

ENE0067 – Sinais e Sistemas em Tempo Contínuo

Resposta do Sistema à Entrada Externa - Resposta de Estado Nulo

Prof. Eduardo Stockler Tognetti

Departamento de Engenharia Elétrica
Universidade de Brasília – UnB



Sumário da Aula

- 1 Introdução
- 2 Introdução
- 3 Propriedades Fundamentais
- 4 Desenvolvimento da Resposta de Estado Nulo
- 5 Propriedades da Convolução
- 6 Convolução para Sistemas Causais
- 7 Interpretação Gráfica da Convolução
- 8 Sistemas Interconectados
- 9 Propriedade de sistemas lineares
- 10 Resposta Total
- 11 Função de Transferência
- 12 Aplicações e Exercícios
- 13 Aplicações Práticas
- 14 Relação com Transformada de Laplace
- 15 Resumo e Conclusões
- 16 Resumo da Aula

Objetivos da Aula

- Compreender o conceito de resposta de estado nulo
- Desenvolver a integral de convolução
- Estudar as propriedades da convolução
- Aplicar métodos gráficos para resolver convolução
- Analisar sistemas interconectados
- Explorar a função de transferência de sistemas LCIT

Revisão: Resposta Total de um Sistema

Para um sistema linear, a resposta total pode ser decomposta em:

$$\text{Resposta Total} = \text{Resposta de Entrada Nula} + \text{Resposta de Estado Nulo} \quad (1)$$

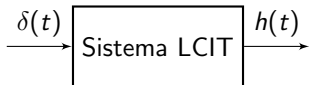
- **Resposta de Entrada Nula:** Resposta devido apenas às condições iniciais (entrada = 0)
- **Resposta de Estado Nulo:** Resposta devido apenas à entrada externa (condições iniciais = 0)

Esta aula foca na **resposta de estado nulo**, onde assumiremos que todas as condições iniciais são nulas.

Conceito da Resposta ao Impulso

Definição

A **resposta ao impulso unitário** $h(t)$ é a resposta do sistema quando a entrada é o impulso unitário $\delta(t)$ e todas as condições iniciais são nulas.



- Equação: $Q(p)h(t) = P(p)\delta(t)$
- Como $\delta(t) = 0$ para $t > 0$, temos $Q(p)h(t) = 0$ para $t > 0$
- Portanto, $h(t)$ é uma combinação dos modos característicos para $t > 0$

Importância Fundamental

A resposta ao impulso caracteriza completamente um sistema LCIT. Conhecendo $h(t)$, podemos determinar a resposta a qualquer entrada!

Representação de um sinal por impulsos

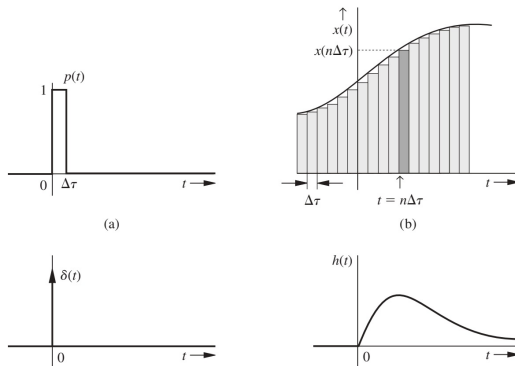


Figura: Representação de um sinal por soma de impulsos quando $\Delta t \rightarrow 0$.

→ Se conhecemos a resposta do sistema a um impulso unitário $\delta(t)$, podemos determinar imediatamente a resposta do sistema a uma entrada arbitrária $x(t)$ adicionando a resposta do sistema a cada componente de impulso de $x(t)$.

Propriedade de Invariância no Tempo

Teorema (Resposta ao Impulso Atrasado)

Se $h(t)$ é a resposta de um sistema LCIT à entrada $\delta(t)$, então $h(t - T)$ é a resposta do mesmo sistema à entrada $\delta(t - T)$.

- Esta propriedade decorre diretamente da invariância temporal
- Simbolicamente: $\delta(t - T) \xrightarrow{\text{Sistema}} h(t - T)$
- Permite determinar a resposta a impulsos atrasados
- Base fundamental para a integral de convolução



Figura: Impulso atrasado e sua resposta correspondente. Fonte: Lathi, 2000.

Relação entre Modos Característicos e Resposta ao Impulso

Conexão Fundamental

A resposta ao impulso é uma combinação linear dos modos característicos do sistema, pois para $t > 0$, o impulso $\delta(t) = 0$ e a equação se torna homogênea.

- Para $t > 0$: $Q(p)h(t) = 0$ (equação homogênea)
- Portanto: $h(t)$ = combinação dos modos característicos
- As condições iniciais são determinadas pela entrada impulsiva
- Os modos característicos aparecem em todas as respostas do sistema!

Universalidade dos Modos

Os modos característicos são universais - aparecem tanto na resposta de entrada nula quanto na resposta ao impulso, sendo fundamentais para todo o comportamento do sistema.

Interpretação Física dos Conceitos

Resposta de Entrada Nula

- Como um sistema “esquece” suas condições iniciais
- Movimento natural sem influência externa
- Exemplo: oscilação livre de um pêndulo

Resposta ao Impulso

- Como um sistema reage a uma “pancada” instantânea
- Revela a “personalidade” dinâmica do sistema
- Exemplo: som de um sino após ser tocado

Modos Característicos

- As “frequências preferidas” do sistema
- Movimentos que o sistema pode sustentar naturalmente
- Determinam estabilidade e comportamento temporal

Aproximação por Pulsos Retangulares

Para determinar a resposta de um sistema LCIT a uma entrada arbitrária $x(t)$, utilizamos o princípio da superposição.

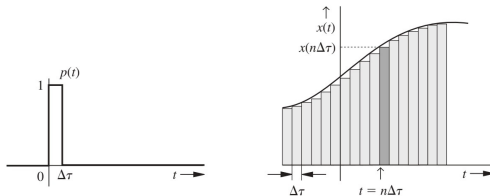


Figura: Decomposição de $x(t)$ em pulsos retangulares.

A entrada $x(t)$ pode ser expressa como:

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n\Delta\tau) p(t - n\Delta\tau) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n\Delta\tau) \underbrace{\frac{p(t - n\Delta\tau)}{\Delta\tau}}_{\delta_{\Delta\tau}} \Delta\tau \quad (2)$$

onde $p(t)$ é um pulso unitário de largura $\Delta\tau$, e $\delta = \lim_{\delta_{\Delta\tau} \rightarrow 0} \delta_{\Delta\tau}$.

Resposta a entrada em termos da resposta ao impulso

Quando $\Delta\tau \rightarrow 0$, os pulsos retangulares se tornam impulsos:

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\delta(t - \tau)d\tau \quad (3)$$

Para determinar a resposta do sistema, consideramos:

- Entrada: $\delta(t) \rightarrow$ Saída: $h(t)$ (resposta ao impulso com condições iniciais nulas)
- Entrada: $\delta(t - \tau) \rightarrow$ Saída: $h(t - \tau)$ (invariância no tempo)
- Entrada: $x(\tau)\delta(t - \tau) \rightarrow$ Saída: $x(\tau)h(t - \tau)$ (linearidade)

Aplicando superposição:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t - \tau)d\tau \quad (4)$$

Resposta a entrada em termos da resposta ao impulso

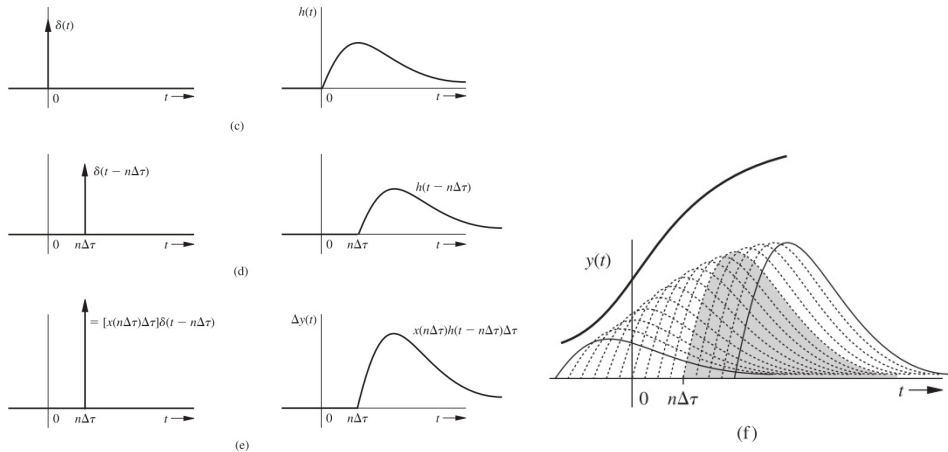


Figura: Resposta a entrada arbitrária $x(t)$ em termos da resposta ao impulso. Fonte: Lathi, 2000.

A Integral de Convolução

A resposta de estado nulo é dada pela **integral de convolução**:

$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t - \tau)d\tau \quad (5)$$

- $x(t)$: sinal de entrada
- $h(t)$: resposta ao impulso do sistema
- $y(t)$: resposta de estado nulo do sistema
- $*$: operador de convolução

Interpretação Física: A resposta do sistema é obtida pela superposição de todas as respostas impulsivas deslocadas e ponderadas.

Propriedade Comutativa

A operação de convolução é **comutativa**:

$$x_1(t) * x_2(t) = x_2(t) * x_1(t) \quad (6)$$

Prova: Fazendo a substituição $z = t - \tau$ na integral de convolução:

$$x_1(t) * x_2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x_1(\tau) x_2(t - \tau) d\tau \quad (7)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x_1(t - z) x_2(z) dz \quad (8)$$

$$= x_2(t) * x_1(t) \quad (9)$$

Implicação Prática: Podemos calcular $x(t) * h(t)$ ou $h(t) * x(t)$, escolhendo a forma mais conveniente.

Propriedade Distributiva:

$$x_1(t) * [x_2(t) + x_3(t)] = x_1(t) * x_2(t) + x_1(t) * x_3(t) \quad (10)$$

Propriedade Associativa:

$$[x_1(t) * x_2(t)] * x_3(t) = x_1(t) * [x_2(t) * x_3(t)] \quad (11)$$

Propriedade de Deslocamento: Se $c(t) = x_1(t) * x_2(t)$, então:

$$x_1(t - T) * x_2(t) = c(t - T) \quad (12)$$

$$x_1(t) * x_2(t - T) = c(t - T) \quad (13)$$

$$x_1(t - T_1) * x_2(t - T_2) = c(t - T_1 - T_2) \quad (14)$$

Convolução

Defina o operador $\mathcal{I}_x(t)$ como

$$\mathcal{I}_x(t) := \int_{-\infty}^t x(\beta) d\beta$$

Integral da Convolução

$$\int_{-\infty}^t x(\beta) * y(\beta) d\beta = \mathcal{I}_{x*y}(t) = x(t) * \mathcal{I}_y(t) = \mathcal{I}_x(t) * y(t) = u(t) * x(t) * y(t), \quad (15)$$

pois $\mathcal{I}_x(t) = x(t) * u(t)$ e a convolução é associativa/comutativa.

Derivada da Convolução

$$\frac{d}{dt}(x(t) * y(t)) = \frac{dx(t)}{dt} * y(t) = x(t) * \frac{dy(t)}{dt} \quad (16)$$

Convolução com Impulso

A convolução de qualquer função com o impulso unitário resulta na própria função:

$$x(t) * \delta(t) = x(t) \quad (17)$$

Prova:

$$x(t) * \delta(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \delta(t - \tau) d\tau = x(t)$$
$$\left(\text{propriedade de amostragem: } \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \delta(\tau) d\tau = x(0) \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\tau) d\tau = x(0) \right)$$

Convolução com Impulso Deslocado:

$$x(t) * \delta(t - T) = x(t - T) \quad (18)$$

Exemplo: sistema integrador

$$y(t) = \int_{-\infty}^t x(\beta) d\beta \quad \Rightarrow \quad \dot{y}(t) = x(t)$$

Resposta ao impulso do sistema integrador:

$$h(t) = \int_{-\infty}^t \delta(\beta) d\beta = u(t)$$

Convoluir com degrau é integrar:

$$x(t) * u(t) = \int_{-\infty}^t x(\beta) d\beta =: \mathcal{I}_x(t)$$

$$x(t) * u(t - a) = \mathcal{I}_x(t - a)$$

Propriedade da Largura

Se $x_1(t)$ tem duração T_1 e $x_2(t)$ tem duração T_2 , então:

$$\text{Duração de } x_1(t) * x_2(t) = T_1 + T_2 \quad (19)$$

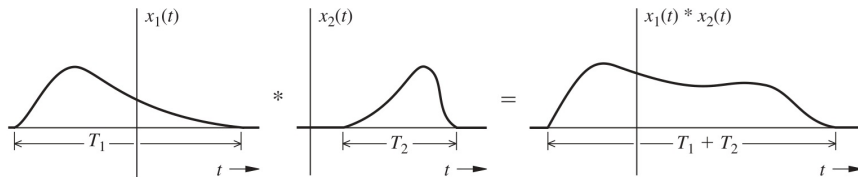


Figura: Propriedade da largura da convolução. Fonte: Lathi, 2000.

Esta propriedade é importante para análise de dispersão de pulsos em sistemas de comunicação.

Sistemas e Sinais Causais

Para sistemas práticos, geralmente temos:

- **Entrada causal:** $x(t) = 0$ para $t < 0$
- **Sistema causal:** $h(t) = 0$ para $t < 0$

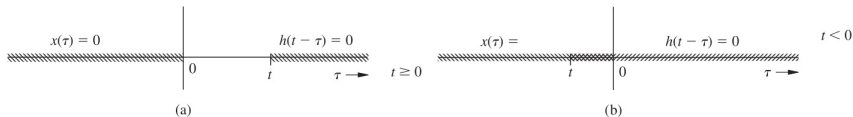


Figura: Limites de integração para sistemas causais. Fonte: Lathi, 2000.

A integral de convolução se reduz a:

$$\begin{aligned} y(t) &= \int_0^t x(\tau)h(t-\tau)d\tau = \int_0^t h(\tau)x(t-\tau)d\tau, & t \geq 0 \\ &= 0, & t < 0 \end{aligned}$$

Exemplo 1: Convolução de Exponenciais

Problema: Determine a resposta de um sistema com $h(t) = e^{-2t}u(t)$ para a entrada $x(t) = e^{-t}u(t)$.

Solução: Como o sistema é linear e invariante no tempo $y(t) = x(t) * h(t)$. Como ambos os sinais são causais, usamos:

$$\begin{aligned}y(t) &= \int_0^t e^{-\tau} e^{-2(t-\tau)} d\tau \\&= e^{-2t} \int_0^t e^{-\tau} e^{2\tau} d\tau \\&= e^{-2t} \int_0^t e^{\tau} d\tau \\&= e^{-2t} [e^{\tau}]_0^t \\&= e^{-2t} (e^t - 1) \\&= (e^{-t} - e^{-2t})u(t)\end{aligned}$$

Tabela de Convolução

Para simplificar cálculos, utilizamos tabelas de convoluções conhecidas:

Par	$x_1(t)$	$x_1(t) * x_2(t)$
1	$\delta(t)$	$x_2(t)$
2	$u(t)$	$\int_{-\infty}^t x_2(\tau) d\tau$
3	$e^{-at}u(t)$	$\frac{1}{a}[1 - e^{-at}]u(t)$ (com $x_2(t) = u(t)$)
4	$e^{-\lambda_1 t}u(t)$	$\frac{e^{-\lambda_1 t} - e^{-\lambda_2 t}}{\lambda_2 - \lambda_1}u(t)$ (com $x_2(t) = e^{-\lambda_2 t}u(t)$, $\lambda_1 \neq \lambda_2$)

Figura: Alguns pares úteis de convolução. Fonte: Lathi, 2000.

Obs.: o exemplo anterior poderia ter sido resolvido com o uso da tabela (par 4).

Tabela de Convolução (Tabela 2.1, Lathi, 2000)

No.	$x_1(t)$	$x_2(t)$	$x_1(t) * x_2(t) = x_2(t) * x_1(t)$
1	$x(t)$	$\delta(t - T)$	$x(t - T)$
2	$e^{\lambda t} u(t)$	$u(t)$	$\frac{1 - e^{\lambda t}}{-\lambda} u(t)$
3	$u(t)$	$u(t)$	$tu(t)$
4	$e^{\lambda_1 t} u(t)$	$e^{\lambda_2 t} u(t)$	$\frac{e^{\lambda_1 t} - e^{\lambda_2 t}}{\lambda_1 - \lambda_2} u(t) \quad \lambda_1 \neq \lambda_2$
5	$e^{\lambda t} u(t)$	$e^{\lambda t} u(t)$	$te^{\lambda t} u(t)$
6	$te^{\lambda t} u(t)$	$e^{\lambda t} u(t)$	$\frac{1}{2} t^2 e^{\lambda t} u(t)$
12	$e^{-\alpha t} \cos(\beta t + \theta) u(t)$	$e^{\lambda t} u(t)$	$\frac{\cos(\theta - \phi) e^{\lambda t} - e^{-\alpha t} \cos(\beta t + \theta - \phi)}{\sqrt{(\alpha + \lambda)^2 + \beta^2}} u(t)$

A integral de convolução

- **Resposta a entradas complexas:**

Se o sistema for **real**, $h(t)$ será **real**.

Seja $h(t)$ real e a **entrada complexa** $x(t) = x_r(t) + jx_i(t)$

$$y(t) = h(t) * [x_r(t) + jx_i(t)] = h(t) * x_r(t) + jh(t) * x_i(t) = y_r(t) + jy_i(t)$$

$$x_r(t) \implies y_r(t)$$

$$x_i(t) \implies y_i(t)$$

Lembrar que em sistemas LCIT, vale o **princípio da superposição**

$$\text{se } x_1(t) \implies y_1(t), x_2(t) \implies y_2(t), \dots, x_n(t) \implies y_n(t)$$

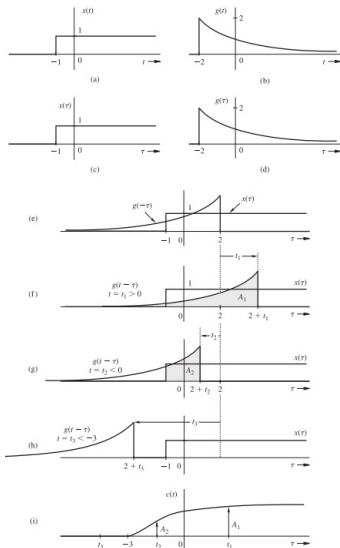
$$x(t) = x_1(t) + x_2(t) + \dots + x_n(t) \implies y(t) = y_1(t) + y_2(t) + \dots + y_n(t)$$

Procedimento Gráfico - Passos

Para calcular $c(t) = x(t) * g(t)$ graficamente:

- 1 Mantenha $x(\tau)$ fixo
- 2 Inverta $g(\tau)$ em relação ao eixo vertical para obter $g(-\tau)$
- 3 Desloque $g(-\tau)$ por t_0 unidades para obter $g(t_0 - \tau)$
- 4 Multiplique $x(\tau)$ por $g(t_0 - \tau)$
- 5 A área sob o produto é $c(t_0)$
- 6 Repita para diferentes valores de t_0

→ Ver animações em Wikipedia (convolução).



Exemplo 2: Convolução Gráfica

Problema: Calcular graficamente $y(t) = x(t) * h(t)$ onde:

- $x(t) = u(t) - u(t - 2)$ (pulso retangular de 0 a 2)
- $h(t) = e^{-t}u(t)$ (exponencial causal)

Análise por intervalos:

- $t < 0$: Não há sobreposição $\Rightarrow y(t) = 0$
- $0 \leq t \leq 2$: Sobreposição parcial
- $t > 2$: Sobreposição total da exponencial com parte do pulso

Resultado:

$$y(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 - e^{-t} & 0 \leq t \leq 2 \\ (e^2 - 1)e^{-t} & t > 2 \end{cases} \quad (20)$$

Exemplo em MATLAB: Convolução Numérica

Listing 1: Cálculo de convolução usando MATLAB

```
% Definição dos vetores de tempo
t1 = -2:0.01:5;
t2 = -2:0.01:5;

% Definição dos sinais
x = (t1 >= 0) & (t1 <= 2); % Pulso retangular
h = exp(-t2) .* (t2 >= 0); % Exponencial causal

% Cálculo da convolução
dt = 0.01;
y = conv(x, h) * dt;
t_conv = (0:length(y)-1) * dt + t1(1) + t2(1);

% Plotagem dos resultados
figure;
subplot(3,1,1); plot(t1, x); title('Entrada x(t)');
subplot(3,1,2); plot(t2, h); title('Resposta ao impulso h(t)');
subplot(3,1,3); plot(t_conv, y); title('Saída y(t) = x(t)*h(t)');
xlabel('Tempo (s)');
```

Conexões Básicas de Sistemas

Sistemas LCIT podem ser conectados de diferentes formas:

1. Conexão em Paralelo:

$$h_p(t) = h_1(t) + h_2(t) \quad (21)$$

2. Conexão em Cascata (Série):

$$h_c(t) = h_1(t) * h_2(t) \quad (22)$$

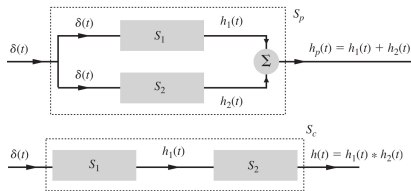


Figura: Sistemas interconectados: paralelo e cascata.

Propriedade Importante: A ordem dos sistemas em cascata não afeta o resultado (propriedade comutativa).

Se S_1 e S_2 são sistemas inversos com respostas ao impulso $h(t)$ e $h_i(t)$:

$$h(t) * h_i(t) = \delta(t) \quad (23)$$

Aplicação: Cancelamento de distorções

- Sistema S_1 introduz distorção
- Sistema inverso S_2 cancela a distorção
- Resultado: sistema identidade

Propriedade de sistemas lineares

Sistema Linear, Contínuo e Invariante no Tempo (LCIT)

$$Q(p)y(t) = P(p)x(t), \text{ condições iniciais nulas} \Rightarrow \text{Notação: } y(t) = \mathcal{G}\{x(t)\}$$

Linearidade (superposição)

$$\mathcal{G}\{a_1x_1(t) + a_2x_2(t)\} = a_1\mathcal{G}\{x_1(t)\} + a_2\mathcal{G}\{x_2(t)\}, \quad \mathcal{G}\{0\} = 0.$$

Invariância no tempo

$$y(t - a) = \mathcal{G}\{x(t - a)\}$$

Resposta ao impulso

$$h(t) = \mathcal{G}\{\delta(t)\} \Rightarrow y(t) = \mathcal{G}\{x(t)\} = h(t) * x(t)$$

Propriedade de sistemas lineares

Integração da entrada

$$y(t) = \mathcal{G}\{x(t)\} \Rightarrow \int_{-\infty}^t y(\beta) d\beta = \mathcal{G}\left\{\int_{-\infty}^t x(\beta) d\beta\right\}$$

$$\text{De (15), } \int_{-\infty}^t y(\beta) d\beta = \int_{-\infty}^t h(\beta) * x(\beta) d\beta = h(t) * \int_{-\infty}^t x(\beta) d\beta$$

Derivação da entrada

$$y(t) = \mathcal{G}\{x(t)\} \Rightarrow \frac{dy(t)}{dt} = \mathcal{G}\left\{\frac{dx(t)}{dt}\right\}$$

$$\text{De (16), } \frac{dy(t)}{dt} = \frac{d}{dt}(h(t) * x(t)) = h(t) * \frac{dx(t)}{dt}$$

Exemplo

$$\text{Seja } g(t) = \mathcal{G}\{u(t)\}, \text{ então } h(t) = \frac{dg(t)}{dt}, \text{ pois } \frac{dg(t)}{dt} = \mathcal{G}\left\{\frac{du(t)}{dt}\right\} = \mathcal{G}\{\delta(t)\}.$$

Composição da Resposta Total

A resposta total de um sistema linear é:

$$y_{\text{total}}(t) = y_{\text{entrada nula}}(t) + y_{\text{estado nulo}}(t)$$

$$y(t) = y_0(t) + y_x(t)$$

Componentes:

- **Resposta de entrada nula ($y_0(t)$):**

- Devido às condições iniciais
- Constituída pelos modos próprios ou característicos: $y_0(t) = \sum_{k=1}^N c_k e^{\lambda_k t}$ (se raízes distintas)
- Determinada pela solução da equação homogênea e **condições iniciais em $t = 0^-$** (antes da entrada ser aplicada, $x = 0$)

- **Resposta de estado nulo ($y_x(t)$):**

- Devido à entrada externa
- Permite entradas $x(t)$ arbitrárias
- Calculada pela convolução: $y_x(t) = x(t) * h(t)$
- Independente das condições iniciais

• **Independência:** As duas componentes são independentes e podem ser calculadas separadamente. Esse método fornece intuição e utilidade ao separar as respostas em dois termos independentes.

Comparando com Resposta Total via Método Clássico

A resposta total de um sistema linear também pode ser caracterizada por:

$$y_{\text{total}}(t) = y_{\text{natural}}(t) + y_{\text{forçada}}(t)$$

$$y(t) = y_n(t) + y_f(t)$$

Componentes:

- **Resposta natural ou homogênea ($y_n(t)$):**

- Constituída pelos modos próprios ou característicos: $y_n(t) = \sum_{k=1}^N a_k e^{\lambda_k t}$ (se raízes distintas)
- Determinada pela solução da equação homogênea e condições iniciais em $t = 0^+$ (considerando o efeito da entrada $x(0)$ na condição inicial em $t = 0^-$)

- **Resposta forçada ($y_f(t)$):**

- Constituída pelos modos forçados: $y_f(t) = \sum_{k=1}^{\tilde{N}} b_k e^{\gamma_k t}$ (se raízes distintas de λ_k)
- Calculada por $Q(p)y_f(t) = N(p)x(t)$
- Se $x(t) = \sum_{k=1}^{\tilde{N}} M_k e^{s_k t} \Rightarrow y_f(t) = \sum_{k=1}^{\tilde{N}} M_k H(s_k) e^{s_k t}$, se $H(s_k)$ for finito (região de convergência)
- Não permite entradas $x(t)$ completamente arbitrárias
- Devido à entrada externa e independente das condições iniciais

• **Dependência:** As duas são calculadas sequencialmente. Primeiro, os coeficientes da resposta forçada são obtidos da equação $Q(p)y_f(t) = N(p)x(t)$ e, em seguida, os coeficientes da resposta natural são obtidos a partir das condições iniciais em $t = 0^+$ aplicadas na solução $y(t) = y_n(t) + y_f(t)$.

Comparação dos Métodos de Solução

- O método clássico é mais simples que o método baseado em entrada nula e estado nulo.
- Limitação do método clássico: fornece apenas a resposta total, sem separar efeitos da entrada externa e das condições iniciais.
- Importância: no estudo de sistemas é necessário expressar a resposta como função explícita da entrada $x(t)$, o que não é possível no método clássico.
- Método clássico restrito a certas classes de entradas; não é aplicável a qualquer entrada.
- Exige condições em $t = 0^+$, enquanto na prática conhecemos as condições em $t = 0^-$.
- Método clássico é útil em casos particulares (equações diferenciais ou sistemas específicos).
- No estudo teórico, o método de entrada nula e estado nulo é mais valioso.
- Em geral, resposta de entrada nula $\neq$ resposta natural, e resposta de estado nulo $\neq$ resposta forçada.

Comparação dos Métodos de Solução

Seja o exemplo: $(p^2 + 3p + 2)y(t) = px(t)$, $y(0^-) = 0$, $\dot{y}(0^-) = -5$, e $x(t) = 10e^{-3t}u(t)$

● Método baseado em entrada nula e estado nulo

- 1 Solução particular da EDO homogênea $Q(p)y_0 = 0$ com condições iniciais $y(0^-) = 0$, $\dot{y}(0^-) = -5$
- 2 Cálculo da resposta ao impulso $h(t)$
- 3 Cálculo da resposta estado nulo $y_x(t) = h(t) * x(t)$
- 4 Solução: $y(t) = y_0(t) + y_x(t)$

● Método clássico: respostas homogênea e forçada

- 1 Solução geral da EDO homogênea $Q(p)y_n(t) = 0$ (modos próprios)
- 2 Cálculo da resposta forçada $y_f(t)$ (verificar se há repetição entre os modos forçados e próprios)
- 3 Cálculo das condições iniciais em $t = 0^+$ devido à entrada: $y(0^+), \dot{y}(0^+), \dots$
- 4 Cálculo dos coeficientes de $y_n(t)$ por meio da aplicação das condições iniciais em $t = 0^+$ em $y(t) = y_n(t) + y_f(t)$: $y(0^+) = y_n(0^+) + y_f(0^+)$, $\dot{y}(0^+) = \dot{y}_n(0^+) + \dot{y}_f(0^+), \dots$

Resposta Total

$$\begin{aligned}y_{\text{total}}(t) &= y_{\text{entrada nula}}(t) + y_{\text{estado nulo}}(t) = \sum_{k=1}^N c_k e^{\lambda_k t} + x(t) * h(t) \\&= y_{\text{natural}}(t) + y_{\text{forçada}}(t) = \sum_{k=1}^N a_k e^{\lambda_k t} + \sum_{k=1}^{\bar{N}} b_k e^{\gamma_k t}\end{aligned}$$

- Exemplo: $(p^2 + 3p + 2)y(t) = px(t)$, $y(0) = 0$, $\dot{y}(0^-) = -5$, $\dot{y}(0^+) = 5$ com $x(t) = 10e^{-3t}u(t)$

$$y(t) = \underbrace{(-5e^{-t} + 5e^{-2t})}_{\text{resposta de entrada nula } y_0(t)} + \underbrace{(-5e^{-t} + 20e^{-2t} - 15e^{-3t})}_{\text{resposta de estado nulo } y_x(t)} \quad t \geq 0$$

$\Rightarrow$

$$y(t) = \underbrace{(-10e^{-t} + 25e^{-2t})}_{\text{resposta natural } y_n(t)} + \underbrace{(-15e^{-3t})}_{\text{resposta forçada } y_f(t)} \quad t \geq 0$$

- Note que $y(t) = y_n(t) + y_f(t) = y_0(t) + y_x(t)$ mas $y_n(t) \neq y_0(t)$ ($a_k \neq c_k$), $y_f(t) \neq y_x(t)$.

Exemplo 4: Resposta Total

Sistema: $\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 3\frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = x(t)$

Condições iniciais: $y(0^-) = 1, \dot{y}(0^-) = 0$

Entrada: $x(t) = e^{-t}u(t)$

1. Resposta de entrada nula: Equação característica: $\lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0 \Rightarrow \lambda = -1, -2$

$$y_0(t) = c_1 e^{-t} + c_2 e^{-2t} \quad (24)$$

Aplicando condições iniciais: $c_1 = -1, c_2 = 2$

$$y_0(t) = -e^{-t} + 2e^{-2t} \quad (25)$$

2. Resposta de estado nulo:

$$y_x(t) = h(t) * x(t) = e^{-2t}u(t) * e^{-t}u(t) = te^{-t}u(t) \quad (26)$$

Exemplo 4: Resposta Total (continuação)

3. Resposta total:

$$y(t) = y_0(t) + y_x(t) \quad (27)$$

$$= -e^{-t} + 2e^{-2t} + te^{-t}u(t) \quad (28)$$

$$= (-1 + t)e^{-t}u(t) + 2e^{-2t}u(t) \quad (29)$$

Comportamento assintótico: Para $t \rightarrow \infty$: $y(t) \rightarrow 0$ (sistema estável)

Resposta a entrada exponencial de **duração infinita**

Para sistemas LCIT, a exponencial e^{st} (onde s é complexo) é uma função especial chamada de função característica (ou autofunção) do sistema.

● Se a entrada é $x(t) = e^{st}$ para $-\infty < t < \infty$ (**duração infinita**) e as condições iniciais são nulas, então:

$$y(t) = h(t) * e^{st} = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{s(t-\tau)} d\tau = \left(\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{-s\tau} d\tau \right) e^{st} = H(s) e^{st}$$

Logo,

$$\boxed{x(t) = e^{st} \Rightarrow y(t) = H(s) e^{st}} \quad (30)$$

em que

$$\boxed{H(s) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{-s\tau} d\tau} \quad (31)$$

$H(s)$ é chamada de **função de transferência** do sistema.

Resposta a sinais senoidais e cossenoidais

● Conhecida a **função de transferência** $H(s)$ é possível calcular a resposta de sistemas lineares invariantes no tempo a sinais senoidais e cossenoidais **de duração infinita**.

● Seja $x(t) = Ae^{j(\omega t + \theta)} = Ae^{j\theta} e^{j\omega t}$ ($s = j\omega$), a saída é dada por

$$y(t) = Ae^{j\theta} H(j\omega) e^{j\omega t} = AH(j\omega) e^{j(\omega t + \theta)} = A|H(j\omega)| e^{j(\omega t + \theta + \angle H(j\omega))} \quad (32)$$

● Portanto para $x(t) = A \cos(\omega t + \theta) = \text{Re} \{ Ae^{j\theta} e^{j\omega t} \}$, a saída é dada por

$$y(t) = \text{Re} \{ AH(j\omega) e^{j(\omega t + \theta)} \} = A|H(j\omega)| \cos(\omega t + \theta + \angle H(j\omega)) \quad (33)$$

● Devido à linearidade

$$x(t) = \sum_{i=1}^N A_i e^{j\omega_i t} \Rightarrow y(t) = \sum_{i=1}^N A_i H(j\omega_i) e^{j\omega_i t}$$

● Observações:

- O sinal de saída tem a mesma frequência do sinal de entrada.
- De forma análoga: $x(t) = A \sin(\omega t) \Rightarrow y(t) = A|H(j\omega)| \sin(\omega t + \angle H(j\omega))$

Resposta a sinais senoidais e cossenoidais

Exemplo

Determine a resposta de um sistema linear contínuo invariante no tempo com função de transferência

$$H(s) = \frac{1}{s+2} \text{ a entrada } x(t) = 10 \cos(4t), t \in \mathbb{R}.$$

- Primeiramente considere $x(t) = 10e^{j4t}$ ($s = j4$), então $y(t) = 10H(j4)e^{j4t}$, em que

$$H(j4) = \frac{1}{2+j4} = \frac{1}{2+j4} \times \frac{2-j4}{2-j4} = 0.1 - j0.2 = 0.22e^{-j63.4^\circ} \text{ ou } 0.22 \angle -63.4^\circ$$

$$\text{Então, } y(t) = 10 \cdot 0.22e^{-j63.4^\circ} e^{j4t} = 2.2e^{j(4t-63.4^\circ)}$$

- Logo, para $x(t) = 10 \cos(4t)$, a saída é $y(t) = 2.2 \cos(4t - 63.4^\circ)$
- De forma análoga, para $x(t) = 10 \sin(4t)$, a saída é $y(t) = 2.2 \sin(4t - 63.4^\circ)$
- Obs.: **Entrada constante ($s = 0$) de duração infinita:** $x(t) = C, \forall t \in \mathbb{R} \Rightarrow y(t) = CH(0)$

Propriedades da Função de Transferência

Definição Alternativa:

$$H(s) = \frac{\text{Resposta para entrada } e^{st}}{\text{Entrada } e^{st}} \quad t \in \mathbb{R} \quad (34)$$

Características:

- Existe apenas para sistemas LCIT
- É uma função da variável complexa s
- **Não se aplica** a $e^{st}u(t)$, que “inicia” em $t = 0$
- A exponencial é uma **autofunção** do sistema
- A resposta tem a mesma forma da entrada (multiplicada por uma constante complexa)

Para uma equação diferencial:

$$Q(p)y(t) = P(p)x(t) \Rightarrow Q(p)H(s)e^{st} = P(p)e^{st} \Rightarrow H(s)Q(s)e^{st} = P(s)e^{st} \Rightarrow H(s)Q(s) = P(s)$$

A **função de transferência** é:

$$\boxed{H(s) = \frac{P(s)}{Q(s)}} \quad (35)$$

Exemplo 3: Função de Transferência

Problema: Determine $H(s)$ para o sistema descrito por:

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 3\frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = \frac{dx(t)}{dt} + x(t) \quad (36)$$

Solução: Utilizando a notação do operador p :

$$(p^2 + 3p + 2)y(t) = (p + 1)x(t) \quad (37)$$

Portanto:

$$H(s) = \frac{s + 1}{s^2 + 3s + 2} = \frac{s + 1}{(s + 1)(s + 2)} = \frac{1}{s + 2} \quad (38)$$

Resposta ao impulso:

$$h(t) = e^{-2t}u(t) \quad (39)$$

Exercício 1

Problema: Um sistema LCIT tem resposta ao impulso $h(t) = 2e^{-t}u(t)$. Determine a resposta de estado nulo para as seguintes entradas:

- 1 $x_1(t) = \delta(t)$
- 2 $x_2(t) = u(t)$
- 3 $x_3(t) = e^{-2t}u(t)$
- 4 $x_4(t) = \delta(t - 1)$

Dicas:

- Use as propriedades da convolução
- Consulte a tabela de convolução
- Para item (d), use a propriedade de deslocamento

Solução do Exercício 1

Soluções:

$$\textcircled{1} \quad y_1(t) = h(t) * \delta(t) = h(t) = 2e^{-t}u(t)$$

$$\textcircled{2} \quad y_2(t) = 2e^{-t}u(t) * u(t) = 2 \int_0^t e^{-\tau} d\tau = 2(1 - e^{-t})u(t)$$

$$\textcircled{3} \quad y_3(t) = 2e^{-t}u(t) * e^{-2t}u(t) = \frac{2}{-2-(-1)}(e^{-t} - e^{-2t})u(t) = 2(e^{-2t} - e^{-t})u(t)$$

$$\textcircled{4} \quad y_4(t) = h(t-1) = 2e^{-(t-1)}u(t-1) = 2e^{1-t}u(t-1)$$

Exercício 2

Problema: Dois sistemas estão conectados em cascata:

- Sistema 1: $h_1(t) = e^{-t}u(t)$
- Sistema 2: $h_2(t) = e^{-2t}u(t)$
- ① Determine a resposta ao impulso do sistema combinado
- ② Se a entrada for $x(t) = u(t)$, qual é a saída?
- ③ Compare com a conexão em paralelo dos mesmos sistemas

Solução - Cascata:

$$h_c(t) = h_1(t) * h_2(t) = e^{-t}u(t) * e^{-2t}u(t) \quad (40)$$

$$= (e^{-t} - e^{-2t})u(t) \quad (41)$$

Para entrada $x(t) = u(t)$:

$$y_c(t) = h_c(t) * u(t) = (1 - e^{-t} - e^{-2t} + \frac{1}{2}e^{-2t})u(t) \quad (42)$$

Solução do Exercício 2 (continuação)

Solução - Paralelo:

$$h_p(t) = h_1(t) + h_2(t) = e^{-t}u(t) + e^{-2t}u(t) \quad (43)$$

$$= (e^{-t} + e^{-2t})u(t) \quad (44)$$

Para entrada $x(t) = u(t)$:

$$y_p(t) = h_p(t) * u(t) \quad (45)$$

$$= (1 - e^{-t})u(t) + \frac{1}{2}(1 - e^{-2t})u(t) \quad (46)$$

$$= (1.5 - e^{-t} - 0.5e^{-2t})u(t) \quad (47)$$

Comparação:

- Cascata: Resposta mais lenta, menor amplitude final
- Paralelo: Resposta mais rápida, maior amplitude final

Exercício 3: Projeto com MATLAB

Problema: Simule e compare as respostas dos sistemas do Exercício 2.

Listing 2: Simulação de sistemas interconectados

```
t = 0:0.01:5; % Definição do tempo
% Respostas ao impulso individuais
h1 = exp(-t);
h2 = exp(-2*t);
% Sistema em cascata (convolução)
dt = 0.01;
h_cascata = conv(h1, h2) * dt;
t_conv = (0:length(h_cascata)-1) * dt;
% Sistema em paralelo (soma)
h_paralelo = h1 + h2;
% Resposta ao degrau
% Para cascata
u = ones(size(t));
y_casc_degrau = conv(h_cascata(1:length(t)), u) * dt;
% Para paralelo
y_par_degrau = conv(h_paralelo, u) * dt;
% Plotagem comparativa
figure; subplot(2,2,1); plot(t, h1, t, h2); title('Respostas individuais');
legend('h1(t)', 'h2(t)'); subplot(2,2,2); plot(t_conv(1:length(t)), h_cascata(1:length(t)));
title('Cascata'); subplot(2,2,3); plot(t, h_paralelo); title('Paralelo'); subplot(2,2,4);
plot(t, y_casc_degrau(1:length(t)), t, y_par_degrau(1:length(t)));
title('Resposta ao degrau'); legend('Cascata', 'Paralelo');
```

Aplicação 1: Filtragem de Sinais

Problema: Um sinal contém ruído de alta frequência. Use um filtro passa-baixas.

Filtro RC: $h(t) = \frac{1}{RC} e^{-t/RC} u(t)$

Entrada ruidosa: $x(t) = \sin(2\pi f_0 t) + 0.2 \sin(20\pi f_0 t)$

Listing 3: Filtragem de sinal ruidoso

```
% Parâmetros
f0 = 1; % Frequência fundamental (Hz)
RC = 0.1; % Constante de tempo do filtro
fs = 100; % Frequência de amostragem
t = 0:1/fs:2;

% Sinal de entrada (senoide + ruído)
x = sin(2*pi*f0*t) + 0.2*sin(20*pi*f0*t);

% Resposta ao impulso do filtro
h = (1/RC) * exp(-t/RC);

% Saída filtrada
y = conv(x, h) * (1/fs);
t_out = (0:length(y)-1) / fs;

% Visualização
figure;
subplot(3,1,1); plot(t, x); title('Sinal de entrada (com ruído)');
subplot(3,1,2); plot(t, h(1:length(t))); title('Resposta do filtro');
subplot(3,1,3); plot(t_out(1:length(t)), y(1:length(t)));
title('Sinal filtrado');
```

Aplicação 2: Modelagem de Sistema Mecânico

Sistema massa-mola-amortecedor:

$$m \frac{d^2 x(t)}{dt^2} + c \frac{dx(t)}{dt} + kx(t) = f(t) \quad (48)$$

Função de transferência:

$$H(s) = \frac{1}{ms^2 + cs + k} \quad (49)$$

Para resposta subamortecida ($\zeta < 1$):

$$h(t) = \frac{1}{m\omega_d} e^{-\zeta\omega_n t} \text{sen}(\omega_d t) u(t) \quad (50)$$

onde:

- $\omega_n = \sqrt{k/m}$ (frequência natural)
- $\zeta = c/(2\sqrt{km})$ (coeficiente de amortecimento)
- $\omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}$ (frequência amortecida)

Listing 4: Sistema massa-mola-amortecedor

```
% Parâmetros do sistema
m = 1;      % massa (kg)
c = 2;      % amortecimento (N s/m)
k = 10;     % rigidez da mola (N/m)
% Cálculo dos parâmetros característicos
wn = sqrt(k/m);           % frequência natural
zeta = c/(2*sqrt(k*m));    % coeficiente de amortecimento
wd = wn*sqrt(1-zeta^2);    % frequência amortecida
t = 0:0.01:5; % Tempo de simulação
% Resposta ao impulso
h = (1/(m*wd)) * exp(-zeta*wn*t) .* sin(wd*t) .* (t >= 0);
% Entrada — impulso de força
delta_aprox = [100 zeros(1,length(t)-1)]; % aproximação do impulso
% Resposta do sistema
y = conv(h, delta_aprox) * 0.01;
% Visualização
figure;subplot(2,1,1); plot(t, h); xlabel('Tempo (s)'); ylabel('Deslocamento (m)');
title('Resposta ao impulso'); subplot(2,1,2); plot(t, y(1:length(t)));
title('Resposta ao impulso aplicado'); xlabel('Tempo (s)'); ylabel('Deslocamento (m)');
% Parâmetros da resposta
fprintf('Frequência natural: %.2f rad/s\n', wn);
fprintf('Coeficiente de amortecimento: %.3f\n', zeta);
fprintf('Período amortecido: %.2f s\n', 2*pi/wd);
```

Relação com Transformada de Laplace

A integral de convolução está intimamente relacionada com a transformada de Laplace:

No domínio do tempo:

$$y(t) = x(t) * h(t) \quad (51)$$

No domínio de Laplace:

$$Y(s) = X(s) \cdot H(s) \quad (52)$$

Vantagem: A convolução (operação complexa) se torna multiplicação (operação simples).

Procedimento:

- 1 Transforme $x(t)$ e $h(t)$ para o domínio s
- 2 Multiplique: $Y(s) = X(s)H(s)$
- 3 Aplique a transformada inversa para obter $y(t)$

Este será o tema das próximas aulas!

Exercício de Verificação

Problema Conceitual: Verdadeiro ou Falso? Justifique.

- ① A convolução de dois sinais causais é sempre causal.
- ② Se $h_1(t) * h_2(t) = h_3(t)$, então $h_2(t) * h_1(t) = h_3(t)$.
- ③ A resposta de estado nulo independe das condições iniciais.
- ④ Todo sistema estável tem resposta ao impulso limitada.
- ⑤ A função de transferência existe para qualquer sistema linear.

Respostas:

- ① **V** - Propriedade da largura: duração se soma
- ② **V** - Propriedade comutativa da convolução
- ③ **V** - Por definição de estado nulo
- ④ **F** - Contraexemplo: $h(t) = \sin(t)u(t)$ (marginamente estável)
- ⑤ **F** - Só existe para sistemas LCIT

Exercícios para treino

- ❶ Determine a resposta de entrada nula para: $(p^2 + 6p + 9)y(t) = 2x(t)$ com $y_0(0) = 3$, $\dot{y}_0(0) = -7$
- ❷ Encontre a resposta ao impulso para: $(p^2 + 4p + 13)y(t) = (p + 1)x(t)$
- ❸ Para o sistema $(p^3 + 6p^2 + 11p + 6)y(t) = x(t)$:
 - Determine as raízes características
 - Classifique a estabilidade
 - Estime o tempo de estabelecimento
- ❹ Simule no MATLAB as respostas dos exercícios anteriores e compare com as soluções analíticas.

Leitura Recomendada

Lathi, Capítulo 2, Seções 2.1 a 2.3.

Caracterização de Sistemas

- **Tempo de resposta:** Largura de $h(t)$ indica velocidade do sistema
- **Estabilidade:** $h(t) \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow \infty$ para sistemas estáveis
- **Filtragem:** Comportamento de $h(t)$ determina propriedades de filtragem

Convolução

A resposta do sistema a qualquer entrada $x(t)$ é dada pela integral de convolução:

$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t - \tau)d\tau \quad (53)$$

Propriedades Importantes da Resposta ao Impulso

Causalidade

Para sistemas causais: $h(t) = 0$ para $t < 0$

A integral de convolução se torna:

$$y(t) = \int_0^t x(\tau)h(t - \tau)d\tau = \int_0^t x(t - \tau)h(\tau)d\tau \quad (54)$$

Estabilidade BIBO

Um sistema é estável BIBO (Bounded-Input Bounded-Output) se e somente se:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)|dt < \infty \quad (55)$$

Resposta ao Impulso Atrasado

Se $h(t)$ é a resposta do sistema a $\delta(t)$, então $h(t - T)$ é a resposta ao impulso atrasado $\delta(t - T)$. Esta propriedade decorre da invariância no tempo de sistemas LCIT.

Conceitos fundamentais estudados:

- **Resposta de estado nulo:** Calculada pela integral de convolução
- **Integral de convolução:** $y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t - \tau)d\tau$
- **Propriedades da convolução:** Comutativa, associativa, distributiva
- **Método gráfico:** Útil para sinais complexos ou não analíticos
- **Sistemas interconectados:** Paralelo (soma) e cascata (convolução)
- **Função de transferência:** $H(s)$ para entradas exponenciais
- **Resposta total:** Soma das respostas de entrada nula e estado nulo

Ferramentas computacionais: MATLAB para simulação e verificação

A convolução é fundamental para:

- **Processamento de sinais:** Filtragem, modulação, demodulação
- **Sistemas de comunicação:** Equalização, codificação
- **Controle automático:** Projeto de controladores
- **Análise de circuitos:** Resposta transitória e permanente
- **Processamento de imagens:** Filtros 2D, detecção de bordas
- **Análise de vibração:** Sistemas mecânicos

Limitações do método:

- Cálculo analítico pode ser complexo
- Métodos numéricos necessários para sinais arbitrários
- Solução será facilitada com transformada de Laplace

Resumo dos Conceitos Principais

1. Resposta de Entrada Nula

- Resposta às condições internas com entrada nula
- Combinação linear dos modos característicos
- Determinada pelas condições iniciais

2. Resposta ao Impulso Unitário

- Resposta característica fundamental do sistema
- Também é combinação dos modos característicos
- Condições iniciais determinadas pela entrada impulsiva

3. Modos Característicos

- Formas naturais de resposta do sistema
- Determinados pelas raízes da equação característica
- Aparecem em todas as respostas do sistema
- Determinam estabilidade e comportamento transitório

Fórmulas e Resultados Importantes

Equações Fundamentais

- Equação característica: $Q(\lambda) = 0$
- Resposta de entrada nula: $y_0(t) = \sum_{i=1}^N c_i e^{\lambda_i t}$
- Resposta ao impulso: $h(t) = \sum_{i=1}^N d_i e^{\lambda_i t} u(t)$

Casos Especiais

- Raízes repetidas: incluir termos $t^k e^{\lambda t}$
- Raízes complexas: usar forma real $e^{\alpha t} [\cos(\beta t), \sin(\beta t)]$
- Estabilidade: todas as raízes com $\text{Re}(\lambda) < 0$

Próximos Passos

- Resposta de estado nulo (entrada externa)
- Integral de convolução
- Análise de sistemas interconectados

Referência principal:

- LATHI, B. P. *Sinais e Sistemas Lineares*. 2ª ed. Porto Alegre: Bookman, 2000. Capítulo 2, Seção 2.4, páginas 160-185.

Referências complementares:

- OPPENHEIM, A. V.; WILLSKY, A. S. *Signals & Systems*. 2nd ed. Prentice Hall, 1997.
- HAYKIN, S.; VEEN, B. V. *Sinais e Sistemas*. Porto Alegre: Bookman, 2001.

Recursos online:

- MIT OpenCourseWare - Signals and Systems
- MATLAB Documentation - Signal Processing Toolbox