

Sinais e Sistemas em Tempo Contínuo

Aula 04 - Apêndice: Métodos para o Cálculo da Resposta ao Impulso de Sistemas em Tempo Contínuo

Prof. Eduardo Stockler Tognetti

Departamento de Engenharia Elétrica
Universidade de Brasília – UnB



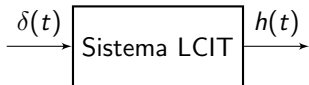
Sumário

- 1 Introdução
- 2 Método 1: coeficientes a determinar
- 3 Método 2
- 4 Natureza da Resposta ao Impulso
- 5 Exemplo Clássico
- 6 Método 3
- 7 Demonstração do Método 3
- 8 Generalização e Comentários

Conceito da Resposta ao Impulso

Definição

A **resposta ao impulso unitário** $h(t)$ é a resposta do sistema quando a entrada é o impulso unitário $\delta(t)$ e todas as condições iniciais são nulas.



- Equação: $Q(p)h(t) = P(p)\delta(t)$
- Como $\delta(t) = 0$ para $t > 0$, temos $Q(p)h(t) = 0$ para $t > 0$
- Portanto, $h(t)$ é uma combinação dos modos característicos para $t > 0$

Importância Fundamental

A resposta ao impulso caracteriza completamente um sistema LCIT. Conhecendo $h(t)$, podemos determinar a resposta a qualquer entrada!

Cálculo da Resposta ao Impulso Unitário

- Métodos de cálculo da resposta $h(t)$ ao impulso unitário $\delta(t)$:
 - 1 Método via coeficientes a determinar
 - 2 Método clássico de casamento de impulso: cálculo das novas condições iniciais para $t = 0^+$
 - 3 Método simplificado de casamento de impulso: condições iniciais pré estabelecidas
- A resposta ao impulso também pode ser obtida por meio da transformada inversa de Laplace da função de transferência do sistema, $h(t) = \mathcal{L}^{-1}\{H(s)\}$, conforme será visto posteriormente.

Método 1

Resposta ao impulso via coeficientes a determinar

Método 1: Resposta ao impulso via coeficientes a determinar

$$Q(p)y(t) = P(p)x(t) \quad , \quad x(t) = \delta(t) \quad (\text{condições iniciais nulas})$$

A priori, o método dos coeficientes a determinar não poderia ser utilizado para determinar $y(t)$ pois não existe equação diferencial linear com coeficientes constantes que produza como solução a função $\delta(t)$.

Entretanto, a resposta ao impulso pode ser calculada pelo método dos coeficientes a determinar da seguinte forma. Primeiramente, resolva

$$Q(p)f(t) = 1 \quad (\text{condições iniciais nulas, } f(0) = 0, \dot{f}(0) = 0, \dots)$$

Observe que

$$\begin{aligned} Q(p)f(t) = 1 &\Rightarrow Q(p)f(t)u(t) = u(t) \\ &\Rightarrow Q(p)P(p)f(t)u(t) = P(p)u(t) \Rightarrow Q(p)pP(p)(f(t)u(t)) = P(p)\delta(t) \end{aligned}$$

A resposta ao degrau é dada por $y_u(t) = P(p)(f(t)u(t))$, usando o operador p aplicado ao produto.

Por linearidade, a resposta ao impulso é dada pela derivada da resposta ao degrau $y_u(t)$, isto é,

$$h(t) = pP(p)(f(t)u(t))$$

Exemplo – Resposta ao impulso

Exemplo de resposta ao impulso

Considere $(p + 2)(p - 3)y(t) = px(t)$, $x(t) = \delta(t)$ (condições iniciais nulas)

$$(p + 2)(p - 3)f(t) = 1 \Rightarrow f(t) = b + a_1 \exp(-2t) + a_2 \exp(3t)$$

$$b = -\frac{1}{6} \quad , \quad f(0) = \dot{f}(0) = 0 \Rightarrow a_1 = \frac{1}{10} \quad , \quad a_2 = \frac{1}{15}$$

A resposta ao degrau é dada por (observe que $f(t)\delta(t) = f(0)\delta(t) = 0$, pois $f(0) = 0$)

$$y_u(t) = p(f(t)u(t)) = (pf(t))u(t) + f(t)(pu(t)) = (pf(t))u(t) + f(0)\delta(t) = \dot{f}(t)u(t) \quad (1)$$

$$\Rightarrow y_u(t) = (-2a_1 \exp(-2t) + 3a_2 \exp(3t))u(t) = \frac{1}{5} (\exp(3t) - \exp(-2t))u(t) \quad (2)$$

e a resposta ao impulso é dada por $h(t) = py_u(t)$

$$h(t) = p(\dot{f}(t)u(t)) = \ddot{f}(t)u(t) + \dot{f}(0)\delta(t) = \ddot{f}(t)u(t) = \frac{1}{5} (3 \exp(3t) + 2 \exp(-2t))u(t)$$

Método 2

Método clássico de casamento de impulso:
cálculo das novas condições iniciais para $t = 0^+$

Resposta ao Impulso: Conceito Fundamental

Definição

A resposta ao impulso unitário $h(t)$ é a resposta do sistema a uma entrada impulsiva $\delta(t)$ aplicada em $t = 0$, com todas as condições iniciais zero para $t = 0^-$.

Importância

- Permite determinar a resposta do sistema a qualquer entrada arbitrária
- Fornece informações valiosas sobre o comportamento do sistema
- Base para a análise no domínio do tempo via convolução

Analogia

Uma entrada em impulso $\delta(t)$ é como um raio: atinge instantaneamente e some, mas reorganiza os objetos atingidos.

Equação Diferencial

Consideremos um sistema LCIT descrito pela equação diferencial de ordem N :

$$Q(p)y(t) = P(p)x(t) \quad (3)$$

onde:

$$Q(p) = p^N + a_{N-1}p^{N-1} + \dots + a_1p + a_0 \quad (4)$$

$$P(p) = b_Mp^M + b_{M-1}p^{M-1} + \dots + b_1p + b_0 \quad (5)$$

Caso Prático

Para sistemas práticos (considerações de ruído): $M \leq N$

Caso mais geral: $M = N$, então:

$$(p^N + a_{N-1}p^{N-1} + \dots + a_0)y(t) = (b_N + b_{N-1}p^{N-1} + \dots + b_1p + b_0)x(t) \quad (6)$$

Natureza Qualitativa da Resposta ao Impulso

Análise Qualitativa

- O impulso $\delta(t)$ aparece momentaneamente em $t = 0$ e desaparece
- Resulta no armazenamento de energia e cria condições iniciais não nulas para $t = 0^+$
- Para $t > 0$, não há mais entrada, mas o sistema responde às condições iniciais criadas

Forma Geral

A resposta ao impulso deve constituir os modos característicos para $t \geq 0^+$:

$$h(t) = \text{termos dos modos característicos}, \quad t \geq 0^+ \quad (7)$$

Resposta Completa

Para $t = 0$, pode haver um impulso, então:

$$h(t) = C\delta(t) + \text{termos dos modos característicos}, \quad t \geq 0 \quad (8)$$

em que C é um coeficiente a determinar.

Determinação do coeficiente C

Casamento de Impulso

Para $x(t) = \delta(t)$ e $y(t) = h(t)$ na equação do sistema:

$$Q(p)h(t) = P(p)\delta(t) \quad (9)$$

Comparação de Termos Impulsivos

Substituindo $h(t) = C\delta(t) + \text{modos característicos}$ e comparando coeficientes dos termos impulsivos: A derivada de mais alta ordem do impulso nos dois lados é N :

- Lado esquerdo: coeficiente C
- Lado direito: coeficiente b_N

Portanto: $C = b_N$

Resultado

$$h(t) = b_N\delta(t) + \text{modos característicos} \quad (10)$$

Nota: Se $M < N$, então $b_N = 0$ e não há termo impulsivo.

Exemplo 1: Sistema de Segunda Ordem

Problema

Determine a resposta $h(t)$ ao impulso unitário para o sistema:

$$(p^2 + 5p + 6)y(t) = (p + 1)x(t) \quad (11)$$

Solução - Passo 1: Modos Característicos

Polinômio característico: $\lambda^2 + 5\lambda + 6 = (\lambda + 2)(\lambda + 3)$

Raízes características: $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = -3$

Portanto:

$$h(t) = c_1 e^{-2t} + c_2 e^{-3t}, \quad t \geq 0 \quad (12)$$

Passo 2: Termo Impulsivo

Como $P(p) = p + 1$, temos $b_N = b_2 = 0$

Logo, não há termo impulsivo: $h(t) = c_1 e^{-2t} + c_2 e^{-3t}$

Exemplo 1: Determinação dos Coeficientes

Casamento de Impulso

Fazendo $x(t) = \delta(t)$ e $y(t) = h(t)$ na equação:

$$(p^2 + 5p + 6)h(t) = (p + 1)\delta(t) \quad (13)$$

• Observe que do lado direito de (13) temos $\delta(t)$ e $\dot{\delta}(t)$ e do lado esquerdo temos os termos $h(t)$, $\dot{h}(t)$ e $\ddot{h}(t)$ $\rightsquigarrow$ portanto para a igualdade é necessário um degrau nas condições iniciais de $h(t)$ ($\dot{h}(t) \rightsquigarrow \delta(t)$) e de $\dot{h}(t)$ ($\ddot{h}(t) \rightsquigarrow \dot{\delta}(t)$).

Condições Iniciais

- Antes do impulso: $h(0^-) = 0$, $\dot{h}(0^-) = 0$
- Após o impulso: $h(0^+) = K_1$, $\dot{h}(0^+) = K_2$

O salto de descontinuidade resulta em termos impulsivos:

- $h(t) = K_1 u(t)$, $t = 0 \Rightarrow \dot{h}(0) = K_1 \delta(t)$
- $\dot{h}(t) = K_1 \delta(t) + K_2 u(t)$, $t = 0 \Rightarrow \ddot{h}(0) = K_1 \dot{\delta}(t) + K_2 \delta(t)$

Exemplo 1: Determinação dos Coeficientes

Casamento de Impulso

Resolver para $t = 0$

$$(p^2 + 5p + 6)h(t) = (p + 1)\delta(t) \quad (14)$$

em que

$$\dot{h}(0) = K_1\delta(t), \quad \ddot{h}(0) = K_1\dot{\delta}(t) + K_2\delta(t)$$

$$\ddot{h}(0) + 5\dot{h}(0) + 6h(0) = \dot{\delta}(t) + \delta(t) \\ (K_1\dot{\delta}(t) + K_2\delta(t)) + 5K_1\delta(t) + 6h(0) = \dot{\delta}(t) + \delta(t) \Rightarrow \begin{cases} \text{Coef. de } \dot{\delta}(t) : K_1 = 1 \\ \text{Coef. de } \delta(t) : 5K_1 + K_2 = 1 \Rightarrow K_2 = -4 \end{cases}$$

● A partir das condições iniciais $h(0^+) = K_1 = 1$ e $\dot{h}(0^+) = K_2 = -4$, achar coeficientes c_1 e c_2 :

$$h(t) = (c_1 e^{-2t} + c_2 e^{-3t})u(t) \Rightarrow \begin{cases} h(0^+) : c_1 + c_2 = K_1 = 1 \\ \dot{h}(0^+) : -2c_1 - 3c_2 = K_2 = -4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 = -1 \\ c_2 = 2 \end{cases}$$

Método 3

Método simplificado de casamento de impulso:
condições iniciais pré estabelecidas

Método Simplificado de Casamento de Impulso

Motivação

O método apresentado no Exemplo 1 pode ser simplificado usando uma rotina mais direta para determinação de $h(t)$.

Resultado Principal

Para um sistema LCIT especificado pela Eq. (3), a resposta $h(t)$ ao impulso unitário é:

$$h(t) = b_N \delta(t) + [P(p)y_n(t)]u(t) \quad (15)$$

onde $y_n(t)$ é a combinação linear dos modos característicos sujeita às condições iniciais específicas.

Condições Iniciais para o Método Simplificado

Condições Gerais

$y_n(t)$ é sujeito às seguintes condições iniciais:

$$y_n^{(k)}(0^+) = \begin{cases} 0 & \text{se } k = 0, 1, \dots, N-2 \\ 1 & \text{se } k = N-1 \end{cases} \quad (16)$$

onde $y_n^{(k)}(t)$ é a k -ésima derivada de $y_n(t)$ para $t = 0$.

Para Diferentes Ordens do Sistema

- **N = 1:** $y_n(0^+) = 1$
- **N = 2:** $y_n(0^+) = 0, \dot{y}_n(0^+) = 1$
- **N = 3:** $y_n(0^+) = 0, \dot{y}_n(0^+) = 0, \ddot{y}_n(0^+) = 1$

Observação

Se $M < N$, então $b_N = 0$ e o termo $b_N \delta(t)$ em $h(t)$ é zero.

Exemplo 2: Aplicação do Método Simplificado

Problema

Determine a resposta $h(t)$ ao impulso unitário para o sistema:

$$(p^2 + 3p + 2)y(t) = (p + 5)x(t) \quad \Rightarrow \quad Q(p) = p^2 + 3p + 2, \quad P(p) = p + 5 \quad (17)$$

Solução - Passo 1: Modos Característicos

Polinômio característico: $\lambda^2 + 3\lambda + 2 = (\lambda + 1)(\lambda + 2)$

Raízes: $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = -2$

Forma geral: $y_n(t) = c_1 e^{-t} + c_2 e^{-2t}$

Passo 2: Termo Impulsivo

Como $P(p) = p + 5$, temos $b_N = b_2 = 0$ (coeficiente de p^2 é zero)

Portanto: $h(t) = b_N \delta(t) + [P(p)y_n(t)]u(t) = (p + 5)y_n(t)$, $y_n(t) = c_1 e^{-t} + c_2 e^{-2t}$

Exemplo 2: Aplicação das Condições Iniciais

Condições Iniciais ($N = 2$)

- $y_n(0^+) = 0$
- $\dot{y}_n(0^+) = 1$

Sistema de Equações

Para $y_n(t) = c_1 e^{-t} + c_2 e^{-2t}$: $\dot{y}_n(t) = -c_1 e^{-t} - 2c_2 e^{-2t}$

$$t = 0^+ : \begin{cases} c_1 + c_2 = 0 \\ -c_1 - 2c_2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_2 = -1 \\ c_1 = 1 \end{cases} \Rightarrow y_n(t) = e^{-t} - e^{-2t}$$

Solução

$$h(t) = P(p)y_n(t) = (p + 5)y_n = \dot{y}_n + 5y_n = -e^{-t} + 2e^{-2t} + 5e^{-t} - 5e^{-2t} = 4e^{-t} - 3e^{-2t}$$

Resultado: $h(t) = 4e^{-t} - 3e^{-2t}$, $t \geq 0$, ou simplesmente $h(t) = (4e^{-t} - 3e^{-2t})u(t)$

Implementação em MATLAB/Octave

Exemplo: Verificação do Exemplo 2

```
1 % Definir coeficientes do sistema
2 % (p^2 + 3p + 2)y(t) = (p + 5)x(t)
3 a = [1, 3, 2]; % Coeficientes de Q(p)
4 b = [0, 1, 5]; % Coeficientes de P(p) (completar com zeros)
5 % Definir entrada impulso (aproximada)
6 t = 0:0.001:5;
7 delta_approx = zeros(size(t));
8 delta_approx(1) = 1000; % Impulso aproximado
9 % Calcular resposta
10 y = lsim(tf(b,a), delta_approx, t);
11 % Solução analítica para comparação
12 h_analytical = 4*exp(-t) - 3*exp(-2*t);
13 % Plotar resultados
14 figure;
15 plot(t, y, 'b-', 'LineWidth', 2);
16 hold on;
17 plot(t, h_analytical, 'r—', 'LineWidth', 2);
18 xlabel('Tempo (s)'); ylabel('Amplitude');
19 title('Resposta ao Impulso'); grid on;
20 legend('MATLAB', 'Analítica', 'Location', 'best');
```

Análise dos Resultados MATLAB

```
1 % Análise dos polos (modos característicos)
2 polos = roots(a); fprintf('Polos do sistema: '); disp(polos);
3 % Verificar estabilidade
4 if all(real(polos) < 0)
5     fprintf('Sistema estável\n');
6 else
7     fprintf('Sistema instável\n');
8 end
9 % Calcular constantes de tempo
10 tau = -1./real(polos);
11 fprintf('Constantes de tempo: '); disp(tau);
12 % Tempo de acomodação (5% do valor final)
13 t_settling = 3 * max(tau);
14 fprintf('Tempo de acomodação (5%%): %.2f s\n', t_settling);
15 % Plotar componentes individuais
16 y1 = 4*exp(-t); % Modo  $e^{-t}$ 
17 y2 = -3*exp(-2*t); % Modo  $-e^{-2t}$ 
18 figure; subplot(2,1,1);
19 plot(t, y1, 'g-', t, y2, 'm-', 'LineWidth', 2);
20 xlabel('Tempo (s)'); ylabel('Amplitude');
21 title('Componentes dos Modos Característicos');
22 legend('e^{-t}', '-e^{-2t}'); grid on; subplot(2,1,2);
23 plot(t, h_analytical, 'r-', 'LineWidth', 2);
24 xlabel('Tempo (s)'); ylabel('Amplitude');
25 title('Resposta ao Impulso Total'); grid on;
```

Resultados MATLAB

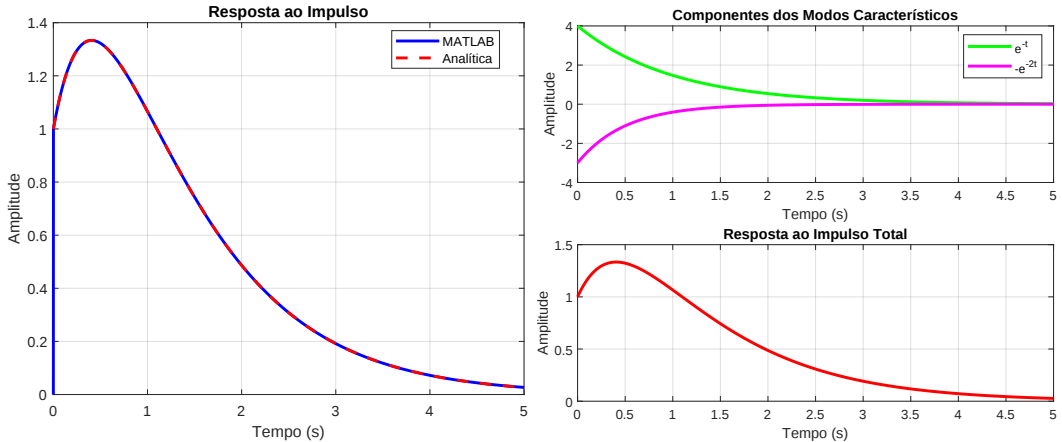


Figura: (Esquerda) Resposta ao impulso via cálculo de função de transferência (comando `tf(b,a)`) e resposta analítica $h(t) = (4e^{-t} - 3e^{-2t})u(t)$. (Direita) Componentes da resposta ao impulso.

Demonstração do Método Simplificado 3

Objetivo

Demonstrar rigorosamente por que o método simplificado funciona e obter a expressão geral para $h(t)$.

Observação: A demonstração completa deste procedimento está na Seção 2.8 (Apêndice 2.1) do livro do Lathi, 2000.

Sistema Auxiliar

Consideremos um sistema auxiliar S_0 com entrada $x(t)$ e saída $y(t)$ relacionados por:

$$Q(p)y(t) = x(t) \quad (18)$$

Observe que:

- S_0 tem o mesmo polinômio característico $Q(\lambda)$ que o sistema original S
- S_0 é equivalente ao sistema S com $P(p) = 1$ (i.e., $b_N = 0$)

Resposta ao Impulso de S_0

A resposta ao impulso de S_0 é constituída apenas dos modos característicos, sem impulso em $t = 0$. Denotamos esta resposta por $y_n(t)$.

Desenvolvimento da Demonstração

Equação para $y_n(t)$

Como $y_n(t)$ é a resposta de S_0 à entrada $\delta(t)$:

$$Q(p)y_n(t) = \delta(t) \quad (19)$$

Expandindo:

$$(p^N + a_{N-1}p^{N-1} + \dots + a_1p + a_0)y_n(t) = \delta(t) \quad (20)$$

$$p^N y_n(t) + a_{N-1}p^{N-1}y_n(t) + \dots + a_1\dot{y}_n(t) + a_0y_n(t) = \delta(t) \quad (21)$$

Análise dos Termos Impulsivos

O lado direito contém apenas $\delta(t)$.

Para que a igualdade seja satisfeita, $y_n^{(N-1)}(t)$ deve ter um salto de descontinuidade em $t = 0$ tal que:

$$p^N y_n(t) = y_n^{(N)}(t) \text{ contém } \delta(t) \quad (22)$$

Conclusão da Demonstração

Condições de Continuidade

Para $k < N - 1$, as derivadas $y_n^{(k)}(t)$ devem ser contínuas em $t = 0$ para evitar termos impulsivos indesejados no lado esquerdo.

Portanto: $y_n^{(k)}(0^+) = 0$ para $k = 0, 1, \dots, N - 2$, e

$$y_n^{(N-1)}(0^-) = 0, \quad y_n^{(N-1)}(0^+) = 1 \quad \Rightarrow \quad y_n^{(N)}(0) = \delta(t)$$

Conclusão da Demonstração

Sistema Original

Para o sistema original S com $P(p) \neq 1$:

$$Q(p)h(t) = P(p)\delta(t) \quad (23)$$

A resposta $h(t)$ pode ser decomposta como:

$$h(t) = b_0\delta(t) + [P(p)y_n(t)]u(t) \quad (24)$$

onde $y_n(t)$ satisfaz as mesmas condições iniciais derivadas.

Resultado Final

$$h(t) = b_0\delta(t) + [P(p)y_n(t)]u(t) \quad \text{com } y_n^{(k)}(0^+) = \begin{cases} 0 & k < N - 1 \\ 1 & k = N - 1 \end{cases} \quad (25)$$

Generalização para Todos os Valores de M e N

Discussão Prévia: Na apresentação anterior, assumimos $M \leq N$ conforme especificado na Eq. (3).

Expressão Geral

A expressão para $h(t)$ aplicável a **todos** os possíveis valores de M e N é:

$$h(t) = \sum_{k=0}^{M-N} b_k \delta^{(k)}(t) + [P(p)y_n(t)]u(t) \quad (26)$$

onde $y_n(t)$ é a combinação linear dos modos característicos sujeita às condições iniciais (16).

Caso Particular

Esta expressão se reduz à Eq. (24) quando $M \leq N$:

$$h(t) = b_0 \delta(t) + [P(p)y_n(t)]u(t) \quad (27)$$

Observação Prática: Sistemas físicos raramente têm $M > N$ devido a considerações de ruído e causalidade.

Transformada de Laplace

A determinação da resposta $h(t)$ ao impulso usando o procedimento desta seção é relativamente simples. Entretanto, a obtenção de $h(t)$ usando a **Transformada de Laplace** é um método ainda mais simples.

Vantagens da Transformada de Laplace

- Conversão de equações diferenciais em equações algébricas
- Manipulação mais direta de condições iniciais
- Técnicas de frações parciais
- Tabelas de transformadas

Comparação de Métodos

Método	Complexidade	Aplicabilidade
Resposta forçada (Método 1)	Alta	Sistemas simples
Casamento Clássico (Método 2)	Alta	Sistemas simples
Método Simplificado (Método 3)	Média	Qualquer ordem
Transformada de Laplace	Baixa	Qualquer sistema

Exercícios Propostos

Exercício 1

Determine a resposta ao impulso unitário dos sistemas LCIT descritos pelas seguintes equações:

- a) $(p + 2)y(t) = x(t)$
- b) $(p^2 + 3p + 2)y(t) = (2p + 5)x(t)$
- c) $(p^2 + 4p + 3)y(t) = (p^2 + 2p)x(t)$

Exercício 2

Para o sistema $(p^2 + 5p + 6)y(t) = (p + 1)x(t)$:

- a) Determine $h(t)$ usando o método simplificado
- b) Verifique o resultado usando MATLAB
- c) Analise a estabilidade do sistema
- d) Determine o tempo de acomodação

Exercício 3

Implemente em MATLAB uma função que calcule automaticamente a resposta ao impulso de qualquer sistema LCIT de ordem arbitrária usando o método simplificado apresentado.

Exemplo Prático: Circuito RC

Circuito RC de Primeira Ordem

Considere um circuito RC com:

$$RC \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = x(t) \quad (28)$$

ou $(p + \frac{1}{RC})y(t) = \frac{1}{RC}x(t)$

Aplicação do Método Simplificado

- Ordem $N = 1$
- $b_0 = 0$ (pois $P(p) = \frac{1}{RC}$)
- Condição inicial: $y_n(0^+) = 1$
- Modo característico: $e^{-t/(RC)}$

Portanto: $h(t) = \frac{1}{RC} e^{-t/(RC)} u(t)$

Exemplo Prático: Circuito RC

Implementação MATLAB

```
1 % Parâmetros do circuito RC
2 R = 1000; % 1k ohm
3 C = 1e-6; % 1uF
4 tau = R*C; % Constante de tempo
5
6 % Resposta ao impulso
7 t = 0:tau/100:5*tau;
8 h = (1/tau) * exp(-t/tau);
9
10 plot(t, h);
11 xlabel('Tempo (s)'); ylabel('h(t)');
12 title('Resposta ao Impulso - Circuito RC');
```

Listing 1: circuito RC