

ENE0067 – Sinais e Sistemas em Tempo Contínuo

Análise de Sistemas em Tempo Contínuo usando a Transformada de Laplace:
Região de Convergência, Propriedades e Função de Transferência (parte 1)

Prof. Eduardo Stockler Tognetti

Departamento de Engenharia Elétrica
Universidade de Brasília – UnB



Sumário da Aula

- 1 Motivação
- 2 Transformada de Laplace
- 3 Polos e Zeros de $X(s)$
- 4 Transformada Inversa de Laplace
- 5 Propriedades da Transformada de Laplace
- 6 Função transferência de um sistema

Motivação I: Transformada de Fourier

A **Transformada de Fourier** permite representar sinais como combinação de exponenciais complexas $e^{j\omega t}$:

Par de Transformada de Fourier

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt =: \mathcal{F}\{x(t)\} \quad (\text{Direta})$$

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) e^{j\omega t} d\omega =: \mathcal{F}^{-1}\{X(\omega)\} \quad (\text{Inversa})$$

Interpretação:

- Decompõe $x(t)$ em componentes de **frequências reais** ω
- Cada componente tem amplitude $X(\omega)$

Limitações da Transformada de Fourier

Problema: A Transformada de Fourier só existe se:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)| dt < \infty \quad (\text{absolutamente integrável})$$

Sinais que NÃO possuem Transformada Clássica de Fourier¹:

- Degrau unitário: $u(t)$
- Exponencial crescente: $e^{at}u(t)$ com $a > 0$
- Constante: $x(t) = C$
- Qualquer sinal que cresce exponencialmente

Como analisar sistemas com esses sinais?

¹ Podem possuir Transformada Generalizada de Fourier, ou seja, $\mathcal{F}\{x(t)\} = \lim_{\sigma \rightarrow 0} \mathcal{F}\{x(t)e^{-\sigma|t|}\}$.

Solução: Frequência Complexa

Ideia: Generalizar a frequência ω para uma frequência **complexa** s :

Frequência Complexa

$$s = \sigma + j\omega$$

- σ : parte real (frequência de decaimento/crescimento)
- ω : parte imaginária (frequência de oscilação)

A exponencial complexa generalizada é:

$$e^{st} = e^{(\sigma + j\omega)t} = e^{\sigma t} e^{j\omega t}$$

- Se $\sigma < 0$: decai exponencialmente
- Se $\sigma > 0$: cresce exponencialmente
- Se $\sigma = 0$: oscilação pura (Transformada de Fourier)

Plano Complexo s

Plano s

- Eixo horizontal: σ (parte real)
- Eixo vertical: $j\omega$ (parte imaginária)
- **Eixo $j\omega$** : Transformada de Fourier
- **Plano completo**: Transformada de Laplace

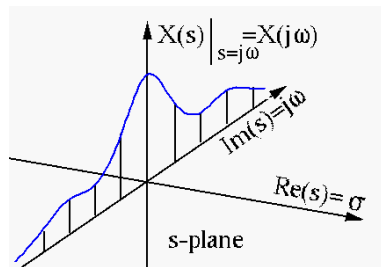


Figura: Plano complexo $s = \sigma + j\omega$.

Conclusão

A Transformada de Laplace é uma **generalização** da Transformada de Fourier para todo o plano complexo!

Relação entre Fourier e Laplace

Conexão Fundamental

Se $X(s)$ é a Transformada de Laplace de $x(t)$:

$$X(j\omega) = X(s) \Big|_{s=j\omega}$$

quando a **Região de Convergência (RDC)** inclui o eixo $j\omega$.

Exemplo: Para $x(t) = e^{-at}u(t)$ com $a > 0$:

- Transformada de Laplace: $X(s) = \frac{1}{s+a}$, RDC: $\text{Re } s > -a$
- Como RDC inclui $j\omega$, então: $X(j\omega) = \frac{1}{j\omega+a}$

Vantagem: Laplace funciona mesmo quando Fourier não existe!

Motivação II: Resposta de sistemas LCIT

Para sistemas LCIT, a exponencial e^{st} (onde $s = \sigma + j\omega$) é uma função especial chamada de função característica (ou autofunção) do sistema.

- Se a entrada é $x(t) = e^{st}$ e as condições iniciais são nulas, então:

$$y(t) = h(t) * e^{st} = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{s(t-\tau)} d\tau = \left(\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{-s\tau} d\tau \right) e^{st} = H(s) e^{st}$$

em que

$$H(s) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{-s\tau} d\tau \quad (1)$$

Logo,

$$x(t) = \sum_{i=1}^k a_i e^{s_i t} \Rightarrow y(t) = \sum_{i=1}^k a_i H(s_i) e^{s_i t} \quad (2)$$

$H(s)$ é a transformada de Laplace de $h(t)$ e chamada de **função de transferência** do sistema.

- Veremos como avaliar as propriedades e resposta do sistema de forma mais fácil através de $H(s)$.

Definição: Transformada de Laplace Bilateral

Transformada de Laplace Bilateral

Para um sinal $x(t)$, a Transformada de Laplace $X(s)$ é:

$$X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-st} dt \quad (3)$$

→ Pela definição, $x(t)$ poder ser causal ou anti-causal → transformada bilateral

Transformada Inversa

$$x(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} X(s)e^{st} ds \quad (4)$$

onde c é uma constante escolhida para garantir convergência.

→ Observe que $x(t)$ foi expressa como uma soma infinita de exponenciais e cada exponencial e^{st} tem um peso $X(s)$ na soma.

Notação: $X(s) = \mathcal{L}\{x(t)\}$, $x(t) = \mathcal{L}^{-1}\{X(s)\}$ ou $x(t) \Longleftrightarrow X(s)$

Transformações integrais

- Transformadas integrais: transformação linear $\mathcal{T}$ (operador linear limitado) da que transforma a função f na função $\mathcal{T}\{f\}$ ($F = \mathcal{T}f$) da seguinte forma

$$F(s) = \mathcal{T}\{f(t)\} = \int_{\alpha}^{\beta} f(t)K(t, s)dt$$

em que $K(t, s)$ é chamada de núcleo (*kernel*) da transformação. Transformadas são usadas para resolver problemas difíceis através de uma mudança de espaço (*domínio*) da função.

- Alguns núcleos possuem núcleos inversos $K(s, t)^{-1}$

$$f(t) = \mathcal{T}^{-1}\{F(s)\} = \int_a^b K(s, t)^{-1}(\mathcal{T}f)(s)ds$$

- O núcleo e os limites definem a transformada. No caso da Transformada de Laplace, $K(t, s) = e^{-st}$.
- Obs.: A expressão $y(t) = \int_a^b x(\tau)G(t, \tau)dt$ é uma equação integral e é usada para resolver equações diferenciais. Para sistemas lineares invariantes no tempo com entrada $x(t)$ a função de Green G é a resposta ao impulso e para EDOs não homogêneas com c.i. nulas, $G(t, \tau) = h(t - \tau)$ e $y(t) = \int_0^t x(\tau)G(t, \tau)dt = x(t) * h(t)$.

Região de Convergência (RDC)

Definição

A **Região de Convergência (RDC)** é o conjunto de valores de s para os quais a integral de Laplace converge.

Para convergência, é necessário que:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)e^{-st}| dt < \infty$$

Seja $s = \sigma + j\omega$, observe que

$$X(\sigma + j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} [x(t)e^{-\sigma t}]e^{-j\omega t} dt, \quad X(\sigma + j\omega) = \mathcal{F}\{x(t)e^{-\sigma t}\}$$

$\rightsquigarrow$ Existência de $\mathcal{L}\{x(t)\} \Leftrightarrow$ existência de $\mathcal{F}\{x(t)e^{-\sigma t}\} \Rightarrow$ RDC: valores de σ que garantem $\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)e^{-\sigma t}| dt < \infty \rightsquigarrow \exists \sigma_0 : \operatorname{Re}\{s\} > \sigma_0$

Exemplo: exponencial crescente

Determine a Transformada de Laplace de $x(t) = e^t u(t)$.

- $\mathcal{F}\{x(t)\}$ não existe
- $x(t)e^{-\sigma t}$ é absolutamente integrável quando $\sigma > 1 \rightsquigarrow 1 - \sigma < 0$:

$$\mathcal{F}\{x(t)e^{-\sigma t}\} = \mathcal{F}\{e^{(1-\sigma)t}u(t)\} \quad \text{existe}$$

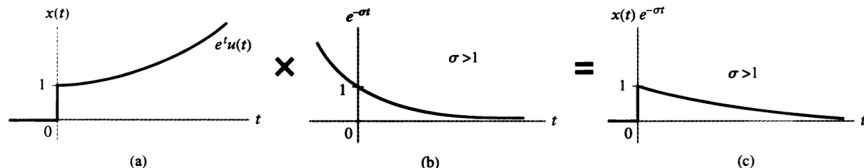


Figura: (a) $x(t) = e^t u(t)$; (b) $e^{-\sigma t}$, $\sigma > 1$; (c) $x(t)e^{-\sigma t}$, $\sigma > 1$.

Exemplo 4.1: Exponencial Causal

Determine a Transformada de Laplace de $x(t) = e^{-at}u(t)$.

Solução:

$$\begin{aligned}X(s) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-at}u(t)e^{-st} dt \\&= \int_0^{\infty} e^{-at}e^{-st} dt \quad (\text{pois } u(t) = 0 \text{ para } t < 0) \\&= \int_0^{\infty} e^{-(s+a)t} dt = \left[-\frac{1}{s+a} e^{-(s+a)t} \right]_0^{\infty}\end{aligned}$$

Para que $e^{-(s+a)t} \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow \infty$, precisamos $\text{Re}(s+a) > 0$, ou seja, $\text{Re}\{s\} > -a$.

Resultado

$$\mathcal{L}\{e^{-at}u(t)\} = \frac{1}{s+a}, \quad \text{RDC: } \text{Re}\{s\} > -a$$

Exponencial Anticausal

Determine a Transformada de Laplace de $x(t) = -e^{-at}u(-t)$.

Note que $u(-t) = 1$ para $t \leq 0$ e $u(-t) = 0$ para $t > 0$.

Solução:

$$\begin{aligned} X(s) &= \int_{-\infty}^{\infty} (-e^{-at}u(-t))e^{-st} dt \\ &= - \int_{-\infty}^0 e^{-at}e^{-st} dt = - \int_{-\infty}^0 e^{-(a+s)t} dt = \left[\frac{1}{a+s} e^{-(a+s)t} \right]_{-\infty}^0 \end{aligned}$$

Para convergência em $t \rightarrow -\infty$, precisamos $\operatorname{Re}\{a+s\} < 0$, ou seja, $\operatorname{Re}\{s\} < -a$.

Resultado

$$\mathcal{L}\{-e^{-at}u(-t)\} = \frac{1}{s+a}, \quad \text{RDC: } \operatorname{Re}\{s\} < -a$$

Observação: $\mathcal{L}\{-e^{-at}u(-t)\} = \mathcal{L}\{e^{-at}u(t)\}$, mas RDCs diferentes!

Importância da Região de Convergência

Fato Importante

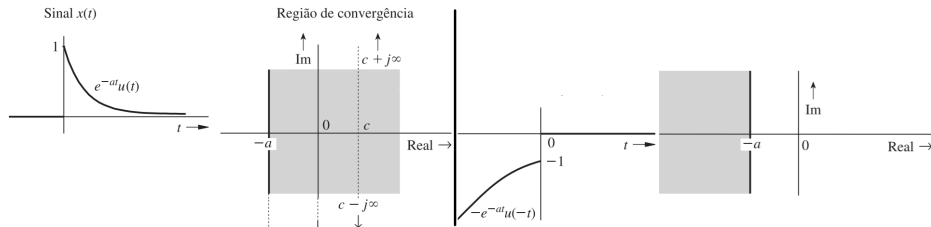
Uma dada $X(s)$ pode ter **múltiplas transformadas inversas**, dependendo da RDC!

Exemplo anterior:

$$X(s) = \frac{1}{s + a}$$

pode corresponder a:

- $x(t) = e^{-at}u(t)$ se RDC: $\text{Re}\{s\} > -a$ (sinal causal)
- $x(t) = -e^{at}u(-t)$ se RDC: $\text{Re}\{s\} < -a$ (sinal anticausal)



Transformada de Laplace Unilateral

Motivação: Na prática, a maioria dos sinais e sistemas são **causais**, ou seja, $x(t) = 0, t < 0$.

Transformada de Laplace Unilateral

Restringe-se a sinais causais, usando limite inferior $t = 0^-$:

$$X(s) = \int_{0^-}^{\infty} x(t)e^{-st} dt \quad (5)$$

Vantagens da Transformada Unilateral:

- **Unicidade:** Para cada $X(s)$ existe uma única $x(t)$
- **Não é necessário especificar a RDC!**
- Todos os sinais são implicitamente multiplicados por $u(t)$
- Mais simples para análise de sistemas práticos

Convenção: Daqui em diante, usaremos a transformada **unilateral** salvo menção contrária.

Região de convergência (RDC) para sinais de duração finita

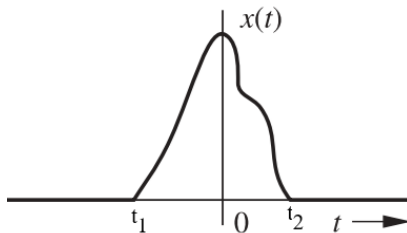


Figura: Sinal de duração finita absolutamente integrável. A RDC é todo plano complexo.

- O sinal de **duração finita** $x_f(t)$ só é não nulo no intervalo $t_1 \leq t \leq t_2$, com t_1 e t_2 finitos e $t_2 > t_1$;
- Se for **absolutamente integrável**, a RDC é todo o plano complexo s , pois $x_f(t)e^{-\sigma t}$ também será absolutamente integrável para qualquer valor de σ , já que o intervalo de tempo é limitado;
- Para um sinal $x(t)$ qualquer com um certo RDC $\mathcal{R}$, ao somar $x(t)$ a $x_f(t)$, a RDC da soma permanecerá $\mathcal{R}$.

Linearidade da Transformada de Laplace

Se $x_1(t) \Leftrightarrow X_1(s)$ e $x_2(t) \Leftrightarrow X_2(s)$, então:

$$a_1 x_1(t) + a_2 x_2(t) \Leftrightarrow a_1 X_1(s) + a_2 X_2(s)$$

para quaisquer constantes a_1 e a_2 .

Prova: Aplicação direta da definição e linearidade da integral.

Importância: Permite calcular transformadas de sinais compostos.

Exemplo 4.2: Transformadas Básicas

(a) **Determine a Transformada de Laplace de $\delta(t)$.**

Solução: Usando a propriedade de amostragem do impulso:

$$\mathcal{L}\{\delta(t)\} = \int_{0^-}^{\infty} \delta(t)e^{-st} dt = e^{-s \cdot 0} = 1, \quad \forall s \in \mathbb{C}$$

Resultado

$$\mathcal{L}\{\delta(t)\} = 1, \quad \text{para todo } s$$

Exemplo 4.2: Transformadas Básicas

(b) Determine a Transformada de Laplace de $u(t)$.

Solução: Como $u(t) = 1$ para $t \geq 0$:

$$\mathcal{L}\{u(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-st} dt = \left[-\frac{1}{s} e^{-st} \right]_0^{\infty} = \frac{1}{s}, \quad \operatorname{Re}\{s\} > 0$$

Resultado

$$\boxed{\mathcal{L}\{u(t)\} = \frac{1}{s}}, \quad \operatorname{Re}\{s\} > 0$$

Exemplo 4.2: Transformadas Básicas (cont.)

(c) **Determine a Transformada de Laplace de** $\cos(\omega_0 t)u(t)$ e $\sin(\omega_0 t)u(t)$.

Solução: Usando a identidade de Euler:

$$\cos(\omega_0 t) = \frac{e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}}{2}$$

Pela linearidade e usando $e^{-at}u(t) \Leftrightarrow \frac{1}{s+a}$, $\operatorname{Re}\{s\} > -\operatorname{Re}\{a\}$:

$$\mathcal{L}\{\cos(\omega_0 t)u(t)\} = \frac{1}{2} (\mathcal{L}\{e^{j\omega_0 t}u(t)\} + \mathcal{L}\{e^{-j\omega_0 t}u(t)\}) = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{s-j\omega_0} + \frac{1}{s+j\omega_0} \right] = \frac{s}{s^2 + \omega_0^2},$$

com $\operatorname{Re}\{s\} > 0$. Similarmente:

$$\mathcal{L}\{\sin(\omega_0 t)u(t)\} = \frac{\omega_0}{s^2 + \omega_0^2}, \quad \operatorname{Re}\{s\} > 0$$

Resultados

$$\boxed{\cos(\omega_0 t)u(t) \Leftrightarrow \frac{s}{s^2 + \omega_0^2}, \quad \sin(\omega_0 t)u(t) \Leftrightarrow \frac{\omega_0}{s^2 + \omega_0^2}, \quad \operatorname{Re}\{s\} > 0}$$

Tabela: Pares de Transformadas de Laplace

Nº	Sinal $x(t)$	Transformada $X(s)$
1	$\delta(t)$	1
2	$u(t)$	$\frac{1}{s}$
3	$tu(t)$	$\frac{1}{s^2}$
4	$t^n u(t)$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
5	$e^{-at} u(t)$	$\frac{1}{s+a}$
6	$te^{-at} u(t)$	$\frac{1}{(s+a)^2}$
7	$t^n e^{-at} u(t)$	$\frac{n!}{(s+a)^{n+1}}$
8a	$\cos(\omega_0 t) u(t)$	$\frac{s}{s^2 + \omega_0^2}$
8b	$\text{sen}(\omega_0 t) u(t)$	$\frac{\omega_0}{s^2 + \omega_0^2}$
9a	$e^{-at} \cos(\omega_0 t) u(t)$	$\frac{s+a}{(s+a)^2 + \omega_0^2}$
9b	$e^{-at} \text{sen}(\omega_0 t) u(t)$	$\frac{\omega_0}{(s+a)^2 + \omega_0^2}$
10b	$re^{-at} \cos(bt + \theta) u(t)$	$\frac{0,5re^{j\theta}}{s+a-jb} + \frac{0,5re^{-j\theta}}{s+a+jb}$

Tabela: Tabela de transformada de Laplace (unilateral). Fonte: Tabela 4.1 (Lathi).

Exemplo MATLAB: Transformada de Laplace

Objetivo: Calcular e visualizar a Transformada de Laplace de sinais básicos.

```
1 % Transformada de Laplace simbolica no MATLAB/Octave
2 syms t s a omega0 real
3
4 % Exemplo 1: Exponencial decrescente
5 x1 = exp(-a*t);
6 X1 = laplace(x1, t, s)
7 % Resultado: X1 = 1/(s + a)
8
9 % Exemplo 2: Senoide
10 x2 = sin(omega0*t);
11 X2 = laplace(x2, t, s)
12 % Resultado: X2 = omega0/(s^2 + omega0^2)
13
14 % Exemplo 3: Exponencial senoidal amortecida
15 x3 = exp(-a*t)*sin(omega0*t);
16 X3 = laplace(x3, t, s)
17 % Resultado: X3 = omega0/((s+a)^2 + omega0^2)
18
19 % Verificacao: transformada inversa
20 x3_inv = ilaplace(X3, s, t);
21 simplify(x3_inv)
```

Listing 1: Transformada de Laplace simbolica

Transformada de Laplace racional

FONTE: Oppenheim – item 9.1

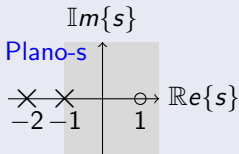
$$X(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$$

- $X(s)$ será racional sempre que $x(t)$ for uma combinação linear de exponenciais reais ou complexas.
- Transformadas racionais também surgem quando forem considerados sistemas LIT especificados em termos de equações diferenciais lineares com coeficientes constantes.
- Exceto por um fator de escala, os polinômios do numerador e do denominador podem ser especificados por suas raízes $\Rightarrow$ marcar as localizações das raízes de $N(s)$ (marcar zeros com $\times$) e $D(s)$ (marcar polos com $\circ$) no plano s e indicar a RDC

Polos e Zeros de $X(s)$

Raízes do numerador $N(s) = 0 \Rightarrow$ zeros de $X(s)$

Raízes do denominador $D(s) = 0 \Rightarrow$ polos de $X(s)$



Polos = $-1; -2$; Zeros = 1 .

Transformada de Laplace racional (cont.)

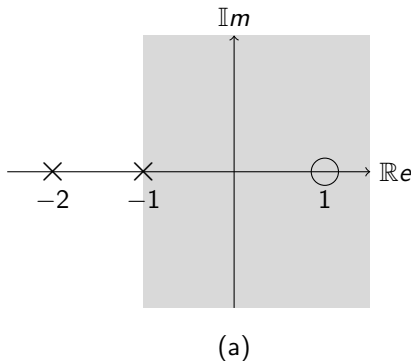
FONTE: Oppenheim – item 9.1

Do exemplo 9.3:

$$3e^{-2t}u(t) - 2e^{-t}u(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} \frac{s-1}{s^2+3s+2}, \quad \text{Re}\{s\} > -1$$

Raízes polinômio numerador = zeros de $X(s)$

Raízes polinômio denominador = polos de $X(s)$



- **Zeros de $X(s)$:** valores de s para os quais $X(s) = 0$
- **Polos de $X(s)$:** valores de s para os quais $|X(s)| = \infty$

Transformada de Laplace racional (cont.2)

FONTE: Oppenheim – item 9.1

Do exemplo 9.4:

$$e^{-2t}u(t) + e^{-t}(\cos 3t)u(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} \frac{2s^2 + 5s + 12}{(s^2 + 2s + 10)(s + 2)},$$

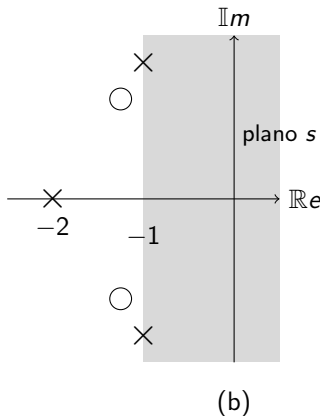
$$\operatorname{Re}\{s\} > -1$$

Raízes polinômio numerador = zeros de $X(s)$

$s = -1.25 \pm j2.1$ (não possui raízes reais)

Raízes polinômio denominador = polos de $X(s)$

$s = -2; s = -1 \pm j3$



⇒ Os polos e zeros finitos de $X(s)$ no plano s caracterizam completamente a expressão algébrica de $X(s)$, a menos de um fator de escala.

Transformada de Laplace racional (cont.3)

FONTE: Oppenheim – item 9.1

Do exemplo 9.4:

$$e^{-2t}u(t) + e^{-t}(\cos 3t)u(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} \frac{2s^2 + 5s + 12}{(s^2 + 2s + 10)(s + 2)}, \quad \operatorname{Re}\{s\} > -1$$

- Se a ordem do polinômio do denominador for maior que a ordem do polinômio do numerador, $X(s)$ se tornará nulo à medida que $s \rightarrow \infty$.
- Na expressão acima: ordem denominador = 3; ordem numerador = 2 $\Rightarrow X(s)$ possui 1 zero no infinito.

Polos e zeros no infinito

- **O número de polos é sempre igual ao número de zeros** (no. polos = no. zeros finitos + no. zeros no infinito)
- Zeros finitos: raízes de $N(s) = 0$. Ex.: $H(s) = \frac{s+2}{(s+1)(s+3)}$ tem 2 polos $(-1, -3)$, 1 zero finito (-2) e 1 zero no infinito.
- Se a ordem de $N(s)$ for n e a ordem de $D(s)$ for $n+k$, então:
 - Teremos $n+k$ polos, nas raízes de $D(s)$
 - Teremos n zeros calculados a partir das raízes de $N(s)$, e mais k zeros no infinito
 - Pois, neste caso, $X(s) \rightarrow 0$ à medida em que $s \rightarrow \infty$
- Se a ordem de $N(s)$ for $n+k$ e a ordem de $D(s)$ for n , então:
 - Teremos $n+k$ zeros, nas raízes de $N(s)$
 - Teremos n polos calculados a partir das raízes de $D(s)$, e mais k polos no infinito
 - Pois, neste caso, $|X(s)| \rightarrow \infty$ à medida em que $s \rightarrow \infty$
- Nos exemplos dos slides anteriores, $X(s)$ tem 1 zero no infinito
 - Ex. 9.3: $N(s)$ é ordem 1 e $D(s)$ é ordem 2
 - Ex. 9.4: $N(s)$ é ordem 2 e $D(s)$ é ordem 3
 - Em ambos, $X(s) \rightarrow 0$ à medida em que $s \rightarrow \infty$

Exemplo 9.5

FONTE: Oppenheim – item 9.1

$$x(t) = \delta(t) - \frac{4}{3}e^{-t}u(t) + \frac{1}{3}e^{2t}u(t), \quad \mathcal{L}\{\delta(t)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)e^{-st}dt = 1 \quad \forall s$$

$$\Rightarrow X(s) = 1 - \frac{4}{3} \frac{1}{s+1} + \frac{1}{3} \frac{1}{s-2}, \quad \operatorname{Re}\{s\} > 2$$

$$\Rightarrow X(s) = \frac{(s-1)^2}{(s+1)(s-2)}, \quad \operatorname{Re}\{s\} > 2$$

Zero de segunda ordem em $s = +1$

Dois polos de primeira ordem, um em $s = -1$ e outro em $s = 2$.

Exemplo 9.5 (cont.)

FONTE: Oppenheim – item 9.1

$$X(s) = \frac{(s-1)^2}{(s+1)(s-2)}, \quad \text{Re}\{s\} > 2$$

$\Rightarrow$ Ordem denominador = ordem numerador $\Rightarrow$
 $X(s)$ não possui polos nem zeros no infinito.

- Para $s = j\omega \Rightarrow$ transf. Laplace $\Leftrightarrow$ trans. Fourier.
- No entanto, se RDC da T. Laplace não inclui o eixo $j\omega$, a T. Fourier não converge.

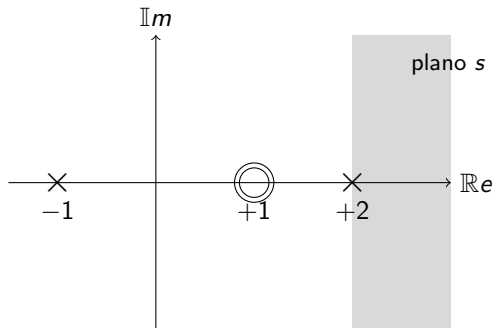


Figura 9.3 Diagrama de polos e zeros e a RDC para o Exemplo 9.5.

Determinando a Transformada Inversa

Métodos para Calcular $\mathcal{L}^{-1}\{X(s)\}$

- 1 **Tabela de transformadas:** Buscar $X(s)$ na tabela
- 2 **Expansão em frações parciais:** Quando $X(s)$ é uma função racional
- 3 **Integração no plano complexo:** Método geral (requer teoria avançada)

Função Racional:

$$X(s) = \frac{P(s)}{Q(s)} = \frac{b_M s^M + b_{M-1} s^{M-1} + \cdots + b_1 s + b_0}{s^N + a_{N-1} s^{N-1} + \cdots + a_1 s + a_0}$$

- Se $M < N$: *estritamente própria*
- Se $M = N$: *própria*
- Se $M > N$: *imprópria* (usar divisão longa primeiro)

Expansão em Frações Parciais: Polos Distintos

Se $X(s) = \frac{P(s)}{Q(s)}$ é estritamente própria e $Q(s)$ tem N raízes distintas $p_1, p_2, \dots, p_N$:

Expansão em Frações Parciais

$$X(s) = \frac{P(s)}{(s - p_1)(s - p_2) \cdots (s - p_N)} = \frac{k_1}{s - p_1} + \frac{k_2}{s - p_2} + \cdots + \frac{k_N}{s - p_N}$$

Cálculo dos resíduos k_i :

$$k_i = [(s - p_i)X(s)]_{s=p_i}$$

Transformada inversa:

$$x(t) = \sum_{i=1}^N k_i e^{p_i t} u(t)$$

Exemplo: Frações Parciais com Polos Distintos

Determine $x(t)$ se $X(s) = \frac{8s+6}{s^2+3s+2}$.

Solução:

Passo 1: Fatorar o denominador:

$$s^2 + 3s + 2 = (s + 1)(s + 2)$$

↪ $p_1 = -1, p_2 = -2 \Rightarrow$ polos distintos

Passo 2: Expansão em frações parciais

$$X(s) = \frac{k_1}{s - p_1} + \frac{k_2}{s - p_2} = \frac{-2}{s - 1} + \frac{10}{s - 2}$$

Passo 3: Transformada inversa de Laplace

$$y(t) = (-2e^{-t} + 10e^{-2t})u(t)$$

Frações Parciais com Polos Múltiplos

Suponha que $X(s)$ possua um polo $s = -p_1$ de **multiplicidade** r . Então $X(s)$ pode ser escrito como

$$X(s) = \frac{P_1(s)}{Q_1(s)(s+p_1)^r} = \frac{K_{11}}{s+p_1} + \frac{K_{12}}{(s+p_1)^2} + \cdots + \frac{K_{1r}}{(s+p_1)^r} + \cdots \quad (6)$$

Cálculo dos resíduos:

$$K_{1r} = \left[(s+p_1)^r X(s) \right]_{s=-p_1},$$

$$K_{1,r-1} = \left. \frac{d}{ds} \left[(s+p_1)^r X(s) \right] \right|_{s=-p_1}$$

$$2! K_{1,r-2} = \left. \frac{d^2}{ds^2} \left[(s+p_1)^r X(s) \right] \right|_{s=-p_1},$$

$$3! K_{1,r-2} = \left. \frac{d^3}{ds^3} \left[(s+p_1)^r X(s) \right] \right|_{s=-p_1}$$

Fórmula Geral para Polos Múltiplos

$$K_{1j} = \frac{1}{(r-j)!} \left. \frac{d^{r-j}}{ds^{r-j}} \left[(s+p_1)^r X(s) \right] \right|_{s=-p_1}, \quad j = 1, 2, \dots, r$$

Polos Múltiplos – Transformada Inversa

Uma vez obtidos os resíduos, usa-se o par de transformadas:

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s+a)^{n+1}}\right] = \frac{t^n}{n!} e^{-at} u(t)$$

Portanto, para cada termo da fração parcial associada ao polo repetido $s = -p_1$:

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{K_{1j}}{(s+p_1)^j}\right] = K_{1j} \frac{t^{j-1}}{(j-1)!} e^{-p_1 t} u(t), \quad j = 1, 2, \dots, r$$

Dica de Implementação

- Comece calculando K_{1r} (polo de maior ordem): equação algébrica simples.
- Em seguida, $K_{1,r-1}, K_{1,r-2}, \dots$ requerem derivadas sucessivas.
- Os demais polos *simples* são calculados normalmente após o polo repetido.

Exemplo: Polos Múltiplos

Problema: Determine a função do tempo $x(t) = \mathcal{L}^{-1}[X(s)]$ para

$$X(s) = \frac{10(s+3)}{(s+1)^3(s+2)}.$$

Expansão em frações parciais:

$$X(s) = \frac{K_{11}}{s+1} + \frac{K_{12}}{(s+1)^2} + \frac{K_{13}}{(s+1)^3} + \frac{10}{s+2} = \frac{10}{s+1} - \frac{10}{(s+1)^2} + \frac{20}{(s+1)^3} - \frac{10}{s+2}$$

$$K_2 = \left[(s+2) X(s) \right]_{s=-2}, \quad (s+1)^3 X(s) = \frac{10(s+3)}{s+2}$$

$$K_{13} = \left[(s+1)^3 X(s) \right]_{s=-1} = 20, \quad K_{12} = \left. \frac{d}{ds} [(s+1)^3 X(s)] \right|_{s=-1} = -10$$

$$K_{1,1} = \frac{1}{2} \left. \frac{d^2}{ds^2} [(s+1)^3 X(s)] \right|_{s=-1} = 10$$

Solução: $x(t) = \left(10e^{-t} - 10t e^{-t} + 10t^2 e^{-t} - 10e^{-2t} \right) u(t)$

Polos Complexos Conjugados

Suponha que $X(s)$ possua um **par de polos complexos conjugados** $s = -\alpha \pm j\beta$. A expansão é:

$$X(s) = \frac{P_1(s)}{Q_1(s)(s + \alpha - j\beta)(s + \alpha + j\beta)} = \frac{K_1}{s + \alpha - j\beta} + \frac{K_1^*}{s + \alpha + j\beta} + \dots \quad (7)$$

O coeficiente K_1 é um número complexo e calculado pelo mesmo procedimento dos polos simples:

$$K_1 = \left[(s + \alpha - j\beta) X(s) \right]_{s = -\alpha + j\beta}, \quad \Rightarrow \quad K_1 = |K_1| e^{j\theta}, \quad K_1^* = |K_1| e^{-j\theta} \quad (8)$$

Substituindo em (8) em (7):

$$X(s) = \frac{|K_1| e^{j\theta}}{s + \alpha - j\beta} + \frac{|K_1| e^{-j\theta}}{s + \alpha + j\beta} + \dots$$

Polos Complexos Conjugados – Transformada Inversa

A transformada inversa do par de termos é:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{|K_1|e^{j\theta}}{s+\alpha-j\beta} + \frac{|K_1|e^{-j\theta}}{s+\alpha+j\beta}\right] &= |K_1|e^{j\theta}e^{-(\alpha-j\beta)t} + |K_1|e^{-j\theta}e^{-(\alpha+j\beta)t} \\ &= |K_1|e^{-\alpha t}\left[e^{j(\beta t+\theta)} + e^{-j(\beta t+\theta)}\right]\end{aligned}$$

Usando $\cos \phi = \frac{e^{j\phi} + e^{-j\phi}}{2}$:

Transformada Inversa para Polos Conjugados

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{K_1}{s+\alpha-j\beta} + \frac{K_1^*}{s+\alpha+j\beta}\right] = 2|K_1|e^{-\alpha t}\cos(\beta t + \theta)u(t)$$

Propriedades da Transformada de Laplace

As propriedades da Transformada de Laplace facilitam:

- Cálculo de transformadas de sinais complexos
- Cálculo de transformadas inversas
- Análise de sistemas lineares
- Solução de equações diferenciais

Principais propriedades:

- 1 Deslocamento no tempo
- 2 Deslocamento na frequência
- 3 Diferenciação no tempo
- 4 Integração no tempo
- 5 Escalamento
- 6 Convolução
- 7 Teoremas do valor inicial e final

Propriedade de Deslocamento no Tempo

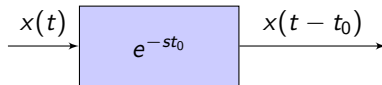
Deslocamento no Tempo

Se $x(t) \Leftrightarrow X(s)$, então:

$$x(t - t_0)u(t - t_0) \Leftrightarrow e^{-st_0}X(s), \quad t_0 > 0$$

Interpretação:

- Um atraso de t_0 segundos no domínio do tempo
- Corresponde a multiplicar por e^{-st_0} no domínio de s
- O termo $u(t - t_0)$ garante causalidade do sinal atrasado



Prova: Por mudança de variável na integral de Laplace.

Exemplo 4.5: Deslocamento no Tempo

Determine a Transformada de Laplace do pulso retangular:

$$x(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t \leq T \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Solução: Podemos escrever:

$$x(t) = u(t) - u(t - T)$$

Aplicando linearidade e deslocamento no tempo:

$$\begin{aligned} X(s) &= \mathcal{L}\{u(t)\} - \mathcal{L}\{u(t - T)\} = \frac{1}{s} - e^{-sT} \frac{1}{s} \\ &= \frac{1 - e^{-sT}}{s} \end{aligned}$$

Resultado

$$x(t) = u(t) - u(t - T) \Leftrightarrow \frac{1 - e^{-sT}}{s}$$

Exemplo: Transformada Inversa com Atraso

Determine $x(t)$ se $X(s) = \frac{e^{-2s}}{s(s+1)}$.

Solução:

Passo 1: Identificar o termo de atraso e^{-2s} (atraso de 2 segundos).

Passo 2: Separar:

$$X(s) = e^{-2s} \cdot \frac{1}{s(s+1)} = e^{-2s} Y(s)$$

onde $Y(s) = \frac{1}{s(s+1)}$.

Passo 3: Expandir $Y(s)$ em frações parciais:

$$Y(s) = \frac{1}{s(s+1)} = \frac{1}{s} - \frac{1}{s+1}$$

Passo 4: Transformada inversa:

$$y(t) = (1 - e^{-t})u(t)$$

Passo 5: Aplicar deslocamento:

$$x(t) = y(t-2) = (1 - e^{-(t-2)})u(t-2)$$

Propriedade de Deslocamento na Frequência

Deslocamento na Frequência

Se $x(t) \Leftrightarrow X(s)$, então:

$$e^{s_0 t} x(t) \Leftrightarrow X(s - s_0)$$

Interpretação:

- Multiplicar por $e^{s_0 t}$ no tempo
- Corresponde a deslocar $X(s)$ por s_0 no plano s
- Útil para sinais modulados exponencialmente

Prova:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{e^{s_0 t} x(t)\} &= \int_0^{\infty} e^{s_0 t} x(t) e^{-st} dt \\ &= \int_0^{\infty} x(t) e^{-(s-s_0)t} dt = X(s - s_0)\end{aligned}$$

Exemplo 4.6: Deslocamento na Frequência

Obtenha o par 9a da Tabela 4.1 a partir do par 8a usando deslocamento na frequência.

Dado: Par 8a: $\cos(\omega_0 t)u(t) \Leftrightarrow \frac{s}{s^2 + \omega_0^2}$

Objetivo: Encontrar $\mathcal{L}\{e^{-at} \cos(\omega_0 t)u(t)\}$

Solução: Aplicando a propriedade de deslocamento na frequência com $s_0 = -a$:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{e^{-at} \cos(\omega_0 t)u(t)\} &= X(s - (-a)) = X(s + a) \\ &= \frac{s + a}{(s + a)^2 + \omega_0^2}\end{aligned}$$

Resultado (Par 9a)

$$e^{-at} \cos(\omega_0 t)u(t) \Leftrightarrow \frac{s + a}{(s + a)^2 + \omega_0^2}$$

Propriedade de Diferenciação no Tempo

Diferenciação no Tempo

Se $x(t) \Leftrightarrow X(s)$, então:

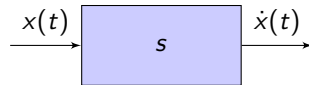
$$\frac{dx(t)}{dt} \Leftrightarrow sX(s) - x(0^-)$$

Para a n -ésima derivada:

$$\frac{d^n x(t)}{dt^n} \Leftrightarrow s^n X(s) - s^{n-1}x(0^-) - s^{n-2}x'(0^-) - \dots - x^{(n-1)}(0^-)$$

Caso especial - Condições iniciais nulas:

$$\boxed{\frac{d^n x(t)}{dt^n} \Leftrightarrow s^n X(s)}$$



Importância: Fundamental para resolver equações diferenciais!

Prova: Diferenciação no Tempo

Prova da propriedade $\frac{dx(t)}{dt} \Leftrightarrow sX(s) - x(0^-)$:

Por definição:

$$\mathcal{L} \left\{ \frac{dx(t)}{dt} \right\} = \int_0^{\infty} \frac{dx(t)}{dt} e^{-st} dt$$

Integrando por partes ($u = e^{-st}$, $dv = \frac{dx(t)}{dt} dt$):

$$\begin{aligned} &= [x(t)e^{-st}]_0^{\infty} - \int_0^{\infty} x(t)(-s)e^{-st} dt \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} [x(t)e^{-st}] - x(0^-) + s \int_0^{\infty} x(t)e^{-st} dt \end{aligned}$$

Para convergência, $x(t)e^{-st} \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow \infty$. Logo:

$$= -x(0^-) + sX(s) = sX(s) - x(0^-)$$

A aplicação repetida desse procedimento resulta na fórmula para $d^n x/dt^n$.

Exemplo 4.7: Diferenciação no Tempo

Determine a Transformada de Laplace de um pulso triangular usando diferenciação.

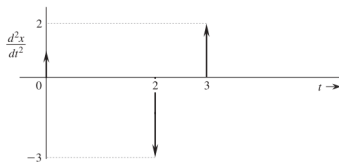
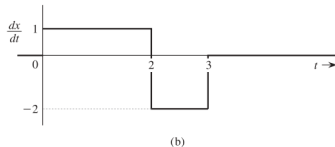
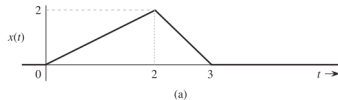


Figura: Determinação da transformada de Laplace de uma função linear por partes usando a propriedade de diferenciação no tempo. Fonte: Lathi, 2006.

Exemplo 4.7: Diferenciação no Tempo

Determine a Transformada de Laplace de um pulso triangular usando diferenciação.

Observação: A segunda derivada contém impulsos nas descontinuidades!

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \delta(t) - 3\delta(t-2) + 2\delta(t-3)$$

Transformada:

$$s^2X(s) = 1 - 3e^{-2s} + 2e^{-3s}$$

$$X(s) = \frac{1 - 3e^{-2s} + 2e^{-3s}}{s^2}$$

Propriedade de Integração no Tempo

Integração no Tempo

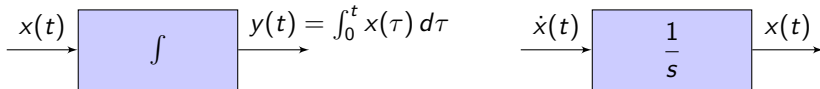
Se $x(t) \Leftrightarrow X(s)$, então:

$$\int_{0^-}^t x(\tau) d\tau \Leftrightarrow \frac{X(s)}{s}$$

Para integração a partir de $t = -\infty$:

$$\int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau \Leftrightarrow \frac{X(s)}{s} + \frac{\int_{0^-}^t x(\tau) d\tau}{s}$$

Interpretação: Integração no tempo $\Leftrightarrow$ Divisão por s em frequência



Exemplo: Integração no Tempo

Determine $\mathcal{L}\{tu(t)\}$ usando a propriedade de integração.

Solução:

Sabemos que $u(t) \Leftrightarrow \frac{1}{s}$.

Note que:

$$tu(t) = \int_0^t u(\tau) d\tau$$

Aplicando a propriedade de integração:

$$\mathcal{L}\{tu(t)\} = \frac{1}{s} \cdot \frac{1}{s} = \frac{1}{s^2}$$

Resultado

$$tu(t) \Leftrightarrow \frac{1}{s^2}$$

Aplicação repetida: $t^n u(t) \Leftrightarrow \frac{n!}{s^{n+1}}$

Propriedade de Escalamento

Escalamento no Tempo

Se $x(t) \Leftrightarrow X(s)$, então para $a > 0$:

$$x(at) \Leftrightarrow \frac{1}{a} X\left(\frac{s}{a}\right)$$

Interpretação:

- Compressão no tempo por fator a (sinal mais rápido)
- Causa expansão na escala s pelo mesmo fator
- E vice-versa: expansão no tempo $\Leftrightarrow$ compressão em s

Observação: Requer $a > 0$ para manter causalidade.

Exemplo: Se $e^{-t}u(t) \Leftrightarrow \frac{1}{s+1}$, então:

$$e^{-2t}u(t) = e^{-t}u(t) \Big|_{t \rightarrow 2t} \Leftrightarrow \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\frac{s}{2} + 1} = \frac{1}{s+2}$$

Propriedades de Convolução

Convolução no Tempo

Se $x_1(t) \Leftrightarrow X_1(s)$ e $x_2(t) \Leftrightarrow X_2(s)$, então:

$$x_1(t) * x_2(t) \Leftrightarrow X_1(s)X_2(s)$$

Convolução na Frequência

$$x_1(t)x_2(t) \Leftrightarrow \frac{1}{2\pi j} X_1(s) * X_2(s)$$

Importância crucial:

- Convolução no tempo $\rightarrow$ **Multiplificação** em s
- Base da análise de sistemas lineares!
- Resposta $y(t)$ do sistema com resposta ao impulso $h(t)$ à uma entrada $x(t)$: $Y(s) = H(s)X(s)$

Exemplo 4.8: Convolução

Usando a propriedade de convolução, determine:

$$c(t) = e^{at} u(t) * e^{bt} u(t)$$

Solução:

Sabe-se que $\mathcal{L}\{e^{at} u(t)\} = \frac{1}{s-a}$ e $\mathcal{L}\{e^{bt} u(t)\} = \frac{1}{s-b}$

Pela propriedade de convolução:

$$C(s) = \frac{1}{s-a} \cdot \frac{1}{s-b} = \frac{1}{(s-a)(s-b)}$$

Expandindo em frações parciais (se $a \neq b$):

$$C(s) = \frac{1}{a-b} \left[\frac{1}{s-a} - \frac{1}{s-b} \right]$$

Transformada inversa:

$$c(t) = \frac{1}{a-b} (e^{at} - e^{bt}) u(t), \quad a \neq b$$

Tabela: Propriedades da Transformada de Laplace

Propriedade	$x(t)$	$X(s)$
Linearidade	$a_1x_1(t) + a_2x_2(t)$	$a_1X_1(s) + a_2X_2(s)$
Deslocamento no tempo	$x(t - t_0)u(t - t_0)$	$e^{-st_0}X(s)$
Deslocamento na freq.	$e^{s_0t}x(t)$	$X(s - s_0)$
Diferenciação no tempo	$\frac{dx(t)}{dt}$	$sX(s) - x(0^-)$
	$\frac{d^n x}{dt^n}$	$s^n X(s) - s^{n-1}x(0^-) - \dots - x^{(n-1)}(0^-)$
Integração no tempo	$\int_{0^-}^t x(\tau) d\tau$	$\frac{X(s)}{s}$
Escalamento	$x(at), a > 0$	$\frac{1}{a}X\left(\frac{s}{a}\right)$
Convolução no tempo	$x_1(t) * x_2(t)$	$X_1(s)X_2(s)$
Convolução na freq.	$x_1(t)x_2(t)$	$\frac{1}{2\pi j}[X_1(s) * X_2(s)]$
Diferenciação na freq.	$tx(t)$	$-\frac{dX(s)}{ds}$
Integração na freq.	$\frac{x(t)}{t}$	$\int_s^\infty X(\sigma) d\sigma$

Função transferência e autofunção de um sistema

Revisando: Para sistemas LCIT, a exponencial e^{st} (onde s é complexo) é uma função especial chamada de função característica (ou **autofunção**) do sistema.

● Se a entrada é $x(t) = e^{st}$ para $-\infty < t < \infty$ (**duração infinita**) e as condições iniciais são nulas, então:

$$y(t) = h(t) * e^{st} = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{s(t-\tau)} d\tau = \left(\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{-s\tau} d\tau \right) e^{st} = H(s) e^{st}$$

Logo,

$$\boxed{x(t) = e^{st} \Rightarrow y(t) = H(s) e^{st}} \quad (9)$$

em que

$$\boxed{H(s) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{-s\tau} d\tau} \quad (10)$$

$H(s)$ é chamada de **função de transferência** do sistema.

Função de Transferência

Definição Alternativa:

$$H(s) = \frac{\text{Resposta para entrada } e^{st}}{\text{Entrada } e^{st}}, \quad t \in \mathbb{R} \quad (11)$$

Para uma equação diferencial:

$$\begin{aligned} Q(p)y(t) &= P(p)x(t) \\ Q(p)H(s)e^{st} &= P(p)e^{st} \\ H(s)Q(s)e^{st} &= P(s)e^{st} \\ H(s)Q(s) &= P(s) \end{aligned}$$

A **função de transferência** é:

$$\boxed{H(s) = \frac{P(s)}{Q(s)}} \quad (12)$$

Função de Transferência: interpretação

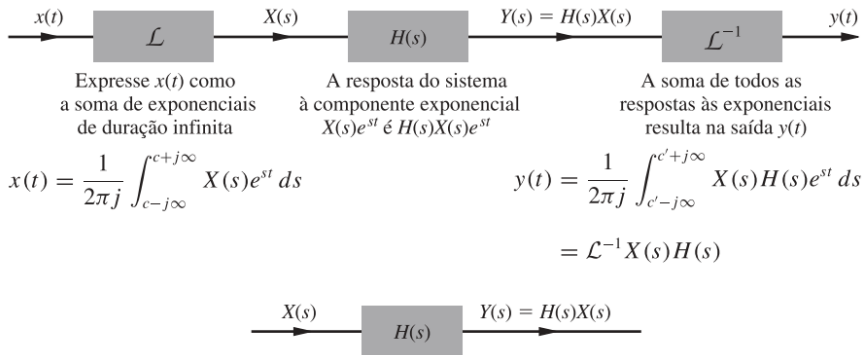


Figura: Interpretação alternativa da transformada de Laplace.

Aplicação: Função de Transferência

Para um sistema LCIT com resposta ao impulso $h(t)$:

$$y(t) = x(t) * h(t)$$

Aplicando a Transformada de Laplace:

$$Y(s) = X(s)H(s)$$

Função de Transferência

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \mathcal{L}\{h(t)\}$$

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{\mathcal{L}\{\text{resposta de estado nula}\}}{\mathcal{L}\{\text{entrada}\}}$$

Propriedades:

- $H(s)$ caracteriza completamente o sistema (estado nulo)
- Relaciona entrada e saída no domínio s
- Se o sistema for causal $\rightsquigarrow h(t)$ é causal e $H(s)$ é obtido pela transformada unilateral
- Se o sistema for não causal $\rightsquigarrow h(t)$ é não causal e $H(s)$ é obtido pela transformada bilateral

$$H(s) = \frac{P(s)}{Q(s)}$$

- Raízes de $P(s)$ $\rightsquigarrow$ zeros de $H(s)$ afetam resposta em frequência
- Raízes de $Q(s)$ $\rightsquigarrow$ polos de $H(s)$: determinam estabilidade

Exemplo: Função de Transferência

Problema: Determine $H(s)$ para o sistema descrito por:

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 3\frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = \frac{dx(t)}{dt} + x(t) \quad (13)$$

Solução: Utilizando a notação do operador p :

$$(p^2 + 3p + 2)y(t) = (p + 1)x(t) \quad (14)$$

Portanto:

$$H(s) = \frac{s + 1}{s^2 + 3s + 2} = \frac{s + 1}{(s + 1)(s + 2)} = \frac{1}{s + 2} \quad (15)$$

Resposta ao impulso:

$$h(t) = e^{-2t}u(t) \quad (16)$$

Exemplo: Função de Transferência

Problema: Determine $h(s)$ e a edo a partir de

$$\frac{Y(s)}{X(s)} = H(s) = \frac{s}{s^2 + 3s + 2}$$

Solução:

$$H(s) = \frac{-1}{s+1} + \frac{2}{s+2} \Rightarrow h(t) = -e^{-t}u(t) + 2e^{-2t}u(t)$$

Equação diferencial do sistema:

$$\begin{aligned} \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{s}{s^2 + 3s + 2} &\Rightarrow sX(s) = s^2Y(s) + 3sY(s) + 2Y(s) \\ \Rightarrow \frac{d^2y(t)}{dt^2} + 3\frac{y(t)}{dt} + 2y(t) &= \frac{dx(t)}{dt} \end{aligned}$$

Teorema do Valor Inicial

Teorema do Valor Inicial

Se $x(t)$ e $\frac{dx(t)}{dt}$ possuem Transformada de Laplace, então:

$$x(0^+) = \lim_{s \rightarrow \infty} sX(s)$$

desde que o limite exista.

Condição de aplicação:

- Válido se $x(t)$ é causal e não contém singularidades (ex: impulso) em $t = 0$
- Aplica-se apenas se $X(s)$ for **estritamente própria** ($M < N$)
- Se $M \geq N$, usar divisão longa primeiro

Utilidade:

- Determinar valor inicial de $x(t)$ sem calcular $\mathcal{L}^{-1}\{X(s)\}$
- Verificar resultados de transformadas inversas

Teorema do Valor Final

Teorema do Valor Final

Se $x(t)$ e $\frac{dx(t)}{dt}$ possuem Transformada de Laplace, então:

$$x(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sX(s)$$

desde que $sX(s)$ não possua polos no SPD (semiplano direito) ou no eixo imaginário.

Condições de aplicação:

- Válido se $x(t)$ é causal e $\lim_{t \rightarrow \infty} |x(t)| < \infty$
- Todos os polos de $sX(s)$ devem estar no SPE (semiplano esquerdo)
- Pólo na origem ($s = 0$) é permitido
- Não aplicar se houver polos no eixo $j\omega$ ou SPD

Utilidade:

- Determinar comportamento em regime permanente
- Análise de estabilidade

Exemplo 4.9: Valores Inicial e Final

Exemplo

Determine o valor inicial de $y(t)$:

$$Y(s) = \frac{3s^2 + 10s + 10}{s^3 + 6s^2 + 11s + 6}$$

Solução:

Valor inicial:

$$\begin{aligned} y(0^+) &= \lim_{s \rightarrow \infty} sY(s) = \lim_{s \rightarrow \infty} s \cdot \frac{3s^2 + 10s + 10}{s^3 + 6s^2 + 11s + 6} \\ &= \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{3s^3 + 10s^2 + 10s}{s^3 + 6s^2 + 11s + 6} = 3 \end{aligned}$$

Exemplo 4.9: Valores Inicial e Final

Exemplo

Determine o valor final de $y(t)$:

$$Y(s) = \frac{3s^2 + 10s + 10}{s^3 + 6s^2 + 11s + 6}$$

Solução:

Valor final: Verificar polos de $sY(s)$:

$$sY(s) = \frac{3s^3 + 10s^2 + 10s}{s^3 + 6s^2 + 11s + 6}$$

Polos de $Y(s)$: raízes de $s^3 + 6s^2 + 11s + 6 = (s + 1)(s + 2)(s + 3) = 0$

Todos no SPE ($s = -1, -2, -3$) $\rightsquigarrow$ Teorema Valor Final aplica-se!

$$y(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} sY(s) = \frac{0}{6} = 0$$

Exemplo MATLAB: Propriedades da Transformada

```
1 % Verificacao das propriedades no MATLAB/Octave
2 syms t s a omega real
3
4 % Sinal original
5 x = exp(-a*t);
6 X = laplace(x, t, s);
7
8 % Propriedade: Deslocamento no tempo
9 t0 = 2;
10 x_shifted = subs(x, t, t-t0); % x(t-t0)
11 X_shifted_calc = exp(-s*t0)*X; % e^{-st0}*X(s)
12 X_shifted_laplace = laplace(x_shifted*heaviside(t-t0), t, s);
13 simplify(X_shifted_calc - X_shifted_laplace) % Verificar = 0
14
15 % Propriedade: Diferenciacao no tempo
16 dx = diff(x, t);
17 dX_calc = s*X - subs(x, t, 0); % sX(s) - x(0-)
18 dX_laplace = laplace(dx, t, s);
19 simplify(dX_calc - dX_laplace) % Verificar = 0
20
21 % Propriedade: Valor inicial
22 x_0 = limit(s*X, s, inf)
23
24 % Propriedade: Valor final
25 x_inf = limit(s*X, s, 0)
```

Exercício Resolvido 1

Determine a Transformada de Laplace de $x(t) = t^2 e^{-3t} \cos(2t) u(t)$.

Solução: Aplicar propriedades em sequência.

Passo 1: Começar com $\cos(2t)u(t) \Leftrightarrow \frac{s}{s^2+4}$

Passo 2: Deslocamento na frequência ($s_0 = -3$):

$$e^{-3t} \cos(2t) u(t) \Leftrightarrow \frac{s+3}{(s+3)^2+4}$$

Passo 3: Diferenciação na frequência ($tx(t) \rightarrow -\frac{dX}{ds}$):

$$te^{-3t} \cos(2t) u(t) \Leftrightarrow -\frac{d}{ds} \left[\frac{s+3}{(s+3)^2+4} \right]$$

Passo 4: Aplicar diferenciação novamente para $t^2 x(t)$.

Resultado: Expressão complexa (calcular derivadas).

Exercício Resolvido 2

Determine $x(t)$ se $X(s) = \frac{5s+3}{s^2+4s+3}$.

Solução:

Passo 1: Fatorar denominador:

$$s^2 + 4s + 3 = (s + 1)(s + 3)$$

Passo 2: Expansão em frações parciais:

$$X(s) = \frac{5s + 3}{(s + 1)(s + 3)} = \frac{k_1}{s + 1} + \frac{k_2}{s + 3}$$

Passo 3: Calcular resíduos:

$$k_1 = [(s + 1)X(s)]_{s=-1} = \frac{5(-1) + 3}{-1 + 3} = \frac{-2}{2} = -1$$

$$k_2 = [(s + 3)X(s)]_{s=-3} = \frac{5(-3) + 3}{-3 + 1} = \frac{-12}{-2} = 6$$

Passo 4: Transformada inversa:

$$x(t) = (-e^{-t} + 6e^{-3t})u(t)$$

Exercício Proposto 1

Determine a Transformada de Laplace dos seguintes sinais:

① $x_1(t) = (3 + 2t - 5t^2)u(t)$

② $x_2(t) = e^{-2t} \text{sen}(3t)u(t)$

③ $x_3(t) = te^{-t} \cos(2t)u(t)$

④ $x_4(t) = [u(t) - u(t - 2)]e^{-t}$

⑤ $x_5(t) = \int_0^t e^{-\tau} \text{sen}(\tau) d\tau$

Dica: Use as propriedades estudadas (linearidade, deslocamento, diferenciação, integração).

Exercício Proposto 2

Determine a transformada inversa de Laplace:

$$1 \quad X_1(s) = \frac{2s+5}{s^2+5s+6}$$

$$2 \quad X_2(s) = \frac{s+2}{(s+1)(s^2+4)}$$

$$3 \quad X_3(s) = \frac{e^{-3s}}{s(s+2)}$$

$$4 \quad X_4(s) = \frac{s^2+2s+5}{s^3+3s^2+2s}$$

$$5 \quad X_5(s) = \frac{1-e^{-2s}}{s^2}$$

Dica: Use frações parciais e propriedade de deslocamento no tempo quando necessário.

Exercício Proposto 3

Para cada $Y(s)$ abaixo, determine os valores inicial e final de $y(t)$ (quando aplicável):

① $Y_1(s) = \frac{10}{s(s+2)(s+5)}$

② $Y_2(s) = \frac{5s}{(s+1)(s+3)}$

③ $Y_3(s) = \frac{s+2}{s^2+4s+4}$

④ $Y_4(s) = \frac{s}{s^2+1}$ (*Cuidado com este!*)

Verifique:

- O teorema do valor inicial é aplicável?
- O teorema do valor final é aplicável?
- Existe polo no eixo imaginário ou SPD?

Aplicação: Análise de Circuito Elétrico

A Transformada de Laplace simplifica análise de circuitos RLC:

Impedâncias no domínio s :

- Resistor: $Z_R(s) = R$
- Indutor: $Z_L(s) = sL$
- Capacitor: $Z_C(s) = \frac{1}{sC}$

Vantagens:

- Equações diferenciais $\rightarrow$ Equações algébricas
- Lei de Ohm generalizada: $V(s) = Z(s)I(s)$
- Facilita análise de transitórios
- Inclui condições iniciais automaticamente

Tópico da próxima aula: Análise e solução de equações diferenciais usando Laplace.

Principais conceitos estudados:

- ➊ **Motivação:** Laplace como generalização de Fourier
 - Frequência complexa $s = \sigma + j\omega$
 - Funciona para sinais que crescem exponencialmente
- ➋ **Transformada de Laplace:**
 - Bilateral: para sinais gerais (RDC importante!)
 - Unilateral: para sinais causais (mais prática)
- ➌ **Propriedades fundamentais:**
 - Linearidade, deslocamento (tempo/frequência)
 - Diferenciação e integração
 - Convolução (crucial para sistemas!)
 - Teoremas dos valores inicial e final
- ➍ **Transformada inversa:** Frações parciais

Bibliografia principal:

- **LATHI, B. P.** *Sinais e Sistemas Lineares*. 2ª ed. Porto Alegre: Bookman, 2006.
 - Capítulo 4, Seções 4.1 e 4.2, páginas 307-334
- **OPPENHEIM, A. V.; WILLSKY, A. S.; NAWAB, S. H.** *Signals & Systems*. 2nd ed. Upper Saddle River: Prentice Hall, 1997.
 - Chapter 9: The Laplace Transform