

ENE0067 – Sinais e Sistemas em Tempo Contínuo

Análise de Sistemas em Tempo Contínuo usando a Transformada de Laplace:
Solução de Equações Diferenciais, Diagramas de Blocos e Sistemas de Controle (parte 2)

Prof. Eduardo Stockler Tognetti

Departamento de Engenharia Elétrica
Universidade de Brasília – UnB



Sumário da Aula

- 1 Solução de Equações Diferenciais
- 2 Resposta de Estado Nulo e Função de Transferência
- 3 Sistemas de 1ª ordem e 2ª ordem
- 4 Estabilidade
- 5 Diagrama de blocos - associações e álgebra
- 6 Aplicação em Realimentação e Controle
- 7 Exemplo: solução de EDO por Transformada de Laplace
 - Aplicação da Transformada de Laplace
 - Componente de Entrada Nula
 - Componente de Estado Nulo
 - Resposta Total
 - Quadro Comparativo das Componentes
 - Implementação MATLAB/Octave
 - Exercício Proposto

Solução de Equações Diferenciais com Transformada de Laplace

Objetivo

A propriedade de diferenciação no tempo da transformada de Laplace permite resolver equações diferenciais lineares com coeficientes constantes de forma sistemática.

$$\frac{d^N y}{dt^N} + a_{N-1} \frac{d^{N-1} y}{dt^{N-1}} + \cdots + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y(t) = b_M \frac{d^M x}{dt^M} + b_{M-1} \frac{d^{M-1} x}{dt^{M-1}} + \cdots + b_1 \frac{dx}{dt} + b_0 x(t)$$
$$Q(p)y(t) = P(p)x(t)$$

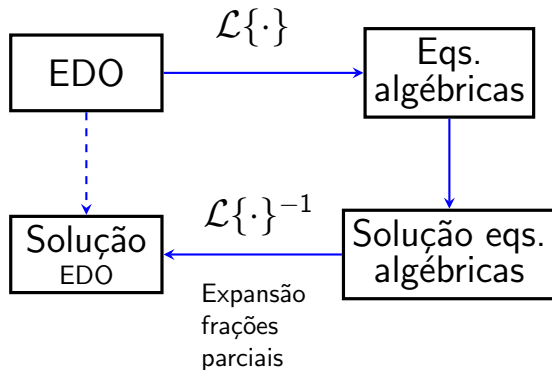
Propriedade chave (condições iniciais nulas):

$$\frac{d^k y}{dt^k} \iff s^k Y(s) \Rightarrow Q(s)Y(s) = P(s)X(s) \Rightarrow Y(s) = H(s)X(s), \quad H(s) = \frac{P(s)}{Q(s)}$$

A função de transferência pode também ser definida como

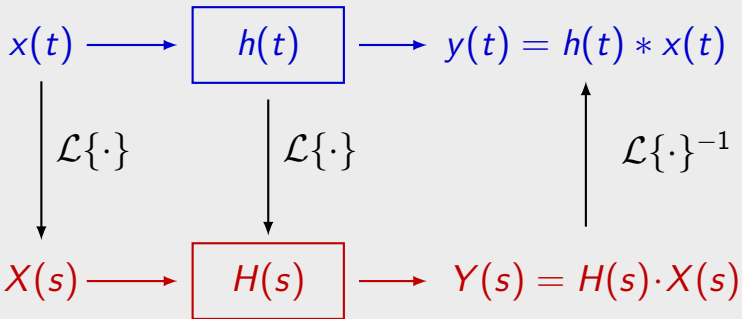
$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \left. \frac{\mathcal{L}\{\text{entrada}\}}{\mathcal{L}\{\text{saída}\}} \right|_{CI=0}$$

Solução de EDOs via Transformada de Laplace



Solução de EDO para condições iniciais nulas via Laplace

Domínio do tempo



Domínio da frequência

Procedimento para Solução

● Vantagem Principal:

- A transformada de Laplace converte equações diferenciais em equações algébricas
- O procedimento é genérico e aplicável a qualquer ordem

● Procedimento:

- 1 Aplicar a transformada de Laplace à equação diferencial
- 2 Usar as propriedades de diferenciação e as condições iniciais
- 3 Resolver algebricamente para $Y(s)$
- 4 Aplicar a transformada inversa de Laplace para obter $y(t)$

Propriedade de Diferenciação

Se $y(t) \iff Y(s)$, então:

$$\frac{dy}{dt} \iff sY(s) - y(0^-)$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} \iff s^2Y(s) - sy(0^-) - \dot{y}(0^-)$$

Exemplo 1: Equação Diferencial de Primeira Ordem

Problema: Resolva a equação diferencial

$$\frac{dy}{dt} + 3y(t) = 5e^{-2t}u(t)$$

com condição inicial $y(0^-) = 2$.

Solução:

Passo 1: Aplicar a transformada de Laplace:

$$sY(s) - y(0^-) + 3Y(s) = \frac{5}{s+2}$$

Passo 2: Substituir $y(0^-) = 2$:

$$sY(s) - 2 + 3Y(s) = \frac{5}{s+2}$$

Exemplo 1: Solução (continuação)

Passo 3: Agrupar termos de $Y(s)$:

$$(s + 3)Y(s) = 2 + \frac{5}{s + 2}$$

Passo 4: Resolver para $Y(s)$:

$$Y(s) = \frac{2}{s + 3} + \frac{5}{(s + 2)(s + 3)}$$

Passo 5: Expansão em frações parciais:

$$Y(s) = \frac{2}{s + 3} + \frac{5}{s + 2} - \frac{5}{s + 3} = \frac{5}{s + 2} - \frac{3}{s + 3}$$

Passo 6: Transformada inversa:

$$y(t) = (5e^{-2t} - 3e^{-3t})u(t)$$

Exemplo 2: Equação Diferencial de Segunda Ordem

Problema: Resolva

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 4\frac{dy}{dt} + 10y(t) = e^{-4t}u(t)$$

com condições iniciais $y(0^-) = 2$ e $\dot{y}(0^-) = 1$.

Passo 1: Aplicar a transformada de Laplace:

$$s^2Y(s) - sy(0^-) - \dot{y}(0^-) + 4[sY(s) - y(0^-)] + 10Y(s) = \frac{1}{s+4}$$

Passo 2: Substituir as condições iniciais:

$$s^2Y(s) - 2s - 1 + 4sY(s) - 8 + 10Y(s) = \frac{1}{s+4}$$

Exemplo 2: Solução (continuação)

Passo 3: Agrupar termos:

$$(s^2 + 4s + 10)Y(s) = 2s + 9 + \frac{1}{s + 4}$$

Passo 4: Resolver para $Y(s)$:

$$Y(s) = \frac{2s + 9}{s^2 + 4s + 10} + \frac{1}{(s + 4)(s^2 + 4s + 10)}$$

Análise das raízes: $s^2 + 4s + 10 = 0$

$$s = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 40}}{2} = -2 \pm j\sqrt{6}$$

Raízes complexas indicam resposta oscilatória amortecida!

Exemplo 2: Resultado Final

Após expansão em frações parciais e transformada inversa:

$$y(t) = \left[\frac{19}{10} e^{-2t} \cos(\sqrt{6}t) + \frac{13\sqrt{6}}{15} e^{-2t} \sin(\sqrt{6}t) + \frac{1}{10} e^{-4t} \right] u(t)$$

Observação Importante

A solução contém:

- Termos exponenciais amortecidos com oscilação ($e^{-2t} \cos(\sqrt{6}t)$ e $e^{-2t} \sin(\sqrt{6}t)$)
- Termo puramente exponencial (e^{-4t})
- Sistema estável (todos os polos no SPE)

Componentes de Entrada Nula e Estado Nulo

Resposta Total

A resposta total contém duas componentes:

- 1 **Resposta de Entrada Nula:** devido às condições iniciais
- 2 **Resposta de Estado Nulo:** devido à entrada

Para separar as componentes, identificamos:

$$Y(s) = \underbrace{\frac{\text{termos das CI}}{Q(s)}}_{\text{Entrada Nula}} + \underbrace{\frac{N_x(s)}{Q(s)}}_{\text{Estado Nulo}}$$

onde:

- CI = Condições Iniciais
- $Q(s)$ = polinômio característico
- $N_x(s)$ = termos devidos à entrada

Separação das Componentes no Exemplo 2

Para o Exemplo 2, temos:

$$Y(s) = \frac{2s + 9}{s^2 + 4s + 10} + \frac{1}{(s + 4)(s^2 + 4s + 10)}$$

Componente de Entrada Nula:

$$Y_{zi}(s) = \frac{2s + 9}{s^2 + 4s + 10}$$

Componente de Estado Nulo:

$$Y_{zs}(s) = \frac{1}{(s + 4)(s^2 + 4s + 10)}$$

Observe que $Y(s) = Y_{zi}(s) + Y_{zs}(s)$

Distinção Importante

- Condições iniciais são dadas em $t = 0^-$ (antes da entrada ser aplicada)
- A resposta total satisfaz condições em $t = 0^+$ (após aplicação da entrada)
- A resposta de entrada nula satisfaz condições em $t = 0^-$

Por quê a diferença?

- Em $t = 0^-$: apenas a resposta de entrada nula está presente
- A resposta de estado nulo resulta da entrada aplicada em $t = 0$
- Em $t = 0^+$: ambas as componentes estão presentes

No Exemplo 2: $y(0^-) = 2$, mas $y(0^+)$ pode ser diferente!

Script MATLAB: Solução de Equação Diferencial

```
1 % Exemplo 2: Equacao diferencial de segunda ordem
2 %  $d^2y/dt^2 + 4*dy/dt + 10*y = \exp(-4*t)u(t)$ 
3 % CI:  $y(0-) = 2$ ,  $dy/dt(0-) = 1$ 
4
5 clear; clc;
6
7 % Definir funcao de transferencia
8 num = [1]; % Numerador da entrada
9 den = [1 4 10]; % Denominador (eq. caracteristica)
10
11 % Adicionar termos das condicoes iniciais
12 %  $Y(s) = [2s + 9 + 1/(s+4)] / (s^2 + 4s + 10)$ 
13 num_total = [2 13 36]; %  $2s^2 + 13s + 36$ 
14 den_total = conv([1 4], [1 4 10]); %  $(s+4)(s^2+4s+10)$ 
15
16 % Resposta ao impulso do sistema
17 sys = tf(num_total, den_total);
18 [y, t] = impulse(sys, 5);
19
20 % Plotar resultado
21 plot(t, y, 'LineWidth', 2);
22 xlabel('Tempo (s)'); ylabel('y(t)');
23 title('Resposta da Equacao Diferencial');
24 grid on;
```

Circuitos Elétricos:

- Circuitos RLC
- Análise transitória
- Resposta em frequência

Sistemas Mecânicos:

- Sistema massa-mola-amortecedor
- Vibrações mecânicas
- Controle de posição

Sistemas de Controle:

- Controladores PID
- Servomecanismos
- Reguladores

Processamento de Sinais:

- Filtros analógicos
- Equalização
- Modelagem de sistemas

Resposta de Estado Nulo

Definição

A resposta de estado nulo é a resposta do sistema quando todas as condições iniciais são nulas (sistema inicialmente em repouso).

Para um sistema LCIT descrito por:

$$\sum_{k=0}^N a_k \frac{d^k y}{dt^k} = \sum_{k=0}^M b_k \frac{d^k x}{dt^k}$$

Com todas as CI = 0, aplicando a transformada de Laplace:

$$\sum_{k=0}^N a_k s^k Y(s) = \sum_{k=0}^M b_k s^k X(s)$$

$$Y(s) = \frac{\sum_{k=0}^M b_k s^k}{\sum_{k=0}^N a_k s^k} X(s)$$

Definição

A **função de transferência** $H(s)$ de um sistema LCIT é definida como:

$$H(s) = \left. \frac{Y(s)}{X(s)} \right|_{CI=0} = \frac{\sum_{k=0}^M b_k s^k}{\sum_{k=0}^N a_k s^k}$$

Propriedades importantes:

- $H(s)$ é a transformada de Laplace da resposta ao impulso $h(t)$
- $H(s)$ caracteriza completamente o sistema (para $CI = 0$)
- $Y(s) = H(s)X(s)$ (no domínio de Laplace)
- $y(t) = h(t) * x(t)$ (no domínio do tempo)

Exemplo: Determinação da Função de Transferência

Sistema:

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 4\frac{dy}{dt} + 10y(t) = x(t)$$

Solução:

Com $CI = 0$, aplicando a transformada de Laplace:

$$s^2 Y(s) + 4sY(s) + 10Y(s) = X(s)$$

$$(s^2 + 4s + 10)Y(s) = X(s)$$

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{1}{s^2 + 4s + 10}$$

Pólos: $s = -2 \pm j\sqrt{6}$ (no SPE $\Rightarrow$ sistema estável)

Sistemas de 1ª ordem

- Um sistema linear de 1ª ordem pode ser escrito na forma

$$\tau \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = Kx(t)$$

τ : constante de tempo [seg., min., hora]

K : ganho estático (estado estacionário) $\rightsquigarrow K = H(0)$

Se condições iniciais nulas ($y(0) = 0$ e $x(0) = 0$)

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{K}{\tau s + 1} \quad (\text{atraso de 1ª ordem})$$

Para $\frac{dy(t)}{dt} = Kx(t)$,

$$H(s) = \frac{K}{s} \quad (\text{integrador puro ou puramente capacitivo})$$

Resposta ao degrau de um sistema de 1ª ordem

- Seja a entrada degrau $u(t)$ de amplitude A

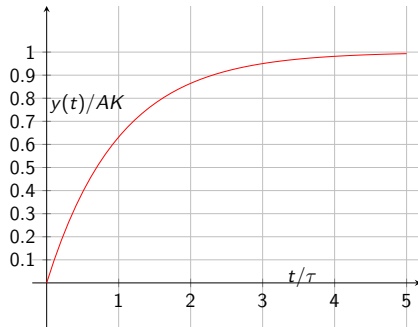
$$U(s) = \frac{A}{s} \rightsquigarrow Y(s) = H(s)U(s) = \frac{K}{\tau s + 1} \cdot \frac{A}{s} = \frac{AK}{s} - \frac{AK}{s + 1/\tau}$$

- Aplicando a transformada de Laplace inversa:

$$y(t) = AK \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right)$$

$$\begin{cases} y(0) = 0 \\ y(\tau) = 0,632 \cdot AK \\ y(t > 4\tau) \approx AK \\ y(\tau) = 63,2\% y(\infty) \end{cases}$$

Observe que $\frac{\Delta y}{\Delta u} = K$



Resposta ao degrau de amplitude A .

Sistemas de 2ª ordem

- Representação de sistemas de 2ª ordem na forma padrão:

$$H(s) = \frac{K\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2},$$

em que ζ é o fator de amortecimento e ω_n é a frequência natural não-amortecida (frequência que o sistema oscila quando não há amortecimento, $\zeta = 0$).

- Raízes da equação característica (polos de $H(s)$):

$$p_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$$

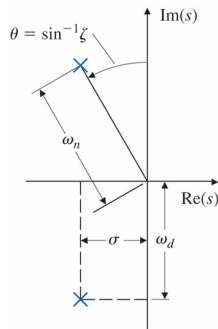
$$p_{1,2} = -\sigma \pm j\omega_d$$

$$\sigma = \zeta\omega_n$$

$$\omega_d = \omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$$

em que ω_d é a frequência de oscilação amortecida.

Casos importantes: $0 < \zeta < 1 \rightsquigarrow$ par polos complexos
 $\zeta \geq 1 \rightsquigarrow$ par polos reais



Par de polos complexos no plano-s.

Sistemas de 2ª ordem

- Exemplo: circuito RLC série

$$LC \frac{d^2 v_c(t)}{dt^2} + RC \frac{dv_c(t)}{dt} + v_c(t) = v(t) \Rightarrow \frac{d^2 v_c(t)}{dt^2} + 2\zeta\omega_n \frac{dv_c(t)}{dt} + \omega_n^2 v_c(t) = K\omega_n^2 v(t),$$

em que

$$\omega_n = \frac{1}{\sqrt{LC}}, \quad \zeta = \frac{R}{2} \sqrt{\frac{C}{L}}, \quad K = 1$$

- Função de transferência

$$\frac{V_c(s)}{V(s)} = \frac{K\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2},$$

- Para que o sistema seja subamortecido ($0 < \zeta < 1$):

$$R < 2\sqrt{\frac{L}{C}}$$

Sistemas de 2ª ordem

- Característica da resposta de sistemas de 2ª ordem á entrada degrau.

Amortecimento	Classificação	Resposta	Raízes
$\zeta > 1$	superamortecida	estável e monótona	2, reais
$\zeta = 1$	criticamente amortecida	estável e monótona	1, reais (iguais)
$0 < \zeta < 1$	subamortecida	estável e oscilatória	2, par complexo conjugado
$\zeta = 0$	não-amortecida	oscilação sustentável	2, par imaginário puro
$\zeta < 0$	instável	crescente	2, parte real positiva

Resposta subamortecida ao degrau

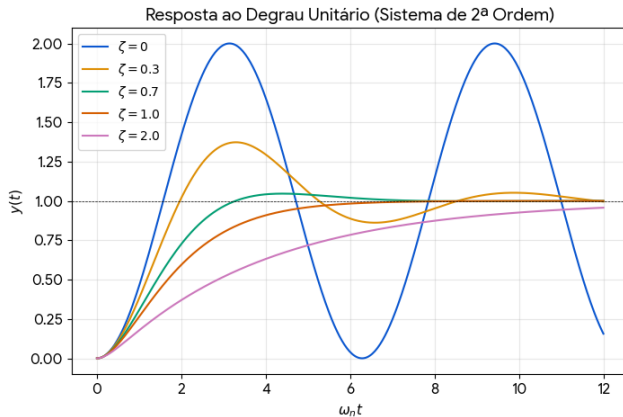


Figura: Resposta ao degrau unitário do sistema de 2ª ordem $H(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$ para diferentes valores de ζ

Resposta subamortecida ao degrau

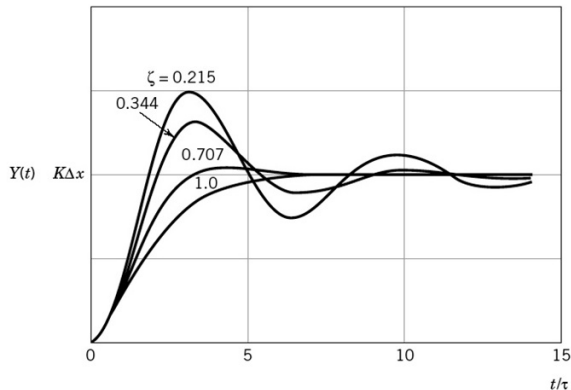


Figura: Efeito do coeficiente de amortecimento na resposta subamortecida ao degrau de amplitude Δx :

$$Y(s) = \frac{K\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \times \frac{\Delta x}{s}, \quad \tau = 1/\omega_n.$$

Critério de Estabilidade

Um sistema LCIT é **BIBO estável** (entrada limitada $\rightarrow$ saída limitada) se e somente se todos os polos de $H(s)$ estão no semiplano esquerdo (SPE).

Classificação:

- **Estável:** Todos os polos com $\text{Re}(s) < 0$
- **Marginalmente estável:** Pólos simples no eixo imaginário
- **Instável:** Pelo menos um polo com $\text{Re}(s) > 0$ ou polos múltiplos no eixo imaginário

Example

- $H(s) = \frac{1}{s+3} \Rightarrow$ Estável (polo em $s = -3$)
- $H(s) = \frac{1}{s^2+1} \Rightarrow$ Marginalmente estável (polos em $s = \pm j$)
- $H(s) = \frac{1}{s-2} \Rightarrow$ Instável (polo em $s = 2$)

Localização dos Pólos e Estabilidade

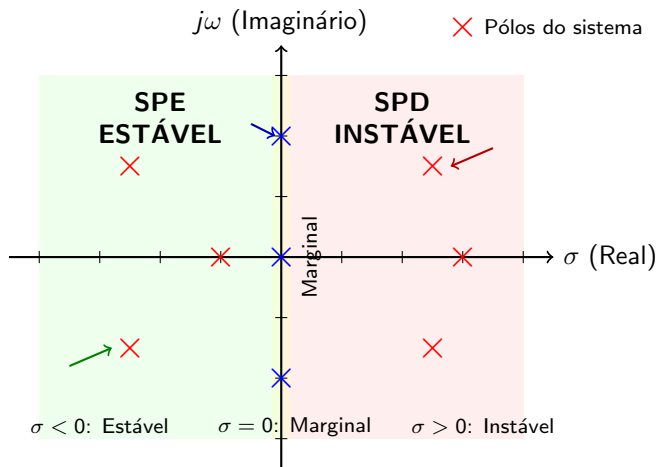


Figura: Regiões de estabilidade no plano s complexo. SPE (Semi-plano Esquerdo): Sistema Estável; Eixo imaginário: Sistema Marginalmente Estável; SPD (Semi-plano Direito): Sistema Instável.

Estabilidade: polos e zeros

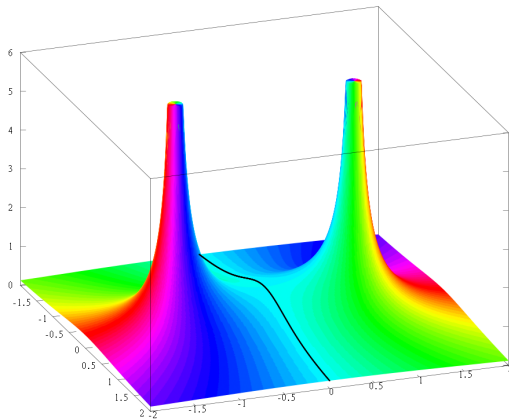
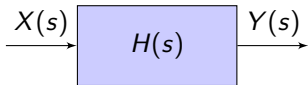


Figura: Função com dois polos.

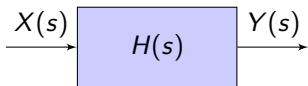
- Assumindo condições iniciais nulas



$$H(s) = \frac{P(s)}{Q(s)}$$

- $Q(s)$ corresponderá ao polinômio característico $Q(\lambda)$?
- Se $P(s)$ e $Q(s)$ tiverem fatores comuns, haverá cancelamento na razão $\frac{P(s)}{Q(s)}$ e o denominador de $H(s)$ não será igual ao polinômio característico.
- $H(s)$ e $h(t)$ são caracterizações externas do sistema.
- Já o polinômio característico depende apenas da caracterização interna do sistema.
- A partir de $H(s)$, podemos inferir sobre a estabilidade externa (BIBO).
- Para que $H(s)$ seja BIBO estável, é necessário que todos os seus polos estejam no semiplano esquerdo (SPE).

- Assumindo condições iniciais nulas



$$H(s) = \frac{P(s)}{Q(s)}$$

- Se $H(s)$ for **imprópria** (com $M > N$), o sistema é **BIBO instável**.
- Por **divisão longa**, temos:

$$H(s) = R(s) + H'(s)$$

- $H'(s)$ será **própria** e $R(s)$ um **polinômio de ordem** $M - N$.
- Exemplo:

$$H(s) = \frac{s^3 + 4s^2 + 4s + 5}{s^2 + 3s + 2} = \underbrace{s}_{\text{ação derivat.}} + \frac{s^2 + 2s + 5}{s^2 + 3s + 2}$$

- Ação derivativa: para uma entrada $x(t) = u(t)$, a saída conterá uma componente $\delta(t)$ na saída $y(t)$. O sistema é BIBO instável.
- $H(s)$ amplificará demasiadamente ruídos presentes em $x(t)$.

$$H(s) = \frac{P(s)}{Q(s)}$$

- Normalmente trabalharemos com funções racionais próprias.
- Se $P(s)$ e $Q(s)$ não tiverem termos em comum, podemos analisar a estabilidade interna de $H(s)$.
- Nesse caso, a estabilidade assintótica será avaliada a partir das posições dos polos de $H(s)$. Os zeros de $H(s)$ não têm influência sobre a estabilidade.

Condições:

- Para estabilidade assintótica do sistema LCIT $H(s)$: todos os polos de $H(s)$ devem estar no semiplano esquerdo (SPE). Os polos podem ser simples (distintos) ou repetidos.
- Para a instabilidade do sistema LCIT $H(s)$:
 - (i) Ao menos um polo de $H(s)$ não está no semiplano esquerdo (SPE);
 - (ii) Existem polos repetidos de $H(s)$ no eixo imaginário.
- Para o sistema LCIT $H(s)$ ser marginalmente estável:
 - Não existem polos de $H(s)$ no semiplano direito (SPD);
 - Alguns polos não repetidos estão no eixo imaginário.

Exemplo

$$H_1(s) = \frac{1}{s-1}, \quad H_2(s) = \frac{s-1}{s+1} \Rightarrow H(s) = H_1(s)H_2(s) = \frac{1}{s+1}$$

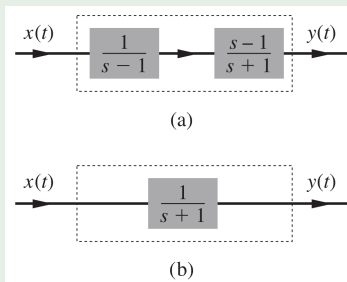


Figura: Distinção entre estabilidade BIBO e assintótica.. Fonte: Lathi, 2000.

↪ Sistema **BIBO estável** mas **assintoticamente instável**.

Definição

Um sistema com função de transferência $H_{\text{inv}}(s)$ é o **inverso** de $H(s)$ se:

$$H(s) \cdot H_{\text{inv}}(s) = 1$$

Portanto:

$$H_{\text{inv}}(s) = \frac{1}{H(s)}$$

Observações importantes:

- Os zeros de $H(s)$ se tornam polos de $H_{\text{inv}}(s)$
- Para que $H_{\text{inv}}(s)$ seja estável, todos os zeros de $H(s)$ devem estar no SPE
- Sistemas com zeros no SPD são chamados de **não-mínimos em fase**
- A cascata $H(s) \cdot H_{\text{inv}}(s)$ resulta em $y(t) = x(t)$

Diagramas de Blocos

Motivação

Sistemas complexos podem ser representados através de subsistemas interconectados, facilitando a análise e o projeto.

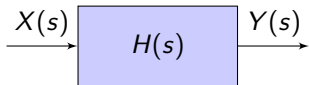


Figura: Representação básica de um sistema com função de transferência $H(s)$. Fonte: Lathi, 2000.

Vantagens:

- Visualização clara da estrutura do sistema
- Facilita análise modular
- Permite simplificações sucessivas

Associação em série (cascata)

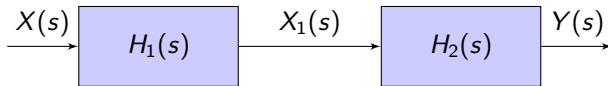


Figura: Associação em série (cascata).

$$X_1(s) = H_1(s)X(s)$$

$$Y(s) = H_2(s)X_1(s) = H_2(s)H_1(s)X(s)$$

logo,

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = H_2(s)H_1(s)$$

Importante

Na conexão em cascata, a ordem dos subsistemas pode ser alterada sem afetar a função de transferência total (propriedade comutativa).

Associação em paralelo

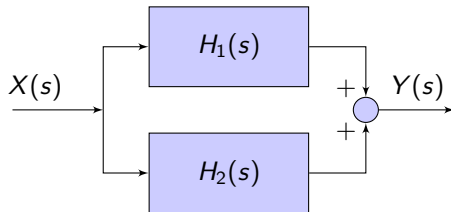


Figura: Associação em paralelo.

$$X_1(s) = H_1(s)X(s), \quad X_2(s) = H_2(s)X(s)$$

$$Y(s) = X_1(s) + X_2(s) = (H_1(s) + H_2(s))X(s)$$

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = H_1(s) + H_2(s)$$

Conexão com Realimentação

Configuração básica:

Sinal de erro: $E(s) = X(s) - H(s)Y(s)$

Saída: $Y(s) = G(s)E(s)$

Derivação:

$$Y(s) = G(s)[X(s) - H(s)Y(s)]$$

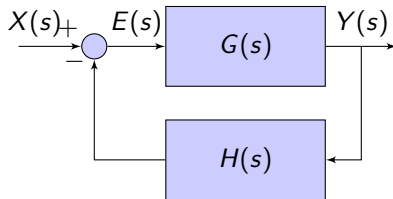
$$Y(s) = G(s)X(s) - G(s)H(s)Y(s)$$

$$Y(s)[1 + G(s)H(s)] = G(s)X(s)$$

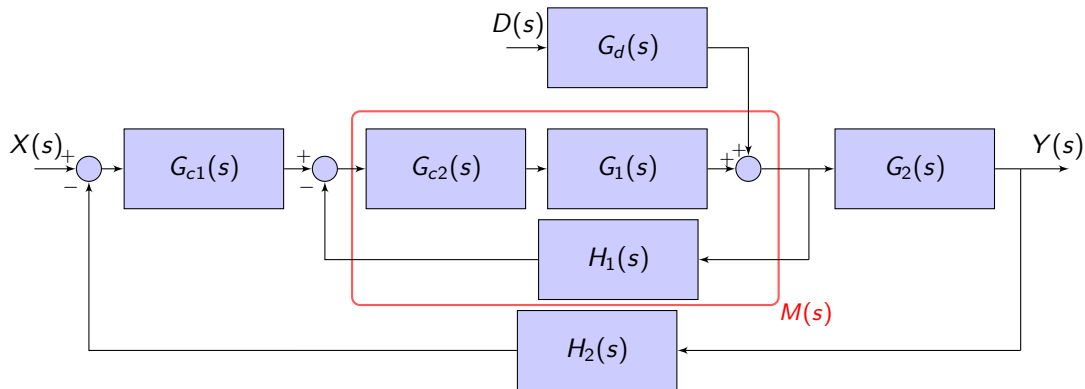
$$\boxed{\frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)}}$$

onde:

- $G(s)$ = função de transferência direta
- $H(s)$ = função de transferência de realimentação
- $G(s)H(s)$ = função de transferência de malha



Exemplo: função de transferência de $Y(s)/X(s)$



$$M(s) = \frac{G_1(s)G_{c2}(s)}{1 + H_1(s)G_1(s)G_{c2}(s)} \Rightarrow \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{G_2(s)M(s)G_{c1}(s)}{1 + H_2(s)G_2(s)M(s)G_{c1}(s)}$$

$$\frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{G_2(s)G_1(s)G_{c2}(s)G_{c1}(s)}{1 + H_1(s)G_1(s)G_{c2}(s) + H_2(s)G_2(s)G_1(s)G_{c2}(s)G_{c1}(s)}$$

Resumo das conexões elementares e seus equivalentes

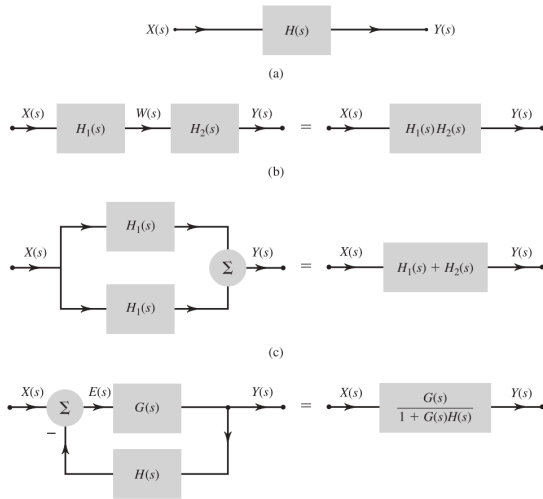
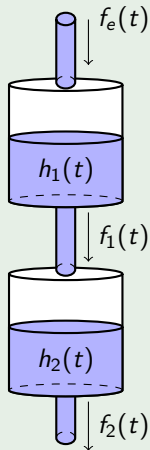


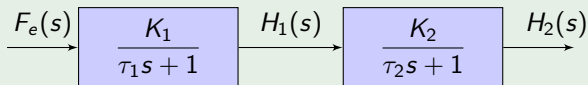
Figura: (a) Bloco básico, (b) Série ou Cascata, (c) Paralelo, (d) Realimentação. Fonte: Lathi, 2000.

Diagrama de blocos de sistemas

Exemplo: processo de nível não-interativo



• Diagrama de blocos:



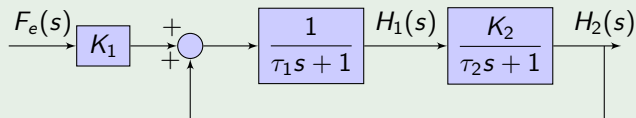
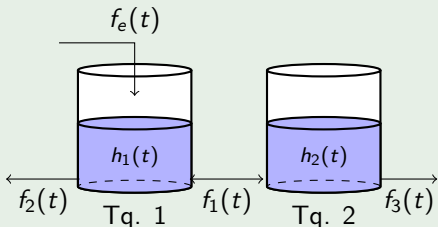
$$H_1(s) = \frac{K_1}{\tau_1 s + 1} F_e(s)$$

$$H_2(s) = \frac{K_2}{\tau_2 s + 1} H_1(s) = \frac{K_1 K_2}{(\tau_1 s + 1)(\tau_2 s + 1)} F_e(s)$$

Diagrama de blocos de sistemas

Exemplo: processo de nível interativo

• Diagrama de blocos:



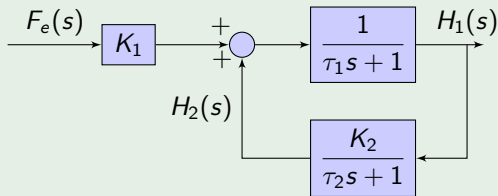
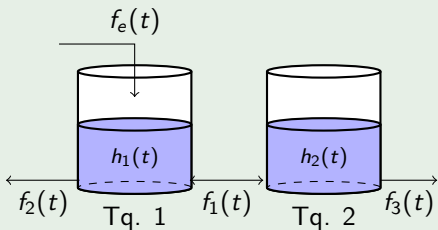
$$H_2(s) = \frac{K_1 K_2}{(\tau_1 s + 1)(\tau_2 s + 1)} F_e(s) + \frac{K_2}{(\tau_1 s + 1)(\tau_2 s + 1)} H_2(s)$$

$$H_2(s) = \frac{K_1 K_2}{\tau_1 \tau_2 s^2 + (\tau_1 + \tau_2)s + 1 - K_2} F_e(s)$$

Diagrama de blocos de sistemas

Exemplo: processo de nível interativo

• Diagrama de blocos:

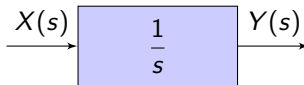
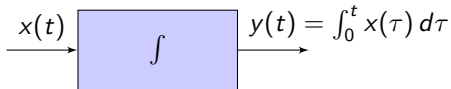


$$H_1(s) = \frac{K_1}{\tau_1 s + 1} F_e(s) + \frac{K_2}{(\tau_1 s + 1)(\tau_2 s + 1)} H_1(s)$$

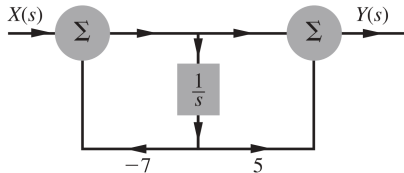
$$H_1(s) = \frac{K_1(\tau_2 s + 1)}{(\tau_1 s + 1)(\tau_2 s + 1) - K_2} F_e(s) \text{ (sist. de 2ª ordem c/ zero)}$$

Realização (implementação) de função de transferência

- Uma função de transferência $H(s)$ pode ser implementada usando integradores ou diferenciadores juntamente com somadores e multiplicadores.
- Evita-se o uso de diferenciadores por motivos práticos
- Implementação com integradores em conjunto com multiplicadores escalares e somadores.



- Exemplo: realização de $H(s) = \frac{s+5}{s+7}$



Motivação

Sistemas de controle são projetados para produzir uma saída desejada $y(t)$ para uma dada entrada $x(t)$. Na prática, características do sistema mudam com o tempo.

Problemas em sistemas de malha aberta:

- Variação de parâmetros com o tempo
- Substituição de componentes
- Mudanças no ambiente de operação
- Distúrbios externos

Solução: Realimentação

- Realimentar a saída (ou função da saída) para a entrada
- Permite correção automática baseada no erro
- Sistema de malha fechada

Sistemas em Malha Aberta vs Malha Fechada

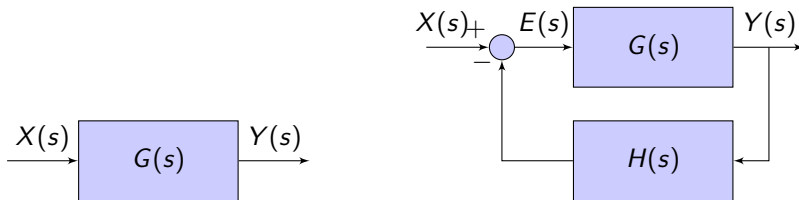


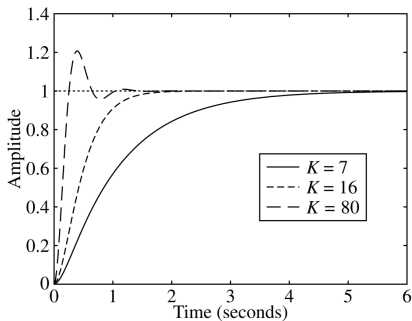
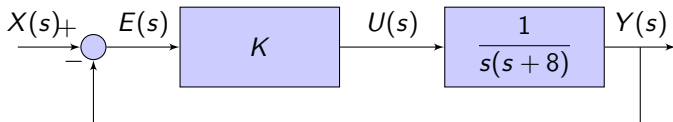
Figura: (a) Sistema em malha aberta, (b) Sistema em malha fechada (realimentação negativa).

Sistema realimentado:

- Possui capacidade de supervisão e autocorreção
- Compensa variações paramétricas e distúrbios
- Atinge objetivo desejado dentro de tolerância especificada

Sistema em malha fechada

- Seja o sistema de controle automático com controlador K projetado de forma que o sistema em malha fechada tenha resposta satisfatória ao degrau unitário ($y(t) \rightarrow x(t)$).



Função de transferência em malha fechada:

$$T(s) = \frac{KG(s)}{1 + KG(s)}$$

Considerando $G(s) = \frac{1}{s(s+8)}$ (função de transferência do motor):

$$T(s) = \frac{\frac{K}{s(s+8)}}{1 + \frac{K}{s(s+8)}} = \frac{K}{s^2 + 8s + K}$$

Análise das raízes características:

$$s^2 + 8s + K = 0 \Rightarrow s = \frac{-8 \pm \sqrt{64 - 4K}}{2} = -4 \pm \sqrt{16 - K}$$

- $K < 16$: raízes reais (sem oscilação)
- $K = 16$: raízes reais repetidas (criticamente amortecido)
- $K > 16$: raízes complexas (resposta oscilatória)

Resposta ao Degrau Unitário: $K = 7$

Entrada em degrau: $x(t) = u(t) \Rightarrow X(s) = 1/s$

$$Y(s) = T(s)X(s) = \frac{K}{s(s^2 + 8s + K)} = \frac{7}{s(s^2 + 8s + 7)}$$

Fatorando o denominador:

$$s^2 + 8s + 7 = (s + 1)(s + 7)$$

$$Y(s) = \frac{7}{s(s + 1)(s + 7)}$$

Expansão em frações parciais e transformada inversa:

$$y(t) = \left[1 - \frac{7}{6}e^{-t} + \frac{1}{6}e^{-7t} \right] u(t)$$

Características: Sem oscilação, mas resposta lenta.

Resposta ao Degrau Unitário: $K = 80$

$$Y(s) = \frac{80}{s(s^2 + 8s + 80)}$$

Raízes características:

$$s = -4 \pm j8$$

Resposta no tempo:

$$y(t) = \left[1 - e^{-4t} \cos(8t) - \frac{1}{2} e^{-4t} \sin(8t) \right] u(t)$$

$$y(t) = \left[1 - \sqrt{1.25} e^{-4t} \cos(8t - 26,57) \right] u(t)$$

Características da resposta:

- Resposta mais rápida que $K = 7$
- Sobressinal percentual (SSP) = 21%
- Tempo de pico: $t_p = 0,393$ s
- Tempo de subida: $t_r = 0,175$ s
- Tempo de acomodação: $t_s \approx 1$ s

Resposta ao Degrau Unitário: $K = 16$

Caso criticamente amortecido:

$$Y(s) = \frac{16}{s(s^2 + 8s + 16)} = \frac{16}{s(s + 4)^2}$$

Raízes características:

$$s = -4, -4 \quad (\text{raízes reais repetidas})$$

Resposta no tempo:

$$y(t) = [1 - e^{-4t} - 4te^{-4t}]u(t)$$

Características:

- Resposta mais rápida possível sem oscilação
- SSP = 0% (sem sobressinal)
- Melhor compromisso entre velocidade e amortecimento

Comparação das Respostas ao Degrau

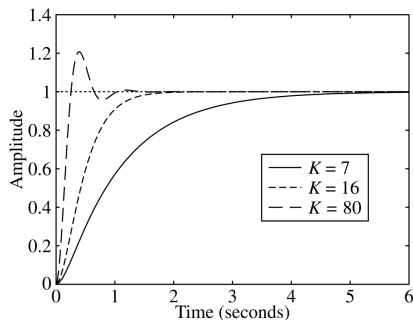


Figura: Resposta ao degrau unitário para diferentes valores de K . Fonte: Lathi, 2000.

- $K = 7$: Lento, sem oscilação
- $K = 16$: Rápido, sem oscilação (ótimo)
- $K = 80$: Muito rápido, mas com oscilação

Script MATLAB: polos do sistema em malha fechada

Usando MATLAB para determinar FT de sistemas realimentados:

```
1 % Sistema:  $G(s) = K/(s(s+8))$ ,  $H(s) = 1$ 
2 % Casos: (a)  $K = 7$ , (b)  $K = 16$ , (c)  $K = 80$ 
3 K_values = [7, 16, 80];
4
5 for i = 1:length(K_values)
6     K = K_values(i);
7
8     % Funcao de transferencia direta G(s)
9     num_G = K;
10    den_G = [1 8 0];
11    G = tf(num_G, den_G);
12    % Funcao de transferencia de realimentacao H(s)
13    H = 1;
14    % Funcao de transferencia em malha fechada
15    T = feedback(G, H);
16
17    fprintf('Para K = %d:\n', K); disp(T);
18
19    % Calcular e exibir polos
20    p = pole(T);
21    fprintf('Polos: ');
22    disp(p'); fprintf('\n');
23 end
```

Script MATLAB: resposta ao degrau

```
1 % Sistema de controle de posicao
2 %  $G(s) = K/(s(s+8))$ ,  $H(s) = 1$ 
3 clear; clc;
4 % Valores de K a testar
5 K_values = [7, 16, 80];
6 t = 0:0.01:3; % Vetor de tempo
7 figure; hold on;
8 for i = 1:length(K_values)
9     K = K_values(i);
10    % Sistema em malha fechada
11    num = K;
12    den = [1 8 K];
13    sys = tf(num, den);
14    % Resposta ao degrau
15    [y, t] = step(sys, t);
16    plot(t, y, 'LineWidth', 2, ...
17         'DisplayName', ['K = ' num2str(K)]);
18 end
19
20 xlabel('Tempo (s)'); ylabel('\theta_o(t)');
21 title('Resposta ao Degrau - Sistema de Controle');
22 legend('show'); grid on;
23 hold off;
```

Script MATLAB: Resposta a Rampa

```
1 % Resposta a rampa unitaria com K = 80
2 clear; clc;
3 K = 80;
4 G = tf(K, [1 8 0]);
5 T = feedback(G, 1);
6 % Resposta ao degrau (para obter rampa, integrar)
7 % Rampa = integral do degrau
8 % Resposta a rampa = derivada da resposta ao impulso
9 % Ou usar lsim com entrada rampa
10 t = 0:0.01:5;
11 u_rampa = t';
12
13 % Simular resposta
14 y = lsim(T, u_rampa, t);
15 % Plotar
16 figure; hold on;
17 plot(t, u_rampa, 'r—', 'LineWidth', 2, 'DisplayName', 'Entrada (rampa)');
18 plot(t, y, 'b-', 'LineWidth', 2, 'DisplayName', 'Saida');
19 xlabel('Tempo (s)'); ylabel('Amplitude');
20 title('Resposta a Rampa Unitaria (K=80)'); legend('show'); grid on;
21
22 % Calcular erro de regime permanente
23 erro_ss = mean(u_rampa(end-100:end) - y(end-100:end));
24 fprintf('Erro de regime permanente: %.4f\n', erro_ss);
```

Exercício Proposto 1

Usando a transformada de Laplace, resolva:

$$\frac{dy}{dt} + 2y(t) = e^{-3t}u(t)$$

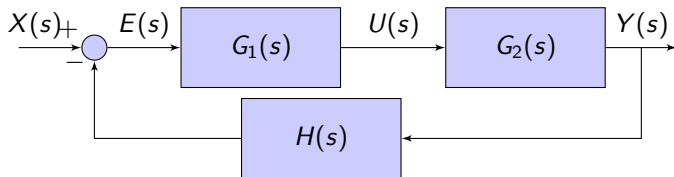
com $y(0^-) = 1$.

Determine:

- 1 A solução completa $y(t)$
- 2 A componente de entrada nula
- 3 A componente de estado nulo
- 4 Verifique a solução fazendo $t = 0^+$

Exercício Proposto 2

Simplifique o diagrama de blocos abaixo e determine a função de transferência total $Y(s)/X(s)$:



Sistema com:

- Bloco direto: $G_1(s) = \frac{5}{s+2}$
- Bloco em cascata: $G_2(s) = \frac{s}{s+1}$
- Realimentação: $H(s) = \frac{1}{s+3}$

Determine:

- 1 A função de transferência equivalente
- 2 Os polos do sistema em malha fechada
- 3 A estabilidade do sistema

Tópicos abordados:

① Solução de Equações Diferenciais:

- Método sistemático usando transformada de Laplace
- Separação em componentes de entrada nula e estado nulo

② Diagramas de Blocos:

- Conexões em cascata, paralelo e realimentação
- Simplificação de diagramas complexos

③ Sistemas de Controle:

- Realimentação negativa vs positiva
- Sistema de controle de posição
- Especificações de desempenho
- Análise de estabilidade

Principais Equações

- Função de transferência: $H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} \Big|_{CI=0}$
- Sistema em cascata: $H(s) = H_1(s) \cdot H_2(s)$
- Sistema em paralelo: $H(s) = H_1(s) + H_2(s)$
- Sistema realimentado: $T(s) = \frac{G(s)}{1+G(s)H(s)}$
- Estabilidade: Pólos de $H(s)$ no SPE

Importante

A transformada de Laplace é fundamental para análise e projeto de sistemas de controle!

Exemplo 4.10 – Enunciado

Problema (Lathi, 2006)

Resolver a equação diferencial de segunda ordem

$$(p^2 + 5p + 6)y(t) = (p + 1)x(t), \quad p^k y(t) = \frac{d^k y(t)}{dt^k} \quad (1)$$

sujeita às condições iniciais

$$y(0^-) = 2, \quad \dot{y}(0^-) = 1,$$

com entrada $x(t) = e^{-4t}u(t)$.

Polinômios do sistema e da entrada

Denominador (sistema):

$$Q(s) = s^2 + 5s + 6 = (s + 2)(s + 3)$$

Polos do sistema: $s = -2$ e $s = -3$.

Numerador (entrada-saída):

$$P(s) = s + 1$$

Polo da entrada: $X(s) = \frac{1}{s + 4}$, polo em $s = -4$.

Observação

Os três polos $\{-2, -3, -4\}$ são **distintos** $\Rightarrow$ expansão em frações parciais simples, sem termos do tipo $t e^{-at}$.

Propriedade de Diferenciação no Tempo

Transformadas das derivadas de $y(t)$

Para $y(0^-) = 2$ e $\dot{y}(0^-) = 1$:

$$\mathcal{L}\{\dot{y}\} = s Y(s) - y(0^-) = s Y(s) - 2,$$

$$\mathcal{L}\{\ddot{y}\} = s^2 Y(s) - s y(0^-) - \dot{y}(0^-) = s^2 Y(s) - 2s - 1.$$

Transformada do lado direito da equação

Com $x(t) = e^{-4t}u(t)$ *causal* $\Rightarrow x(0^-) = 0$:

$$X(s) = \frac{1}{s+4},$$

$$\mathcal{L}\{\dot{x} + x\} = \mathcal{L}\{(p+1)x\} = [sX(s) - x(0^-)] + X(s) = (s+1)X(s) = \frac{s+1}{s+4}.$$

Nota sobre o operador $P(p) = (p+1)$

A ação de $(p+1)$ no lado direito da EDO contribui com o fator $P(s) = s+1$ em $Y_{zs}(s)$, alterando o numerador da resposta de estado nulo em relação ao caso $P(p) = 1$.

Equação Algébrica em $Y(s)$

Aplicando a Transformada de Laplace à Eq. (1) e agrupando os termos em $Y(s)$:

$$\underbrace{(s^2 + 5s + 6) Y(s)}_{\text{termos em } Y(s)} - \underbrace{(2s + 1) - 5 \cdot 2}_{\text{cond. iniciais}} = (s + 1) X(s).$$

$$(s^2 + 5s + 6) Y(s) = (s + 1) X(s) + (2s + 11). \quad (2)$$

Termos de condições iniciais

$(2s + 11)$ origina-se **exclusivamente** de $y(0^-) = 2$ e $\dot{y}(0^-) = 1$:

$$sy(0^-) + \dot{y}(0^-) + 5y(0^-) = 2s + 1 + 10 = 2s + 11.$$

Termos da entrada

$(s + 1)X(s)$ origina-se **exclusivamente** da entrada $x(t)$, com as condições iniciais tomadas como zero.

Separação em $Y_{zi}(s)$ e $Y_{zs}(s)$

Dividindo a Eq. (2) por $Q(s) = (s + 2)(s + 3)$:

$$Y(s) = \underbrace{\frac{2s + 11}{(s + 2)(s + 3)}}_{Y_{zi}(s)} + \underbrace{\frac{s + 1}{(s + 4)(s + 2)(s + 3)}}_{Y_{zs}(s)}.$$

$Y_{zi}(s)$ – Entrada Nula

- Numerador $(2s + 11)$: **só depende das c.i.**
- Denominador $Q(s)$: polos do sistema.
- Gera os modos e^{-2t} e e^{-3t} .

$Y_{zs}(s)$ – Estado Nulo

- Numerador $P(s) = (s + 1)$: **só depende da entrada.**
- Denominador: $Q(s) \cdot (s + 4)$ – modos do sistema e polo da entrada.
- Gera modos e^{-2t} , e^{-3t} e e^{-4t} .

Resposta de Entrada Nula $Y_{zi}(s)$

$$Y_{zi}(s) = \frac{2s + 11}{(s + 2)(s + 3)} = \frac{A_1}{s + 2} + \frac{A_2}{s + 3}.$$

Cálculo dos resíduos pelo método dos restos

$$A_1 = \left. \frac{2s + 11}{s + 3} \right|_{s=-2} = \frac{2(-2) + 11}{-2 + 3} = \frac{7}{1} = 7,$$

$$A_2 = \left. \frac{2s + 11}{s + 2} \right|_{s=-3} = \frac{2(-3) + 11}{-3 + 2} = \frac{5}{-1} = -5.$$

Resposta de Entrada Nula

$$y_{zi}(t) = (7e^{-2t} - 5e^{-3t})u(t).$$

Verificação – condições iniciais em $t = 0^-$:

$$y_{zi}(0^-) = 7 - 5 = 2 \checkmark, \quad \dot{y}_{zi}(0^-) = 7 \cdot (-2) - 5 \cdot (-3) = -14 + 15 = 1 \checkmark.$$

Resposta de Estado Nulo $Y_{zs}(s)$

$$Y_{zs}(s) = \frac{s+1}{(s+2)(s+3)(s+4)} = \frac{B_1}{s+2} + \frac{B_2}{s+3} + \frac{B_3}{s+4}.$$

Cálculo dos resíduos

$$B_1 = \left. \frac{s+1}{(s+3)(s+4)} \right|_{s=-2} = \frac{-1}{(1)(2)} = -\frac{1}{2},$$

$$B_2 = \left. \frac{s+1}{(s+2)(s+4)} \right|_{s=-3} = \frac{-2}{(-1)(1)} = 2,$$

$$B_3 = \left. \frac{s+1}{(s+2)(s+3)} \right|_{s=-4} = \frac{-3}{(-2)(-1)} = -\frac{3}{2}.$$

Resposta de Estado Nulo

$$y_{zs}(t) = \left(-\frac{1}{2} e^{-2t} + 2 e^{-3t} - \frac{3}{2} e^{-4t} \right) u(t).$$

Verificação da Resposta de Estado Nulo

A resposta de estado nulo corresponde a condições iniciais **nulas**: $y(0^-) = 0$ e $\dot{y}(0^-) = 0$.

Verificação em $t = 0^-$:

$$y_{zs}(0^-) = -\frac{1}{2} + 2 - \frac{3}{2} = -\frac{1}{2} - \frac{3}{2} + 2 = -2 + 2 = 0 \checkmark.$$

$$\dot{y}_{zs}(t) = \left(\frac{1}{2} \cdot 2 e^{-2t} - 2 \cdot 3 e^{-3t} + \frac{3}{2} \cdot 4 e^{-4t} \right) u(t) = (e^{-2t} - 6e^{-3t} + 6e^{-4t}) u(t).$$

$$\dot{y}_{zs}(0^-) = 1 - 6 + 6 = 1.$$

Atenção

$\dot{y}_{zs}(0^-) = 1 \neq 0$ porque a Transformada de Laplace unilateral utiliza condições em 0^- para o *sistema*, mas a entrada entra em $t = 0$. As condições nulas referem-se ao *estado interno* do sistema (cond. iniciais), não à condição em 0^+ da resposta completa.

Resposta Total $y(t)$

Soma das componentes

$$\begin{aligned}y(t) &= y_{zi}(t) + y_{zs}(t) \\&= \left(7 - \frac{1}{2}\right) e^{-2t} + (-5 + 2) e^{-3t} - \frac{3}{2} e^{-4t} \\&= \frac{13}{2} e^{-2t} - 3 e^{-3t} - \frac{3}{2} e^{-4t}\end{aligned}$$

$Y(s)$ total (verificação)

$$Y(s) = \frac{13/2}{s+2} - \frac{3}{s+3} - \frac{3/2}{s+4}.$$

Proveniente de $\frac{2s^2 + 20s + 45}{(s+2)(s+3)(s+4)}.$

Resposta Total

$$y(t) = \left(\frac{13}{2} e^{-2t} - 3 e^{-3t} - \frac{3}{2} e^{-4t} \right) u(t).$$

Verificação das Condições Iniciais da Resposta Total

Condições em $t = 0^+$ (resposta total):

$$y(0^+) = \frac{13}{2} - 3 - \frac{3}{2} = \frac{13}{2} - \frac{6}{2} - \frac{3}{2} = \frac{4}{2} = 2.$$

$$\dot{y}(t) = (-13e^{-2t} + 9e^{-3t} + 6e^{-4t})u(t),$$

$$\dot{y}(0^+) = -13 + 9 + 6 = 2.$$

Em 0^- (entrada nula satisfaz)

$$y_{zi}(0^-) = 2, \quad \dot{y}_{zi}(0^-) = 1.$$

As c.i. *dadas* são verificadas.

Em 0^+ (resposta total)

$$y(0^+) = 2, \quad \dot{y}(0^+) = 2.$$

$\dot{y}(0^+) = 2 \neq \dot{y}(0^-) = 1$ – diferença causada pela componente de estado nulo.

Conclusão

As condições em 0^- são satisfeitas pela **resposta de entrada nula**. As condições em 0^+ são satisfeitas pela **resposta total**. Em geral, $\dot{y}(0^-) \neq \dot{y}(0^+)$.

Quadro Resumo das Componentes – Exemplo 4.10

Componente	Transformada $Y(s)$	Resposta temporal $y(t)$
Entrada nula y_{zi}	$\frac{2s + 11}{(s + 2)(s + 3)}$	$(7e^{-2t} - 5e^{-3t})u(t)$
Estado nulo y_{zs}	$\frac{s + 1}{(s + 2)(s + 3)(s + 4)}$	$(-\frac{1}{2}e^{-2t} + 2e^{-3t} - \frac{3}{2}e^{-4t})u(t)$
Total y	$\frac{2s^2 + 20s + 45}{(s + 2)(s + 3)(s + 4)}$	$(\frac{13}{2}e^{-2t} - 3e^{-3t} - \frac{3}{2}e^{-4t})u(t)$

Propriedade de Decomposição – Linearidade

y_{zi} e y_{zs} são **independentes**: a entrada nula ignora a entrada; o estado nulo ignora as condições iniciais. A resposta total é a *superposição* das duas.

Verificação Computacional – MATLAB/Octave

```
1 % Exemplo 4.10 -- Lathi, Secao 4.3 (pp. 335-337)
2 % ODE:  $(p^2 + 5p + 6)y(t) = (p+1)x(t)$ 
3 % Cond. iniciais:  $y(0^-)=2$ ,  $dy/dt(0^-)=1$ 
4 % Entrada:  $x(t) = \exp(-4t)u(t)$ 
5 t = linspace(0, 4, 5000);
6 %--- Componentes analiticas ---
7 y_zi = 7*exp(-2*t) - 5*exp(-3*t);
8 y_zs = -0.5*exp(-2*t) + 2*exp(-3*t) - 1.5*exp(-4*t);
9 y_tot = 6.5*exp(-2*t) - 3*exp(-3*t) - 1.5*exp(-4*t);
10 %--- Verificacao numerica via lsim (apenas MATLAB/Octave+Control) ---
11 % num = [1 1]; den = [1 5 6]; %  $H(s) = (s+1)/(s^2+5s+6)$ 
12 % sys = tf(num, den);
13 % [~, t2, x0] = initial(sys, [2;1]); % resp. entrada nula
14 % y_zi_num = lsim(sys, zeros(size(t)), t) + x0;
15 %--- Grafico ---
16 figure;
17 plot(t, y_zi, 'b--', 'LineWidth',1.6); hold on
18 plot(t, y_zs, 'r-.', 'LineWidth',1.6)
19 plot(t, y_tot, 'k-', 'LineWidth',2.2)
20 xlabel('t (s)'); ylabel('y(t)')
21 title('Exemplo 4.10')
22 legend('y_{zi}(t) -- Entrada nula', 'y_{zs}(t) -- Estado nulo', 'y(t) -- Resposta total', '
    Location','northeast')
23 grid on; exportgraphics(gcf,'fig_yt.pdf');
```

Listing 1: Exemplo 4.10 – $(p^2 + 5p + 6)y = (p + 1)x$, MATLAB/Octave

Gráfico das Componentes da Resposta

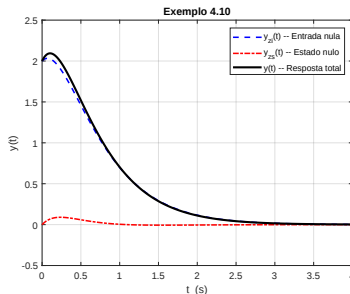


Figura: Componentes de entrada nula $y_{zi}(t)$, estado nulo $y_{zs}(t)$ e resposta total $y(t)$ para o Exemplo 4.10.
Fonte: gerado via MATLAB/Octave com base em Lathi (2006).

Comportamento qualitativo esperado

- $y_{zi}(0) = 2$: inicia nas condições iniciais dadas e decai pelos modos e^{-2t} e e^{-3t} .
- $y_{zs}(0) = 0$: parte do repouso; inclui o modo transitório e^{-4t} (polo da entrada).
- $y(t) \rightarrow 0$ para $t \rightarrow \infty$: sistema **estável** (todos os polos no semiplano esquerdo).

Exercício Proposto

Exercício (Adaptado de Lathi, Prob. 4.3-2)

Para a equação diferencial

$$(p^2 + 3p + 2)y(t) = (2p + 1)x(t),$$

com $y(0^-) = 1$, $\dot{y}(0^-) = 0$ e $x(t) = e^{-3t}u(t)$:

- (a) Determine $Y(s)$ aplicando a Transformada de Laplace.
- (b) Identifique e calcule $Y_{zi}(s)$ e $Y_{zs}(s)$.
- (c) Expanda em frações parciais e encontre $y_{zi}(t)$, $y_{zs}(t)$ e $y(t)$.
- (d) Verifique as condições iniciais em 0^- com a resposta de entrada nula e discuta a diferença entre $\dot{y}(0^-)$ e $\dot{y}(0^+)$.
- (e) Implemente em MATLAB/Octave e trace as três componentes.

Referência

Lathi, B. *Sinais e Sistemas Lineares*, 2.^a Ed. Bookman, 2006. Seção 4.3, pp. 335–337; Prob. 4.3-2, p. 430.

Referências Bibliográficas



Lathi, B. P.

Sinais e Sistemas Lineares.

2ª Ed., Bookman, 2006.

Capítulo 4, Seções 4.3, 4.5 e 4.7, pp. 335–380.



Oppenheim, A. V.; Willsky, A. S.; Nawab, S. H.

Signals & Systems.

2nd Ed., Prentice Hall, 1997.



Dorf, R. C.; Bishop, R. H.

Sistemas de Controle Modernos.

LTC, 2001.