** $h(t)$ é a resposta do sistema quando a entrada é o impulso unitário $\delta(t)$ e todas as condições iniciais são nulas.



- Equação: $Q(p)h(t) = P(p)\delta(t)$
- Como $\delta(t) = 0$ para $t > 0$, temos $Q(p)h(t) = 0$ para $t > 0$
- Portanto, $h(t)$ é uma combinação dos modos característicos para $t > 0$

Importância Fundamental

A resposta ao impulso caracteriza completamente um sistema LCIT. Conhecendo $h(t)$, podemos determinar a resposta a qualquer entrada!

Representação de um sinal por impulsos

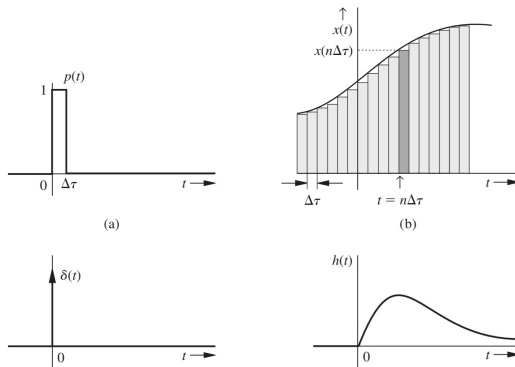


Figura: Representação de um sinal por soma de impulsos quando $\Delta t \rightarrow 0$.

→ Se conhecemos a resposta do sistema a um impulso unitário $\delta(t)$, podemos determinar imediatamente a resposta do sistema a uma entrada arbitrária $x(t)$ adicionando a resposta do sistema a cada componente de impulso de $x(t)$.

Cálculo da Resposta ao Impulso Unitário

- Métodos de cálculo da resposta $h(t)$ ao impulso unitário $\delta(t)$:
 - ① Método via coeficientes a determinar
 - ② Método clássico de casamento de impulso: cálculo das novas condições iniciais para $t = 0^+$
 - ③ Método simplificado de casamento de impulso: condições iniciais pré estabelecidas

↪ Os métodos de cálculo da resposta ao impulso são apresentados em documento a parte.

Propriedade de Invariância no Tempo

Theorem (Resposta ao Impulso Atrasado)

Se $h(t)$ é a resposta de um sistema LCIT à entrada $\delta(t)$, então $h(t - T)$ é a resposta do mesmo sistema à entrada $\delta(t - T)$.

- Esta propriedade decorre diretamente da invariância temporal
- Simbolicamente: $\delta(t - T) \xrightarrow{\text{Sistema}} h(t - T)$
- Permite determinar a resposta a impulsos atrasados
- Base fundamental para a integral de convolução



Figura: Impulso atrasado e sua resposta correspondente. Fonte: Lathi, 2000.

Relação entre Modos Característicos e Resposta ao Impulso

Conexão Fundamental

A resposta ao impulso é uma combinação linear dos modos característicos do sistema, pois para $t > 0$, o impulso $\delta(t) = 0$ e a equação se torna homogênea.

- Para $t > 0$: $Q(p)h(t) = 0$ (equação homogênea)
- Portanto: $h(t) =$ combinação dos modos característicos
- As condições iniciais são determinadas pela entrada impulsiva
- Os modos característicos aparecem em todas as respostas do sistema!

Universalidade dos Modos

Os modos característicos são universais - aparecem tanto na resposta de entrada nula quanto na resposta ao impulso, sendo fundamentais para todo o comportamento do sistema.

Interpretação Física dos Conceitos

Resposta de Entrada Nula

- Como um sistema "esquece" suas condições iniciais
- Movimento natural sem influência externa
- Exemplo: oscilação livre de um pêndulo

Resposta ao Impulso

- Como um sistema reage a uma "pancada" instantânea
- Revela a "personalidade" dinâmica do sistema
- Exemplo: som de um sino após ser tocado

Modos Característicos

- As "frequências preferidas" do sistema
- Movimentos que o sistema pode sustentar naturalmente
- Determinam estabilidade e comportamento temporal

Exercício 1

● Problema Determine a resposta de entrada nula $y_0(t)$ para o sistema:
 $(p^2 + 5p + 6)y(t) = (2p + 3)x(t)$ com condições iniciais $y_0(0) = 1$ e $\dot{y}_0(0) = -2$.

Solução

- ① Equação característica: $\lambda^2 + 5\lambda + 6 = 0$
- ② Fatoração: $(\lambda + 2)(\lambda + 3) = 0$
- ③ Raízes: $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = -3$
- ④ Forma geral: $y_0(t) = c_1 e^{-2t} + c_2 e^{-3t}$

● Determinação das Constantes:

$$y_0(0) = c_1 + c_2 = 1 \quad (12)$$

$$\dot{y}_0(0) = -2c_1 - 3c_2 = -2 \quad (13)$$

Resolvendo: $c_1 = 1$, $c_2 = 0 \Rightarrow \boxed{y_0(t) = e^{-2t}}$

Exercício 2

- Problema Determine a resposta ao impulso $h(t)$ para o sistema: $(p^2 + 4p + 3)y(t) = (p + 2)x(t)$

Análise

- $N = 2, M = 1, b_1 = 1$
- Condições iniciais: $h(0^-) = 0, \dot{h}(0^-) = 1$
- Equação característica: $\lambda^2 + 4\lambda + 3 = 0$
- Raízes: $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = -3$

Solução

- 1 $h(t) = c_1 e^{-t} + c_2 e^{-3t}$ para $t > 0$
- 2 $h(0) = c_1 + c_2 = 0$
- 3 $\dot{h}(0) = -c_1 - 3c_2 = 1$

- 4 Resolvendo: $c_1 = -1/2, c_2 = 1/2 \Rightarrow$

$$h(t) = \frac{1}{2}(e^{-3t} - e^{-t})u(t)$$

Código MATLAB - Exercício 2

```
1 % Exercício 2: Resposta ao impulso
2 %  $(p^2 + 4p + 3)y = (p + 2)x$ 
3 t = 0:0.01:5; % Definição do tempo
4 % Resposta ao impulso
5 h = 0.5*(exp(-3*t) - exp(-t));
6 % Componentes individuais
7 comp1 = 0.5*exp(-3*t);
8 comp2 = -0.5*exp(-t);
9
10 % Gráfico
11 figure; hold on;
12 plot(t, h, 'b-', 'LineWidth', 2);
13 plot(t, comp1, 'r—', 'LineWidth', 1.5);
14 plot(t, comp2, 'g—', 'LineWidth', 1.5);
15 xlabel('Tempo (s)'); ylabel('h(t)');
16 title('Resposta ao Impulso - Exercício 2'); grid on;
17 legend('h(t)', '0.5e^{-3t}', '-0.5e^{-t}', 'Location', 'best');
18 % Verificação da integral (deve ser finita para sistema estável)
19 integral_h = trapz(t, abs(h));
20 fprintf('Integral de |h(t)|: %.4f\n', integral_h);
```

Listing 3: Simulação da resposta ao impulso do Exercício 2

Exercício 3

Problema

Para o sistema oscilatório: $(p^2 + 2p + 5)y(t) = x(t)$

- a) Determine os modos característicos
- b) Encontre $y_0(t)$ para $y_0(0) = 1$, $\dot{y}_0(0) = 0$
- c) Determine a resposta ao impulso $h(t)$

Solução - Parte (a)

- ① Equação característica: $\lambda^2 + 2\lambda + 5 = 0$
- ② Discriminante: $\Delta = 4 - 20 = -16 < 0$
- ③ Raízes complexas: $\lambda = -1 \pm j2$
- ④ Modos característicos: $e^{-t} \cos(2t)$ e $e^{-t} \sin(2t)$

Exercício 3 - Continuação

Solução - Parte (b)

① Forma geral: $y_0(t) = e^{-t}(c \cos(2t) + d \sin(2t))$

② Condição inicial: $y_0(0) = c = 1$

③ Derivada: $\dot{y}_0(t) = e^{-t}[(-c + 2d) \cos(2t) + (-d - 2c) \sin(2t)]$

④ Condição inicial: $\dot{y}_0(0) = -c + 2d = 0 \Rightarrow d = 1/2$:

$$y_0(t) = e^{-t} \left(\cos(2t) + \frac{1}{2} \sin(2t) \right)$$

Solução - Parte (c)

① $N = 2, M = 0, b_0 = 1$

② Condições: $h(0^-) = 0, \dot{h}(0^-) = 0, \ddot{h}(0^-) = 1$

③ Para este caso: $h(t) = 0$ para $t < 0$ e solução homogênea para $t > 0$

④ Aplicando condições: $h(t) = \frac{1}{2} e^{-t} \sin(2t) u(t) \Rightarrow$

$$h(t) = \frac{1}{2} e^{-t} \sin(2t) u(t)$$

Visualização do Exercício 3

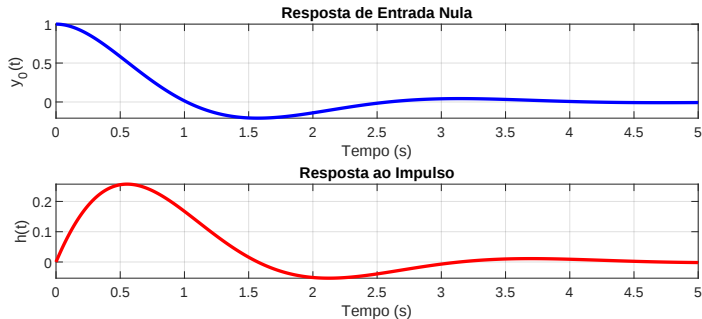


Figura: Respostas do sistema oscilatório: (a) resposta de entrada nula, (b) resposta ao impulso.

- Sistema subamortecido com $\zeta = 1/\sqrt{5} \approx 0.447$
- Frequência natural: $\omega_n = \sqrt{5} \approx 2.236$ rad/s
- Frequência amortecida: $\omega_d = 2$ rad/s
- Ambas as respostas são oscilatórias com envelope exponencial decrescente

Código MATLAB - Exercício 3 Completo

```
1 % Exercício 3: Sistema oscilatório
2 % (p^2 + 2p + 5)y = x
3 % Parâmetros do sistema
4 zeta = 1/sqrt(5); % Fator de amortecimento
5 wn = sqrt(5); % Frequência natural
6 wd = 2; % Frequência amortecida
7 alpha = -1; % Parte real das raízes
8
9 t = 0:0.01:5; % Definição do tempo
10 % Parte (b): Resposta de entrada nula
11 y0 = exp(alpha*t).*(cos(wd*t) + 0.5*sin(wd*t));
12 % Parte (c): Resposta ao impulso
13 h = 0.5*exp(alpha*t).*sin(wd*t);
14 % Gráfico comparativo
15 figure; subplot(2,1,1);
16 plot(t, y0, 'b-', 'LineWidth', 2); grid on;
17 xlabel('Tempo (s)'); ylabel('y_0(t)'); title('Resposta de Entrada Nula');
18 subplot(2,1,2);
19 plot(t, h, 'r-', 'LineWidth', 2); grid on;
20 xlabel('Tempo (s)'); ylabel('h(t)'); title('Resposta ao Impulso');
```

Listing 4: Análise completa do sistema oscilatório

Estabilidade e Modos Característicos

Definição (Estabilidade BIBO)

Um sistema é estável BIBO (Bounded Input, Bounded Output) se toda entrada limitada produz saída limitada.

Theorem (Condição de Estabilidade)

Um sistema LCIT é estável se e somente se todas as raízes características têm parte real negativa.

- **Raízes com $\text{Re}(\lambda) < 0$:** modos **próprios** decrescentes (estável)
- **Raízes com $\text{Re}(\lambda) = 0$:** modos **próprios** marginalmente estáveis
- **Raízes com $\text{Re}(\lambda) > 0$:** modos **próprios** crescentes (instável)

Critério Prático

Para verificar estabilidade, analise a localização das raízes características no plano complexo. Todas devem estar no semiplano esquerdo.

Tipos de Resposta Segundo os Modos

Classificação por Raízes Características

- **Raízes reais negativas:** resposta aperiódica decrescente
- **Raízes complexas com $\text{Re}(\lambda) < 0$:** resposta oscilatória amortecida
- **Raízes imaginárias puras:** resposta oscilatória sustentada
- **Raízes reais positivas:** resposta aperiódica crescente (instável)
- **Raízes complexas com $\text{Re}(\lambda) > 0$:** resposta oscilatória crescente (instável)

Tipos de Resposta Segundo os Modos Próprios

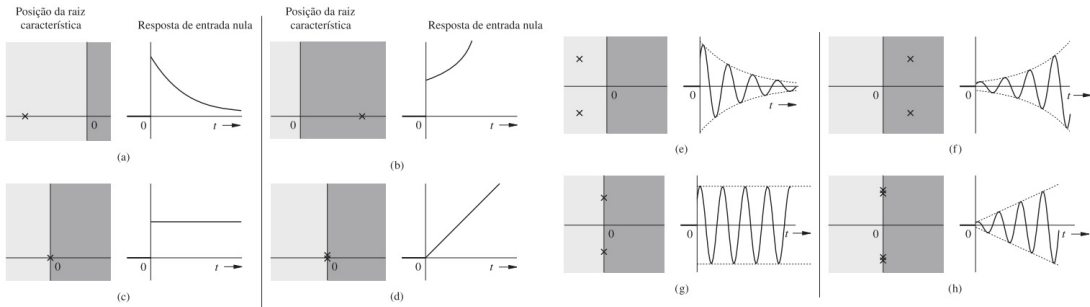


Figura: Localização das raízes no plano s e tipos de resposta correspondentes.

Constante de Tempo e Comportamento Transitório

Definição (Constante de Tempo)

Para um modo $e^{-\sigma t}$ ($\sigma > 0$), a constante de tempo é $\tau = 1/\sigma$.

- Após $t = \tau$: amplitude reduz para $e^{-1} \approx 0.368$ do valor inicial
- Após $t = 3\tau$: amplitude reduz para $e^{-3} \approx 0.05$ (5)
- Após $t = 5\tau$: amplitude reduz para $e^{-5} \approx 0.007$ (0.7)

Tempo de Estabelecimento

O tempo para a resposta transitória "desaparecer" é tipicamente considerado como $t_s \approx 3\tau$ a 5τ , dependendo da precisão desejada.

Exemplo

Para $\lambda = -2$: $\tau = 1/2 = 0.5$ s, então $t_s \approx 1.5$ a 2.5 s.

Circuito RC

- Equação: $RC \frac{dv_C}{dt} + v_C = v_{in}$
- Forma operacional: $(RCp + 1)v_C = v_{in}$
- Raiz característica: $\lambda = -1/(RC)$
- Constante de tempo: $\tau = RC$

Circuito RLC Série

- Equação: $L \frac{d^2 i}{dt^2} + R \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} i = \frac{dv_{in}}{dt}$
- Raízes: $\lambda = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}}$
- Comportamento depende do discriminante (subamortecido, crítico, superamortecido)

Resumo dos Conceitos Principais

1. Resposta de Entrada Nula

- Resposta às condições internas com entrada nula
- Combinação linear dos modos característicos
- Determinada pelas condições iniciais

2. Resposta ao Impulso Unitário

- Resposta característica fundamental do sistema
- Também é combinação dos modos característicos
- Condições iniciais determinadas pela entrada impulsiva

3. Modos Característicos

- Formas naturais de resposta do sistema
- Determinados pelas raízes da equação característica
- Aparecem em todas as respostas do sistema
- Determinam estabilidade e comportamento transitório

Fórmulas e Resultados Importantes

Equações Fundamentais

- Equação característica: $Q(\lambda) = 0$
- Resposta de entrada nula: $y_0(t) = \sum_{i=1}^N c_i e^{\lambda_i t}$
- Resposta ao impulso: $h(t) = \sum_{i=1}^N d_i e^{\lambda_i t} u(t)$

Casos Especiais

- Raízes repetidas: incluir termos $t^k e^{\lambda t}$
- Raízes complexas: usar forma real $e^{\alpha t} [\cos(\beta t), \sin(\beta t)]$
- Estabilidade: todas as raízes com $\text{Re}(\lambda) < 0$

Próximos Passos

- Resposta de estado nulo (entrada externa)
- Integral de convolução
- Análise de sistemas interconectados

Exercícios para Casa

- 1 Determine a resposta de entrada nula para: $(p^2 + 6p + 9)y(t) = 2x(t)$ com $y_0(0) = 3$, $\dot{y}_0(0) = -7$
- 2 Encontre a resposta ao impulso para: $(p^2 + 4p + 13)y(t) = (p + 1)x(t)$
- 3 Para o sistema $(p^3 + 6p^2 + 11p + 6)y(t) = x(t)$:
 - Determine as raízes características
 - Classifique a estabilidade
 - Estime o tempo de estabelecimento
- 4 Simule no MATLAB as respostas dos exercícios anteriores e compare com as soluções analíticas.

Leitura Recomendada

Lathi, Capítulo 2, Seções 2.1 a 2.3 (páginas 145-160)