

ENE0067 – Sinais e Sistemas em Tempo Contínuo

Estabilidade de Sistemas

Prof. Eduardo Stockler Tognetti

Departamento de Engenharia Elétrica
Universidade de Brasília – UnB



Sumário

- 1 Conceito Intuitivo de Estabilidade
- 2 Estabilidade Externa (BIBO)
- 3 Estabilidade Interna (Assintótica)
- 4 Relação entre Estabilidades BIBO e Assintótica
- 5 Exemplos e Exercícios
- 6 Implicações Práticas
- 7 Resumo e Conclusões

Objetivos da Aula

- Compreender o conceito de estabilidade em sistemas dinâmicos
- Distinguir entre estabilidade externa (BIBO) e interna (assintótica)
- Estabelecer critérios de estabilidade baseados nas raízes características
- Relacionar a posição das raízes no plano complexo com a estabilidade
- Analisar exemplos práticos de sistemas estáveis e instáveis

Definição

Se, na ausência de uma entrada externa, um sistema permanecer em um estado particular indefinidamente, então este estado é um **estado de equilíbrio**.

- Para sistemas LIT, o **estado nulo** (todas as condições iniciais nulas) é um estado de equilíbrio
- A estabilidade é determinada pela resposta do sistema a pequenas perturbações
- Se o sistema retorna ao estado nulo → **estável**
- Se o sistema se afasta indefinidamente → **instável**
- Se o sistema não retorna nem se afasta → **marginalmente estável**

Estabilidade BIBO (Bounded-Input/Bounded-Output)

Definição

Um sistema é **BIBO estável** se toda entrada limitada produzir uma saída limitada.

- BIBO = *Bounded-Input/Bounded-Output* (Entrada Limitada/Saída Limitada)
- Também chamada de **estabilidade externa**
- Pode ser verificada através de medições nos terminais de entrada e saída
- Considera o sistema no estado nulo (condições iniciais nulas)

Critério Matemático

Se $|x(t)| < K_1 < \infty$ para todo t , então $|y(t)| < K_2 < \infty$ para todo t .

Critério de Estabilidade BIBO

Para um sistema LCIT descrito por:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)x(t - \tau)d\tau$$

Análise

Se $x(t)$ é limitada: $|x(t - \tau)| < K_1 < \infty$

$$|y(t)| = \left| \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)x(t - \tau)d\tau \right| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |h(\tau)||x(t - \tau)|d\tau \Rightarrow |y(t)| \leq K_1 \int_{-\infty}^{\infty} |h(\tau)|d\tau$$

Critério BIBO

Um sistema LCIT é BIBO estável se e somente se:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)|dt < \infty$$

A resposta ao impulso $h(t)$ deve ser **absolutamente integrável**.

Exemplo: Análise de Estabilidade BIBO

Exemplo 1

Determine a estabilidade BIBO dos seguintes sistemas:

① $h_1(t) = e^{-2t}u(t)$

② $h_2(t) = e^t u(t)$

③ $h_3(t) = \cos(3t)u(t)$

Solução:

① $\int_0^\infty |e^{-2t}| dt = \int_0^\infty e^{-2t} dt = \frac{1}{2} < \infty \rightarrow \text{Estável}$

② $\int_0^\infty |e^t| dt = \int_0^\infty e^t dt = \infty \rightarrow \text{Instável}$

③ $\int_0^\infty |\cos(3t)| dt = \infty \rightarrow \text{Instável}$

Estabilidade Interna (Assintótica)

Definição

Um sistema é **assintoticamente estável** se, quando sujeito a condições iniciais não nulas (sem entrada externa), eventualmente retorna ao estado nulo.

- Também chamada de estabilidade no sentido de **Lyapunov**
- Também conhecida como **estabilidade de entrada nula**
- Analisa o comportamento interno do sistema
- Baseada na resposta de entrada nula (modos característicos)

Teorema (Condição de Estabilidade)

Um sistema LCIT é estável se e somente se todas as raízes características têm parte real negativa.

Critério

Todos os modos característicos devem tender a zero quando $t \rightarrow \infty$.

Estabilidade e Modos Característicos

- **Raízes com $\text{Re}(\lambda) < 0$:** modos **próprios** decrescentes (estável)
- **Raízes com $\text{Re}(\lambda) = 0$:** modos **próprios** marginalmente estáveis
- **Raízes com $\text{Re}(\lambda) > 0$:** modos **próprios** crescentes (instável)

Critério Prático

Para verificar estabilidade, analise a localização das raízes características no plano complexo. Todas devem estar no semiplano esquerdo.

Classificação por Raízes Características

- **Raízes reais negativas:** resposta aperiódica decrescente
- **Raízes complexas com $\text{Re}(\lambda) < 0$:** resposta oscilatória amortecida
- **Raízes imaginárias puras:** resposta oscilatória sustentada
- **Raízes reais positivas:** resposta aperiódica crescente (instável)
- **Raízes complexas com $\text{Re}(\lambda) > 0$:** resposta oscilatória crescente (instável)

Modos Característicos e Estabilidade

Para um sistema descrito por:

$$(p^N + a_{N-1}p^{N-1} + \dots + a_1p + a_0)y(t) = (b_Mp^M + \dots + b_1p + b_0)x(t)$$

Os modos característicos têm a forma:

- $e^{\lambda_k t}$ para raízes simples
- $t^r e^{\lambda_k t}$ para raízes repetidas

onde λ_k são as raízes da equação característica:

$$\lambda^N + a_{N-1}\lambda^{N-1} + \dots + a_1\lambda + a_0 = 0$$

Condição de Estabilidade

Para que $e^{\lambda_k t} \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow \infty$: $\text{Re}(\lambda_k) < 0$

Tipos de Resposta Segundo os Modos Próprios

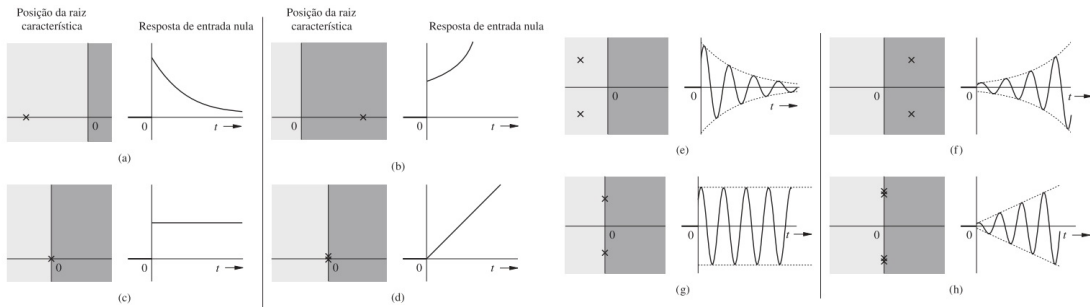


Figura: Localização das raízes no plano s e tipos de resposta correspondentes.

- **SPE (Semiplano Esquerdo):** $\text{Re}(\lambda) < 0 \rightarrow$ Modos decaem
- **SPD (Semiplano Direito):** $\text{Re}(\lambda) > 0 \rightarrow$ Modos crescem
- **Eixo Imaginário:** $\text{Re}(\lambda) = 0 \rightarrow$ Modos oscilantes

Regiões de Estabilidade no Plano Complexo

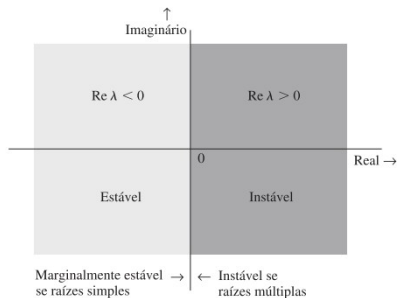


Figura: Regiões de estabilidade no plano complexo. Fonte: Lathi, 2000.

Critérios de Estabilidade Interna

- 1 **Assintoticamente estável:** Todas as raízes no SPE (semiplano esquerdo)
- 2 **Instável:** Pelo menos uma raiz no SPD (semiplano direito) OU raízes repetidas no eixo imaginário
- 3 **Marginalmente estável:** Raízes simples no eixo imaginário e demais no SPE

Exemplo 2

Determine a estabilidade dos sistemas com as seguintes equações características:

- ① $\lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0$
- ② $\lambda^2 - \lambda + 6 = 0$
- ③ $\lambda^2 + 4 = 0$
- ④ $(\lambda + 2)^2(\lambda^2 + 4) = 0$

Solução:

- ① $\lambda = -1, -2 \rightarrow$ **Estável**
- ② $\lambda = \frac{1 \pm j\sqrt{23}}{2} \rightarrow$ **Instável**
- ③ $\lambda = \pm 2j \rightarrow$ **Marginalmente estável**
- ④ $\lambda = 2, -2, \pm 2j \rightarrow$ **Instável**
- ⑤ $\lambda = -1, 0 \rightarrow$ **Marginalmente estável**; $\lambda = -1, 0, 0 \rightarrow$ **Instável**

Relação entre Estabilidade BIBO e Assintótica

Teorema Fundamental

- Estabilidade assintótica $\Rightarrow$ Estabilidade BIBO
- Estabilidade BIBO $\nRightarrow$ Estabilidade assintótica

Justificativa:

- A resposta ao impulso $h(t)$ é combinação linear dos modos característicos
- Se todas as raízes estão no SPE: $e^{\lambda_k t}$ são absolutamente integráveis
- Se alguma raiz está no SPD ou eixo imaginário: $e^{\lambda_k t}$ não são absolutamente integráveis

Importante

Para sistemas controláveis e observáveis, as duas estabilidades são equivalentes.

Exemplo: BIBO Estável mas Assintoticamente Instável

Sistema em Cascata

Considere dois subsistemas em cascata:

- $S_1: h_1(t) = \delta(t) - 2e^{-t}u(t)$
- $S_2: h_2(t) = e^t u(t)$

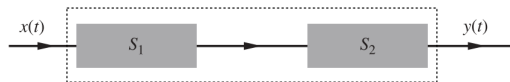


Figura: Sistema em cascata com estabilidade BIBO mas instabilidade assintótica. Fonte: Lathi, 2000.

Resultado:

- $h(t) = h_1(t) * h_2(t) = e^{-t}u(t) \rightarrow$ BIBO estável
- S_2 tem raiz característica $\lambda = 1$ (parte real positiva) $\rightarrow$ Assintoticamente instável

Exemplo 3

Para o sistema descrito por: $(p^2 + 3p + 2)y(t) = (p + 1)x(t)$

- 1 Determine as raízes características
- 2 Analise a estabilidade assintótica e BIBO
- 3 Encontre a resposta ao impulso

Solução:

- 1 Equação característica: $\lambda^2 + 3\lambda + 2 = (\lambda + 1)(\lambda + 2) = 0$ Raízes: $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = -2$
- 2 Ambas raízes no SPE $\rightarrow$ **Estável (ambos critérios)**
- 3 $h(t) = (2e^{-t} - e^{-2t})u(t)$

Exercício 1

Determine a estabilidade dos seguintes sistemas:

- ① $(p^2 + 2p + 5)y(t) = x(t)$
- ② $(p^3 + 2p^2 + p + 2)y(t) = px(t)$
- ③ $(p^2 + 1)y(t) = (p + 1)x(t)$

Dicas:

- Encontre as raízes características
- Localize-as no plano complexo
- Aplique os critérios de estabilidade

Simulação MATLAB: Análise de Estabilidade

```
% Definir os coeficientes do polinômio característico
% Para  $s^3 + 2s^2 + s + 2 = 0$ 
coef = [1 2 1 2];

% Encontrar as raízes
raizes = roots(coef);
disp('Raízes características:');
disp(raizes);

% Verificar estabilidade
partes_reais = real(raizes);
if all(partes_reais < 0)
    disp('Sistema assintoticamente estável');
elseif any(partes_reais > 0)
    disp('Sistema instável');
else
    disp('Sistema marginalmente estável');
end

% Plotar raízes no plano complexo
figure;
plot(real(raizes), imag(raizes), 'ro', 'MarkerSize', 8);
grid on;
xlabel('Parte Real');
ylabel('Parte Imaginária');
title('Localização das Raízes no Plano Complexo');
axline(0, 'Color', 'k', 'LineWidth', 1);
```

Listing 1: Análise de estabilidade no MATLAB

MATLAB: Visualização da Resposta ao Impulso

```
% Sistema estável:  $s^2 + 3s + 2$ 
num1 = [1 1];      %  $p + 1$ 
den1 = [1 3 2];    %  $s^2 + 3s + 2$ 
sys1 = tf(num1, den1);

% Sistema instável:  $s^2 - s + 1$ 
num2 = [1];        % 1
den2 = [1 -1 1];   %  $s^2 - s + 1$ 
sys2 = tf(num2, den2);

% Tempo de simulação
t = 0:0.01:10;

% Calcular respostas ao impulso
[h1, t1] = impulse(sys1, t);
[h2, t2] = impulse(sys2, t);

% Plotar resultados
figure;
subplot(2,1,1);
plot(t1, h1, 'b-', 'LineWidth', 2);
title('Sistema Estável:  $h_1(t)$ ');
xlabel('Tempo (s)');
ylabel('Amplitude');
grid on;

subplot(2,1,2);
plot(t2, h2, 'r-', 'LineWidth', 2);
title('Sistema Instável:  $h_2(t)$ ');
xlabel('Tempo (s)');
ylabel('Amplitude');
grid on;
```

Listing 2: Resposta ao impulso e análise de estabilidade

Implicações Práticas da Estabilidade

Sistemas Práticos

Todos os sistemas de processamento de sinais práticos devem ser assintoticamente estáveis.

Por que a estabilidade é crucial?

- **Sistemas instáveis:** Qualquer condição inicial pode resultar em resposta ilimitada
- **Consequências:** Destruição do sistema ou saturação que altera sua natureza
- **Robustez:** Sistemas estáveis são mais robustos a perturbações
- **Controle:** Base fundamental para projeto de controladores

Exemplo Histórico

A ponte de Tacoma Narrows (1940) colapsou devido à ressonância - um exemplo de instabilidade em sistemas físicos.

Sistemas Marginalmente Estáveis

- Raízes simples no eixo imaginário
- Comportamento oscilatório sustentado
- BIBO instáveis (entrada senoidal pode causar ressonância)

Exemplos típicos:

- Osciladores: $\frac{d^2y}{dt^2} + \omega_0^2 y = x(t)$
- Integradores ideais: $\frac{dy}{dt} = x(t)$
- Sistemas conservativos sem amortecimento

Cuidado

Na prática, sistemas marginalmente estáveis são evitados devido à sensibilidade a perturbações.

Conceitos Fundamentais

- **Estabilidade BIBO:** Entrada limitada $\rightarrow$ Saída limitada
- **Estabilidade Assintótica:** Retorno ao estado nulo após perturbação
- **Critério BIBO:** $\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)| dt < \infty$
- **Critério Assintótico:** Todas as raízes no SPE

Relações Importantes

- Estabilidade assintótica $\Rightarrow$ Estabilidade BIBO
- Para sistemas controláveis/observáveis: equivalência
- Posição das raízes determina comportamento dinâmico

Tabela Resumo: Critérios de Estabilidade

Condição	Localização das Raízes	Assintótica	BIBO
Todas no SPE	$\text{Re}(\lambda_i) < 0$	Estável	Estável
Alguma no SPD	$\text{Re}(\lambda_i) > 0$	Instável	Instável
Simples no eixo	$\text{Re}(\lambda_i) = 0$	Marginal	Instável
Repetidas no eixo	$\text{Re}(\lambda_i) = 0$	Instável	Instável

Tabela: Critérios de estabilidade para sistemas LCIT

Legenda:

- SPE: Semiplano Esquerdo
- SPD: Semiplano Direito