

ENE0067 – Sinais e Sistemas em Tempo Contínuo

Análise de Sistemas em Tempo Contínuo usando a Transformada de Laplace:
Resposta em Frequência de Sistemas LCIT e Diagramas de Bode (parte 3)

Prof. Eduardo Stockler Tognetti

Departamento de Engenharia Elétrica
Universidade de Brasília – UnB



Sumário da Aula

- 1 Introdução
- 2 Resposta em Frequência de um Sistema LCIT
- 3 Exemplo cálculo resposta em frequência
- 4 Resposta em Regime Permanente
- 5 Diagramas de Bode
 - Constante
 - Pólos e Zeros na Origem
 - Pólos e Zeros de Primeira Ordem
 - Pólos e Zeros de Segunda Ordem
- 6 Construção de Diagramas de Bode
- 7 Pólos e Zeros no Semi-Plano Direito
- 8 Aplicações Práticas
- 9 Exercícios e Problemas
- 10 Filtros
- 11 Resumo e Conclusões

Objetivos da Aula

- Compreender o conceito de resposta em frequência de sistemas LCIT
- Relacionar a função de transferência $H(s)$ com a resposta em frequência $H(j\omega)$
- Aprender a analisar como sistemas respondem a entradas senoidais
- Dominar a técnica de Diagramas de Bode para análise gráfica
- Aplicar os conceitos em exemplos práticos de projeto de filtros

Por que estudar resposta em frequência?

- A filtragem é uma área fundamental do processamento de sinais
- Sistemas de comunicação dependem de características seletivas em frequência
- Muitos sinais práticos podem ser decompostos em componentes senoidais
- Resposta em frequência caracteriza completamente o comportamento de um sistema
- Sistemas de controle podem ser projetados no domínio da frequência

Aplicações práticas:

- Equalização de áudio
- Filtros de comunicação
- Projeto de amplificadores
- Controle de sistemas dinâmicos

Resposta a Exponenciais Complexas

Propriedade fundamental (revisão):

Para um sistema linear contínuo invariante no tempo (LCIT) com entrada exponencial de duração infinita $x(t) = e^{st}$, a saída é:

$$e^{st} \longrightarrow H(s)e^{st} \quad (1)$$

onde $H(s)$ é a função de transferência do sistema.

Fazendo $s = j\omega$:

$$e^{j\omega t} \longrightarrow H(j\omega)e^{j\omega t} \quad (2)$$

Esta relação nos permite analisar a resposta do sistema a excitações senoidais!

Resposta a Entradas Senoidais de SLCIT

Como $\cos \omega t$ é a parte real de $e^{j\omega t}$, para entrada $x(t) = \cos \omega t$:

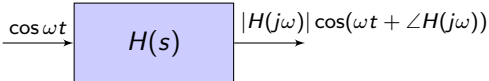
$$x(t) = \cos \omega t \longrightarrow y(t) = \operatorname{Re}\{H(j\omega)e^{j\omega t}\} \quad (3)$$

Expressando $H(j\omega)$ na forma polar:

$$H(j\omega) = |H(j\omega)|e^{j\angle H(j\omega)} \quad (4)$$

A resposta do sistema torna-se:

$y(t) = |H(j\omega)| \cos(\omega t + \angle H(j\omega))$

$\xrightarrow{\cos \omega t}$

 $\xrightarrow{|H(j\omega)| \cos(\omega t + \angle H(j\omega))}$

Interpretação: A saída é uma senóide de mesma frequência, com amplitude modificada por $|H(j\omega)|$ e fase deslocada por $\angle H(j\omega)$.

Resposta a Senóides com Fase Inicial

Para entrada mais geral $x(t) = \cos(\omega t + \theta)$:

$$y(t) = |H(j\omega)| \cos(\omega t + \theta + \angle H(j\omega)) \quad (5)$$

Observações importantes:

- A frequência da saída é **idêntica** à da entrada
- A amplitude da saída é a amplitude da entrada multiplicada por $|H(j\omega)|$
- A fase da saída é a fase da entrada deslocada por $\angle H(j\omega)$
- Esta propriedade só vale para sistemas **BIBO estáveis**

Resposta em Amplitude (ou Magnitude):

- $|H(j\omega)|$ – ganho de amplitude do sistema na frequência ω
- Mostra como o sistema amplifica ou atenua cada frequência

Resposta em Fase:

- $\angle H(j\omega)$ – deslocamento de fase na frequência ω
- Mostra como o sistema altera a fase de cada componente

Resposta em Frequência:

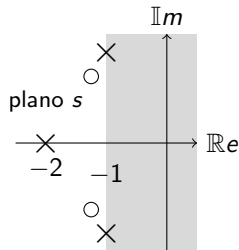
- $H(j\omega)$ – contém ambas as informações (amplitude e fase)
- Caracteriza completamente as propriedades de filtragem do sistema

Restrição de Estabilidade BIBO

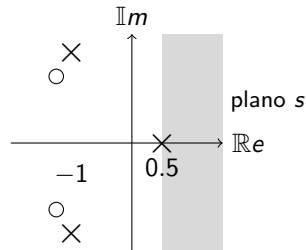
Por que a estabilidade BIBO é necessária?

- A relação $e^{j\omega t} \rightarrow H(j\omega)e^{j\omega t}$ é obtida fazendo $s = j\omega$ em $e^{st} \rightarrow H(s)e^{st}$
- Esta última relação só vale para valores de s onde $H(s)$ existe (dentro da RDC)
- Para sistemas BIBO estáveis, a RDC de $H(s)$ **não inclui** o eixo $j\omega$
- Logo, $H(j\omega)$ não tem significado para sistemas BIBO instáveis

Conclusão: A resposta em frequência só faz sentido para sistemas estáveis (RDC inclui eixo $j\omega$)!



(a) Sistema estável (RDC inclui $j\omega$).



(b) Sistema instável (RDC não inclui $j\omega$).

Exemplo 4.23 (Conceitual)

Sistema: Suponha que para $\omega = 10$ rad/s:

- $|H(j10)| = 3$
- $\angle H(j10) = -30^\circ$

Entrada: $x(t) = 5 \cos(10t + 50^\circ)$

Saída:

$$\begin{aligned}y(t) &= |H(j10)| \times 5 \cos(10t + 50^\circ + \angle H(j10)) \\&= 3 \times 5 \cos(10t + 50^\circ - 30^\circ) \\&= 15 \cos(10t + 20^\circ)\end{aligned}$$

O sistema amplificou por fator 3 e atrasou a fase em 30° .

Ganho de uma função de transferência - interpretação geométrica

- Seja uma função de transferência na forma:

$$H(s) = K \frac{(s - z_0)(s - z_1) \cdots (s - z_m)}{(s - p_0)(s - p_1) \cdots (s - p_n)}$$

- Em $s = s_0$:

$$|H(s_0)| = |K| \frac{|(s_0 - z_0)| |(s_0 - z_1)| \cdots |(s_0 - z_m)|}{|(s_0 - p_0)| |(s_0 - p_1)| \cdots |(s_0 - p_n)|}$$

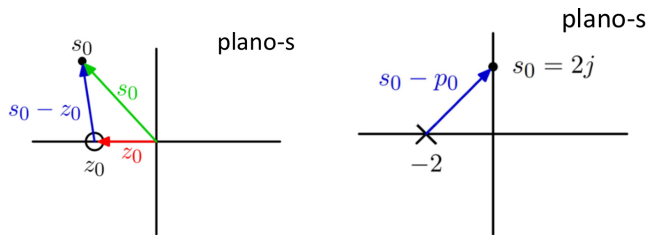


Figura: Representação geométrica do ganho em $s = s_0$ devido ao zero z_0 e devido ao polo $p_0 = -2$.

Fase de uma função de transferência - interpretação geométrica

- Seja uma função de transferência na forma:

$$H(s) = K \frac{(s - z_0)(s - z_1) \cdots (s - z_m)}{(s - p_0)(s - p_1) \cdots (s - p_n)}$$

- Em $s = s_0$:

$$\begin{aligned} \angle H(s_0) = & \angle K + \angle(s_0 - z_0) + \angle(s_0 - z_1) + \cdots + \angle(s_0 - z_m) \\ & - \angle(s_0 - p_0) - \angle(s_0 - p_1) - \cdots - \angle(s_0 - p_n) \end{aligned}$$

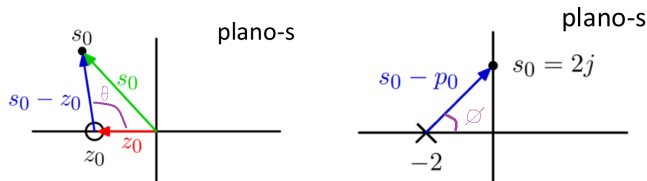


Figura: Representação geométrica da fase em $s = s_0$ devido ao zero z_0 ($\theta = \angle(s_0 - z_0)$) e devido ao polo $p_0 = -2$ ($\phi = \angle(s_0 - p_0)$).

Resposta em Frequência

- Substituindo $s = j\omega$ em $H(s)$ tem-se $H(j\omega)$
- $H(j\omega)$ é uma função de variável complexa, logo pode ser escrita como

$$H(j\omega) = \operatorname{Re} \{H(j\omega)\} + j \operatorname{Im} \{H(j\omega)\},$$

e representada por

$$H(j\omega) = |H(j\omega)|e^{j\phi}$$

em que

$$|H(j\omega)| = \sqrt{\operatorname{Re} \{H(j\omega)\}^2 + \operatorname{Im} \{H(j\omega)\}^2}, \quad \phi = \angle H(j\omega) = \tan^{-1} \left\{ \frac{\operatorname{Im} \{H(j\omega)\}}{\operatorname{Re} \{H(j\omega)\}} \right\}$$

- Analogamente,

$$H(-j\omega) = |H(-j\omega)|e^{-j\phi} = |H(j\omega)|e^{-j\phi}$$

Resposta em Frequência

- Considere

$$H(j\omega) = \frac{H_a(j\omega)H_b(j\omega)H_c(j\omega)}{H_1(j\omega)H_2(j\omega)H_3(j\omega)}$$

- A magnitude e o ângulo de $H(j\omega) = |H(j\omega)|e^{j\phi}$ pode ser expresso na forma

$$|H(j\omega)| = \frac{|H_a(j\omega)| |H_b(j\omega)| |H_c(j\omega)|}{|H_1(j\omega)| |H_2(j\omega)| |H_3(j\omega)|}$$

e

$$\angle H(j\omega) = \angle H_a(j\omega) + \angle H_b(j\omega) + \angle H_c(j\omega) - \angle H_1(j\omega) - \angle H_2(j\omega) - \angle H_3(j\omega)$$

- Portanto,

$$H(j\omega) = \frac{|H_a(j\omega)| |H_b(j\omega)| |H_c(j\omega)|}{|H_1(j\omega)| |H_2(j\omega)| |H_3(j\omega)|} e^{j(\phi_a + \phi_b + \phi_c - \phi_1 - \phi_2 - \phi_3)}$$

Exemplo 1: Sistema RC Passa-Baixas

Sistema: Considere o circuito RC com função de transferência:

$$H(s) = \frac{1}{RCs + 1} \quad (6)$$

Passo 1: Substituir $s = j\omega$:

$$H(j\omega) = \frac{1}{1 + j\omega RC} \quad (7)$$

Passo 2: Calcular amplitude e fase:

$$|H(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega RC)^2}} \quad (8)$$

$$\angle H(j\omega) = -\arctan(\omega RC) \quad (9)$$

Exemplo 1: Análise do Filtro RC (continuação)

- **Frequência de corte:** $\omega_c = \frac{1}{RC}$ rad/s:

Baixas frequências ($\omega \ll \omega_c$):

- $|H(j\omega)| \approx 1$
- $\angle H(j\omega) \approx 0^\circ$
- Sinais passam sem atenuação

Altas frequências ($\omega \gg \omega_c$):

- $|H(j\omega)| \approx \frac{1}{\omega RC}$
- $\angle H(j\omega) \approx -90^\circ$
- Forte atenuação

Na frequência de corte ($\omega = \omega_c = 1/RC$):

- $|H(j1)| = \frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0.707$ (-3 dB)
- $\angle H(j1) = -45^\circ$

- Ganho em decibel (dB):

$$|H(j\omega)|_{\text{dB}} = 20 \log_{10} |H(j\omega)|$$

⇒ Ganho unitário: $1 = 0$ dB

⇒ Ganho nulo: $0 = -\infty$ dB

Exemplo 1

- Resposta em frequência do filtro RC com $RC = 1$.

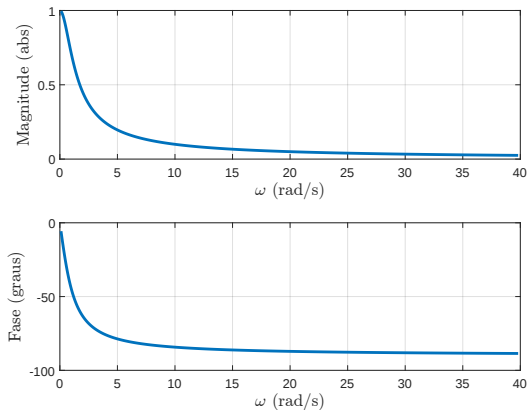


Figura: Resposta em frequência do sistema $H(s) = \frac{1}{s+1}$.

- Adiante veremos esse gráfico em escala logarítma.

Exemplo 2

Resposta em frequência

Determine a resposta em frequência (resposta de amplitude e fase) de um sistema cuja função de transferência é

$$H(s) = \frac{s + 0,1}{s + 5}$$

Determine, também, a resposta $y(t)$ do sistema se a entrada $x(t)$ for

(a) $\cos(2t)$

(b) $\cos(10t - 50^\circ)$

Neste caso,

$$H(j\omega) = \frac{j\omega + 0,1}{j\omega + 5}$$

Portanto,

$$|H(j\omega)| = \frac{\sqrt{\omega^2 + 0,01}}{\sqrt{\omega^2 + 25}} \quad \text{e} \quad \angle H(j\omega) = \tan^{-1} \left(\frac{\omega}{0,1} \right) - \tan^{-1} \left(\frac{\omega}{5} \right)$$

Exemplo 2

(a) Para a entrada $x(t) = \cos 2t$, $\omega = 2$, tem-se

$$|H(j2)| = \frac{\sqrt{(2)^2 + 0,01}}{\sqrt{(2)^2 + 25}} = 0,372, \quad \angle H(j2) = \tan^{-1} \left(\frac{2}{0,1} \right) - \tan^{-1} \left(\frac{2}{5} \right) = 87,1^\circ - 21,8^\circ = 65,3^\circ$$

Portanto,

$$y(t) = 0,372 \cos(2t + 65,3^\circ)$$

(b) Para a entrada $\cos(10t - 50^\circ)$, em vez de calcular os valores de $|H(j\omega)|$ e $\angle H(j\omega)$ como na parte (a), iremos lê-los diretamente dos gráficos de resposta em frequência correspondente a $\omega = 10$. Estes valores são:

$$|H(j10)| = 0,894 \quad \text{e} \quad \angle H(j10) = 26^\circ$$

Portanto,

$$y(t) = 0,894 \cos(10t - 50^\circ + 26^\circ) = 0,894 \cos(10t - 24^\circ)$$

Exemplo 2

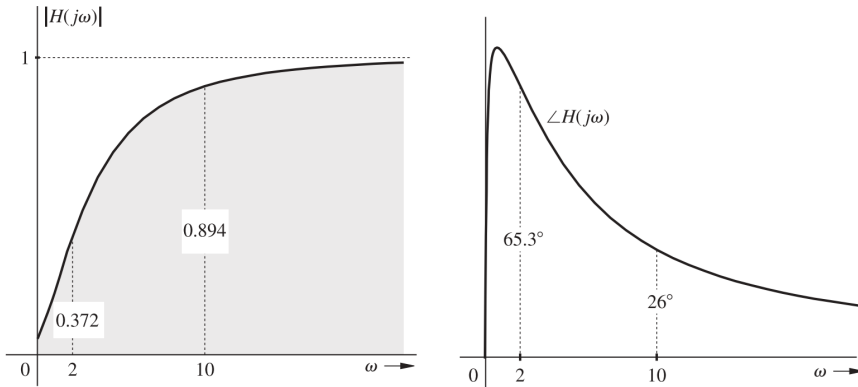


Figura: Resposta em frequência do sistema $H(s) = \frac{s + 0,1}{s + 5}$.

Exemplo 2

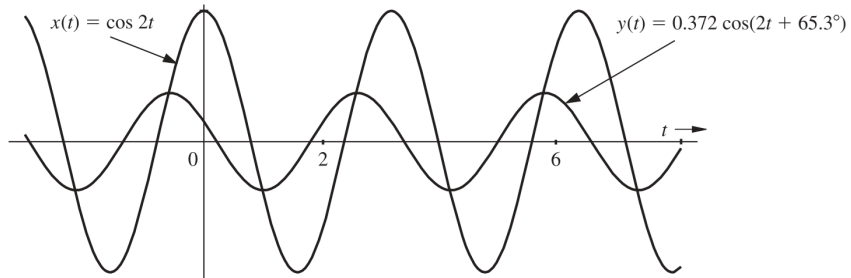


Figura: Resposta temporal do item (a).

Sistemas de 2ª ordem

- Representação de sistemas de 2ª ordem na forma padrão:

$$G(s) = \frac{K\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2},$$

em que ω_n é a frequência natural não-amortecida e ζ é o fator de amortecimento.

- Raízes da equação característica (polos de $G(s)$):

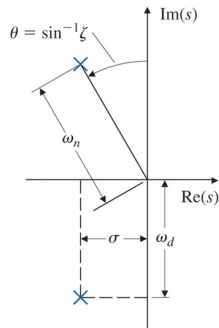
$$p_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$$

$$p_{1,2} = -\sigma \pm j\omega_d$$

$$\sigma = \zeta\omega_n$$

$$\omega_d = \omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$$

em que ω_d é a frequência de oscilação amortecida.



Par de polos complexos no plano-s.

Exemplo 3: Sistema de Segunda Ordem

Sistema de segunda ordem na forma padrão:

$$H(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \quad (10)$$

Com $\omega_n = 10$ rad/s (frequência natural) e $\zeta = 0.5$ (fator de amortecimento):

$$H(s) = \frac{100}{s^2 + 10s + 100} \quad (11)$$

↪ Polos: $p_{1,2} = -5 \pm j8.66$; $|p_{1,2}| = 10$ rad/s (frequência de corte)

Resposta em frequência:

$$H(j\omega) = \frac{100}{-\omega^2 + j10\omega + 100} = \frac{100}{(100 - \omega^2) + j10\omega} \quad (12)$$

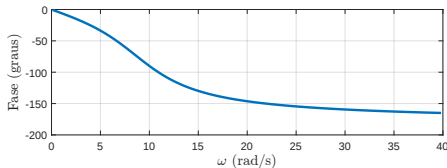
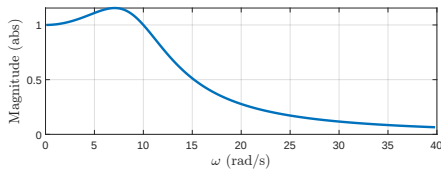
Exemplo 3: Cálculo de Amplitude e Fase

Amplitude:

$$|H(j\omega)| = \frac{100}{\sqrt{(100 - \omega^2)^2 + (10\omega)^2}} \quad (13)$$

Fase:

$$\angle H(j\omega) = -\arctan\left(\frac{10\omega}{100 - \omega^2}\right) \quad (14)$$



Características importantes:

- Em $\omega = \omega_n = 10$ rad/s: frequência de corte ($\omega_c = |p_{1,2}| = |-5 \pm j8.66| = 10$)
- $\angle H(j10) = -90^\circ$ na frequência de corte
- Pico de ressonância (frequência de ganho máximo) em $\omega_r = \omega_n \sqrt{1 - 2\zeta^2} = 10/\sqrt{2}$:
- $|H(0)|=1$; $|H(j\omega_r)| = \frac{1}{2\zeta\sqrt{1-\zeta^2}} = 1.15$; $|H(j10)|=1$; $|H(j\omega)|_{\omega \rightarrow \infty} = 0$
- Para $\zeta < 0.707$: há sobre-elevação (overshoot) na resposta temporal ao degrau

Exemplo 3: Análise da Influência de ζ

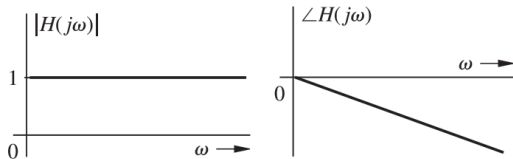
```
1 % Comparar diferentes valores de zeta
2 wn = 10; % frequencia natural
3 zeta_vals = [0.1, 0.3, 0.5, 0.707, 1.0];
4 w = logspace(-1, 2, 1000);
5
6 figure;
7 hold on;
8 for i = 1:length(zeta_vals)
9     zeta = zeta_vals(i);
10    num = wn^2;
11    den = [1, 2*zeta*wn, wn^2];
12    H = tf(num, den);
13    [mag, ~] = bode(H, w);
14    mag = squeeze(mag);
15    semilogx(w, 20*log10(mag), 'DisplayName', ...
16             sprintf('\zeta = %.2f', zeta));
17 end
18 hold off;
19 grid on;
20 xlabel('Frequencia (rad/s)');
21 ylabel('Magnitude (dB)');
22 title('Efeito de \zeta na Resposta em Frequencia');
23 legend('Location', 'best');
```

Atrasador ideal

(a) **Atrasador ideal de T segundos.**

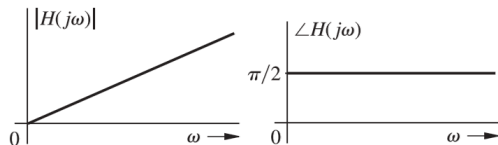
$$H(s) = e^{-sT} \Rightarrow H(j\omega) = e^{-j\omega T} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} |H(j\omega)| = 1 \\ \angle H(j\omega) = -\omega T \end{cases}$$



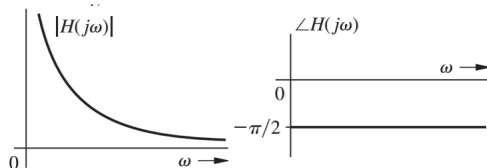
(b) Diferenciador ideal.

$$H(s) = s \Rightarrow H(j\omega) = j\omega = \omega e^{j\pi/2} \Rightarrow \begin{cases} |H(j\omega)| = \omega \\ \angle H(j\omega) = \frac{\pi}{2} \end{cases}$$



(c) Integrador ideal.

$$H(s) = \frac{1}{s} \Rightarrow H(j\omega) = \frac{1}{j\omega} = \frac{-j}{\omega} = \frac{1}{\omega} e^{-j\pi/2} \Rightarrow \begin{cases} |H(j\omega)| = \frac{1}{\omega} \\ \angle H(j\omega) = -\frac{\pi}{2} \end{cases}$$



Resposta em Regime Permanente para Senóides Causais

Situação: Entrada senoidal causal $x(t) = \cos(\omega t)u(t)$

A resposta total consiste de:

- **Resposta transitória:** devido às condições iniciais e descontinuidade em $t = 0$
- **Resposta de regime permanente:** permanece após transitório decair

Para sistemas BIBO estáveis:

$$y_{rp}(t) = |H(j\omega)| \cos(\omega t + \angle H(j\omega)) \quad (15)$$

Observação: A resposta transitória decai exponencialmente para sistemas estáveis. Apenas a resposta em regime permanente persiste.

Resposta em Regime Permanente para Senóides Causais

- Entradas senoidais causais: $e^{j\omega t}u(t) \Leftrightarrow X(s) = 1/(s - j\omega)$.
- Função de transferência: $H(s) = P(s)/Q(s)$, com $Q(s) = (s - \lambda_1)(s - \lambda_2) \dots (s - \lambda_N)$ (polinômio característico, caso raízes não repetidas). Logo,

$$Y(s) = X(s)H(s) = \frac{P(s)}{(s - \lambda_1)(s - \lambda_2) \dots (s - \lambda_N)(s - j\omega)}$$

Na expansão em frações parciais os coeficientes correspondentes ao último termo $(s - j\omega)$ é $P(s)/Q(s)|_{s=j\omega} = H(j\omega)$. Logo,

$$Y(s) = \sum_{i=1}^n \frac{k_i}{s - \lambda_i} + \frac{H(j\omega)}{s - j\omega} \Rightarrow y(t) = \sum_{i=1}^n \underbrace{k_i e^{\lambda_i t} u(t)}_{\text{componente transitório } y_{tr}(t)} + \underbrace{H(j\omega) e^{j\omega t} u(t)}_{\text{componente de regime estacionário } y_{ss}(t)}$$

- Para um sistema assintoticamente estável, os termos de modos característicos $e^{\lambda_i t} \rightsquigarrow 0$ (**resposta transitória**)
- Termo $H(j\omega)e^{j\omega t}$ (**regime permanente**, em inglês *steady state*):

$$y_{ss}(t) = H(j\omega)e^{j\omega t}u(t)$$

Exemplo: Resposta Transitória vs. Permanente

Sistema: $H(s) = \frac{10}{s+10}$

Entrada: $x(t) = \cos(5t)u(t)$

Resposta em frequência em $\omega = 5$:

$$H(j5) = \frac{10}{j5 + 10} = \frac{10}{10 + j5} \quad (16)$$

$$|H(j5)| = \frac{10}{\sqrt{100 + 25}} = \frac{10}{\sqrt{125}} \approx 0.894 \quad (17)$$

$$\angle H(j5) = -\arctan(0.5) \approx -26.57^\circ \quad (18)$$

Resposta total:

$$y(t) = 0.894 \cos(5t - 26.57^\circ) + Ae^{-10t} \quad (19)$$

O termo Ae^{-10t} (transitório) decai rapidamente, restando apenas a resposta senoidal permanente.

Visualização: Transitório vs. Regime Permanente

```
1 % Sistema e entrada
2 num = 10;
3 den = [1, 10];
4 H = tf(num, den);
5 t = 0:0.01:2;
6 u = cos(5*t);
7
8 % Calcular resposta
9 y = lsim(H, u, t);
10
11 % Calcular resposta em regime permanente teorica
12 Hmag = abs(freqresp(H, 5));
13 Hphase = angle(freqresp(H, 5));
14 y_ss = Hmag * cos(5*t + Hphase);
15
16 % Plotar
17 figure;
18 plot(t, y, 'b', 'LineWidth', 1.5);
19 hold on;
20 plot(t, y_ss, 'r—', 'LineWidth', 1.5);
21 grid on;
22 xlabel('Tempo (s)');
23 ylabel('Amplitude');
24 legend('Resposta Total', 'Regime Permanente');
25 title('Resposta Transitoria vs. Permanente');
```

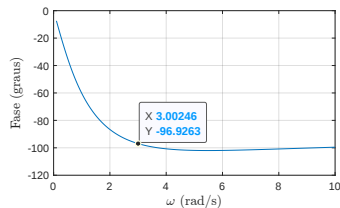
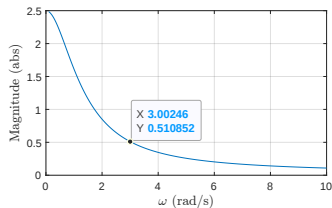
Exercício

Determine a resposta de um sistema LCIT especificado por

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 3\frac{dy}{dt} + 2y(t) = \frac{dx}{dt} + 5x(t)$$

se a entrada for a senóide $20 \sin(3t + 35^\circ)$ e condições iniciais nulas.

- Função de transferência: $H(s) = \frac{s + 5}{s^2 + 3s + 2}$



Resposta: $10,23 \sin(3t - 61,91^\circ)$

Introdução aos Diagramas de Bode

Diagramas de Bode: Representação gráfica da resposta em frequência em escalas logarítmicas.

Composição:

- 1 **Diagrama de amplitude:** $20 \log_{10} |H(j\omega)|$ (em dB) vs. $\log \omega$
- 2 **Diagrama de fase:** $\angle H(j\omega)$ (em graus) vs. $\log \omega$

Vantagens:

- Visualização em ampla faixa de frequências
- Construção simplificada por aproximações assintóticas
- Multiplicação de funções $\rightarrow$ adição de diagramas
- Interpretação intuitiva do comportamento do sistema

Introdução aos Diagramas de Bode

- Motivação: traçar diagrama de ganho e fase de $H(s)$

$$H(s) = \frac{K(s + a_1)(s + a_2)}{s(s + b_1)(s^2 + b_2s + b_3)}$$

- Reorganizando:

$$H(s) = \frac{Ka_1a_2}{b_1b_3} \frac{\left(\frac{s}{a_1} + 1\right) \left(\frac{s}{a_2} + 1\right)}{s \left(\frac{s}{b_1} + 1\right) \left(\frac{s^2}{b_3} + \frac{b_2}{b_3}s + 1\right)}$$

$$H(j\omega) = \frac{Ka_1a_2}{b_1b_3} \frac{\left(1 + \frac{j\omega}{a_1}\right) \left(1 + \frac{j\omega}{a_2}\right)}{j\omega \left(1 + \frac{j\omega}{b_1}\right) \left(1 + j\frac{b_2\omega}{b_3} + \frac{(j\omega)^2}{b_3}\right)}$$

→ Como traçar $|H(j\omega)|$ e $\angle H(j\omega)$ em função de ω (rad/s)?

Escala Logarítmica e Decibéis

Ganho em Decibéis (dB):

$$H_{dB} = 20 \log_{10} |H(j\omega)| \quad (20)$$

Exemplos de conversão:

$ H(j\omega) $	H_{dB}	Significado
1	0 dB	Sem alteração
2	6 dB	Duplica amplitude
10	20 dB	Amplifica 10×
0.5	-6 dB	Reduz pela metade
0.1	-20 dB	Atenua 10×
$1/\sqrt{2}$	-3 dB	Frequência de corte

Frequência de corte ou de canto

Frequência em que ocorre uma queda no ganho do sinal de 3 dB ($20 \log_{10}(1/\sqrt{2}) = -3\text{dB}$). A potência do sinal de saída do sistema é reduzido a metade da potência da faixa de passagem.

Década: Intervalo onde a frequência varia de um fator de 10 (ex: 1 a 10 rad/s).

Oitava: Intervalo onde a frequência dobra (ex: 1 a 2 rad/s).

Propriedades

$$\log \frac{[(ab)]^n}{cd} = n \log a + n \log b - \log c - \log d$$

- Escala decibel: $20 \log_{10} |G(j\omega)|$ [dB]

- Exemplo: $G(j\omega) = \frac{K}{1 + j\omega\tau} = K \cdot \frac{1}{1 + j\omega\tau} = G_1(j\omega) \cdot G_2(j\omega)$

$$\log_{10} |G_1(j\omega)| = \log_{10} |K|$$

$$\log_{10} |G_2(j\omega)| = \log_{10} \left(\frac{1}{1 + (\omega\tau)^2} \right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \log_{10} 1 - \frac{1}{2} \log_{10} (1 + (\omega\tau)^2) = -\frac{1}{2} \log_{10} (1 + (\omega\tau)^2)$$

- Observe que $\log_{10} |G(j\omega)| = \log_{10} |K| - \frac{1}{2} \log_{10} (1 + (\omega\tau)^2)$

Ganho

$$\omega \rightarrow 0 \quad (\omega\tau \ll 1) \quad \Rightarrow \quad 20 \log_{10} |G_2(j\omega)| = -\frac{20}{2} \log_{10} 1 = 0$$

$$\Rightarrow \quad 20 \log_{10} |G(j\omega)| = 20 \log_{10} |K|$$

$$\omega \rightarrow \infty \quad (\omega\tau \gg 1) \quad \Rightarrow \quad 20 \log_{10} |G_2(j\omega)| = -\frac{20}{2} \log_{10}(\omega\tau)^2 = -20 \log_{10}(\omega\tau)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad 20 \log_{10} |G(j\omega)| &= 20 \log_{10} |K| - 20 \log_{10}(\omega\tau) \\ &= 20 \log_{10} |K| - 20 \log_{10}(\omega) - 20 \log_{10}(\tau) \end{aligned}$$

Frequência de corte

$$\omega_c = \frac{1}{\tau} \quad \Rightarrow \quad |G_2(j\omega_c)| = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \Rightarrow \quad 20 \log_{10} |G_2(j\omega_c)| = -\frac{20}{2} \log_{10} 2 = -3$$

$$\text{Em dB: } 20 \log_{10} |G_2(j\omega_c)| = -10 \log_{10} 2 = -3 \text{ dB}$$

Fase

$$\omega \rightarrow 0 \quad (\omega\tau \ll 1) \quad \Rightarrow \quad \phi = \phi_2 = -\text{tg}^{-1}0 = 0^\circ$$

$$\omega \rightarrow \infty \quad (\omega\tau \gg 1) \quad \Rightarrow \quad \phi = \phi_2 = \lim_{\omega \rightarrow \infty} -\text{tg}^{-1}(\omega\tau) = -90^\circ$$

Frequência de corte

$$\omega_c = \frac{1}{\tau} \quad \Rightarrow \quad \phi = \phi_2 = -\text{tg}^{-1}(1) = -45^\circ$$

Taxa de decaimento

Comparando o ganho [dB] em diferentes frequências em altas frequências:

- Para $\omega_2 = 10\omega_1$

$$\begin{aligned}(-20 \log_{10} \omega_2 \tau) - (-20 \log_{10} \omega_1 \tau) &= -20 \log_{10} \frac{\omega_2 \tau}{\omega_1 \tau} \\&= -20 \log_{10} 10 \\&= -20 \text{ dB/década}\end{aligned}$$

- Para $\omega_2 = 2\omega_1 \Rightarrow -6 \text{ dB/oitava}$

Propriedades Importantes dos Diagramas de Bode

Se $H(s) = H_1(s) \cdot H_2(s)$, então:

$$H(j\omega) = H_1(j\omega) \cdot H_2(j\omega) \quad (21)$$

Em decibéis:

$$20 \log |H(j\omega)| = 20 \log |H_1(j\omega)| + 20 \log |H_2(j\omega)| \quad (22)$$

Para a fase:

$$\angle H(j\omega) = \angle H_1(j\omega) + \angle H_2(j\omega) \quad (23)$$

Conclusão: Diagramas de sistemas em cascata são somados graficamente!

Forma Normalizada da Função de Transferência

Para facilitar a análise, escrevemos $H(s)$ na forma:

$$H(s) = K \frac{s^n (s/z_1 + 1)(s/z_2 + 1) \cdots}{(s/p_1 + 1)(s/p_2 + 1) \cdots} \quad (24)$$

onde:

- K = constante (ganho)
- z_i = zeros
- p_i = polos ($p_i > 0$ polos estáveis)
- n = inteiro (positivo: zeros na origem; negativo: polos na origem)

Componentes básicos:

- 1 Constante K
- 2 Pólos/zeros na origem $(j\omega)^{\pm n}$
- 3 Pólos/zeros de primeira ordem $(1 + j\omega/\omega_i)^{\pm 1}$
- 4 Pólos/zeros de segunda ordem $(1 + j2\zeta\omega/\omega_n - \omega^2/\omega_n^2)^{\pm 1}$

Diagrama de Bode: Constante K

Fator: $H(j\omega) = K$

Amplitude:

$$20 \log_{10} K \text{ dB (constante para todo } \omega) \quad (25)$$

Fase:

$$\angle K = \begin{cases} 0^\circ & \text{se } K > 0 \\ \pm 180^\circ & \text{se } K < 0 \end{cases} \quad (26)$$

Interpretação gráfica:

- Linha horizontal no diagrama de amplitude
- Pode-se renomear o eixo de 0 dB para $20 \log_{10} K$ dB
- Deslocamento vertical de todo o diagrama

Diagrama de Bode: Pólo/Zero na Origem

Zero na origem: $H(j\omega) = j\omega$

Amplitude:

$$20 \log_{10} \omega \text{ dB} \quad (27)$$

- Quando ω multiplica por 10 (1 década): +20 dB
- Inclinação: **+20 dB/década** ou +6 dB/oitava
- Passa por 0 dB em $\omega = 1 \text{ rad/s}$

Fase: $\angle(j\omega) = +90^\circ$ (constante)

Pólo na origem: $H(j\omega) = \frac{1}{j\omega}$

- Inclinação: **-20 dB/década**
- Fase: -90° (constante)

Diagrama de Bode: polo e zero na origem

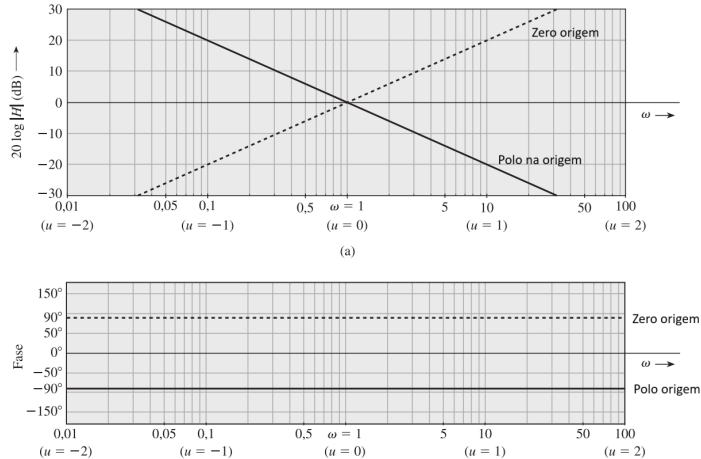


Figura: Respostas de (a) amplitude e (b) fase para um polo ou zero na origem.

Exemplo: Múltiplos Pólos/Zeros na Origem

Função: $H(j\omega) = (j\omega)^n$

Amplitude:

$$20 \log_{10} |(j\omega)^n| = 20n \log_{10} \omega \text{ dB} \quad (28)$$

- Inclinação: $\pm 20n$ dB/década
- $n = 2$ zeros: $+40$ dB/década
- $n = -2$ polos: -40 dB/década

Fase:

$$\angle (j\omega)^n = n \times 90^\circ \quad (29)$$

- $n = 2$: $+180^\circ$
- $n = -2$: -180°

Visualização: Pólos e Zeros na Origem

```
1 % Comparar diferentes numeros de polos/zeros na origem
2 w = logspace(-2, 2, 1000);
3
4 figure;
5 subplot(2,1,1);
6 hold on;
7 for n = -2:2
8     if n ~= 0
9         mag_db = 20*n*log10(w);
10        semilogx(w, mag_db, 'DisplayName', ...
11                sprintf('n = %d', n), 'LineWidth', 1.5);
12    end
13 end
14 hold off;
15 grid on;
16 xlabel('Frequencia (rad/s)');
17 ylabel('Magnitude (dB)');
18 title('Polos/Zeros na Origem: Amplitude');
19 legend('Location', 'best');
20
21 subplot(2,1,2);
22 % Similar para fase...
```

Diagrama de Bode: Pólo de Primeira Ordem

Função: $H(j\omega) = \frac{1}{1+j\omega/\omega_p}$ onde $\omega_p = |p|$ é a frequência de canto (corte).

Amplitude:

$$|H(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega/\omega_p)^2}} \quad (30)$$

Em dB:

$$20 \log |H(j\omega)| = -10 \log[1 + (\omega/\omega_p)^2] \quad (31)$$

Aproximações assintóticas:

- $\omega \ll \omega_p$: $20 \log |H(j\omega)| \approx 0$ dB
- $\omega \gg \omega_p$: $20 \log |H(j\omega)| \approx -20 \log(\omega/\omega_p)$
- Inclinação: -20 dB/década para $\omega > \omega_p$

Fase:

$$\angle H(j\omega) = \angle 1 - \angle(1 + j\omega/\omega_p) = 0 - \arctan(\omega/\omega_p) = -\arctan(\omega/\omega_p) \quad (32)$$

Valores importantes:

- $\omega = 0$: fase = 0°
- $\omega = \omega_p$: fase = -45°
- $\omega \rightarrow \infty$: fase $\rightarrow -90^\circ$

Aproximação assintótica para fase:

- $\omega < \omega_p/10$: fase $\approx 0^\circ$
- $\omega_p/10 < \omega < 10\omega_p$: transição linear ($-45^\circ/\text{década}$)
- $\omega > 10\omega_p$: fase $\approx -90^\circ$

Diagrama de Bode: polo de primeira ordem

- Diagrama de Bode de filtro passa-baixa $H(j\omega) = \frac{1}{1 + j\omega RC}$ com $RC = 1$.

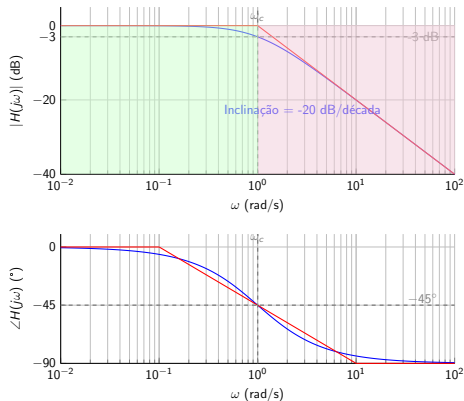


Figura: Diagrama de Bode de sistema de primeira ordem $H(s) = \frac{1}{s+1}$, com frequência de corte de $\omega_c = 1$ rad/s. Exemplo: filtro passa-baixa com $RC = 1$.

Exemplo 1: Simulação no MATLAB/Octave

```
1 % Definir a funcao de transferencia
2 R = 1000; % 1 kohm
3 C = 1e-6; % 1 uF
4 num = 1;
5 den = [R*C, 1];
6 H = tf(num, den);
7
8 % Calcular resposta em frequencia
9 w = logspace(-1, 3, 1000); % 0.1 a 1000 rad/s
10 [mag, phase] = bode(H, w);
11 mag = squeeze(mag);
12 phase = squeeze(phase);
13
14 % Plotar resultados
15 figure; subplot(2,1,1);
16 semilogx(w, 20*log10(mag)); grid on;
17 xlabel('Frequencia (rad/s)'); ylabel('Magnitude (dB)');
18 title('Resposta em Amplitude');
19
20 subplot(2,1,2);
21 semilogx(w, phase); grid on;
22 xlabel('Frequencia (rad/s)'); ylabel('Fase (graus)');
23 title('Resposta em Fase');
```

Erro na Aproximação Assintótica

Erro máximo ocorre na frequência de canto $\omega = \omega_p$:

Para amplitude:

- Valor exato: $20 \log(1/\sqrt{2}) = -3 \text{ dB}$
- Aproximação assintótica: 0 dB
- **Erro: -3 dB**

Para fase:

- Valor exato: -45°
- Aproximação: depende do método escolhido
- Com assíntota em degrau: erro pode ser corrigido

Frequências auxiliares:

- $\omega = \omega_p/2$: erro $\approx -1 \text{ dB}$
- $\omega = 2\omega_p$: erro $\approx -1 \text{ dB}$

Diagrama de Bode: Zero de Primeira Ordem

Função: $H(j\omega) = 1 + j\omega/\omega_z$

O diagrama é a **imagem espelhada** (em relação ao eixo de 0 dB/0°) do polo:

Amplitude:

- $\omega \ll \omega_z$: 0 dB
- $\omega \gg \omega_z$: **+20 dB/década**
- Em $\omega = \omega_z$: +3 dB

Fase:

- $\omega = 0$: 0°
- $\omega = \omega_z$: +45°
- $\omega \rightarrow \infty$: +90°

Diagrama de Bode: zero de primeira ordem

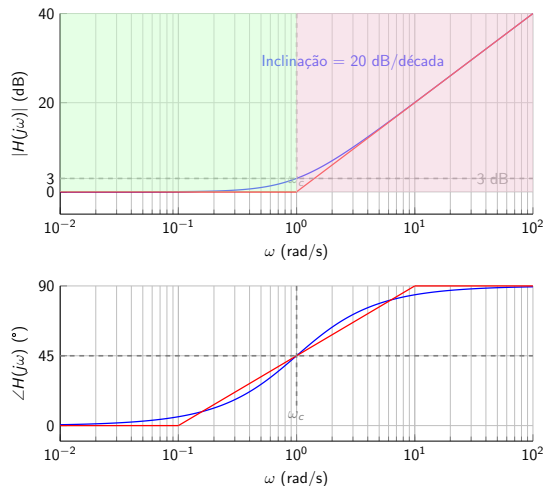


Figura: Diagrama de Bode de sistema de primeira ordem $H(s) = s + 1$, com frequência de corte de $\omega_c = 1$ rad/s.

Exemplo MATLAB: Pólo e Zero de 1ª Ordem

```
1 % Comparacao entre polo e zero de primeira ordem
2 wp = 10; % frequencia de canto do polo
3 wz = 10; % frequencia de canto do zero
4 w = logspace(-1, 3, 1000);
5
6 % Polo de primeira ordem
7 H_polo = tf(1, [1/wp, 1]);
8 [mag_p, phase_p] = bode(H_polo, w);
9 mag_p = squeeze(mag_p);
10 phase_p = squeeze(phase_p);
11
12 % Zero de primeira ordem
13 H_zero = tf([1/wz, 1], 1);
14 [mag_z, phase_z] = bode(H_zero, w);
15 mag_z = squeeze(mag_z);
16 phase_z = squeeze(phase_z);
17
18 % Plotar comparacao
19 figure; subplot(2,1,1);
20 semilogx(w, 20*log10(mag_p), 'b', w, 20*log10(mag_z), 'r', 'LineWidth', 1.5);
21 grid on; legend('Polo', 'Zero'); xlabel('Frequencia (rad/s)'); ylabel('Magnitude (dB)');
22
23 subplot(2,1,2);
24 semilogx(w, phase_p, 'b', w, phase_z, 'r', 'LineWidth', 1.5);
25 grid on; legend('Polo', 'Zero'); xlabel('Frequencia (rad/s)'); ylabel('Fase (graus)');
```

Diagrama de Bode: exemplo

$$H(s) = \frac{0.1s + 10}{s + 1} = \frac{10\left(\frac{s}{100} + 1\right)}{s + 1}$$

- Ganho estático ($\omega = 0$): $|H(0)| = 10$ (20 dB)
- Polo em $s = -1$ e zero em $s = -100 \rightsquigarrow$ frequências de corte em 1 rad/s e 100 rad/s
- Em $\omega = 1$ rad/s $\rightsquigarrow |H(j1)| = 10 \times \frac{1}{\sqrt{2}} = 7,07$ (20 dB -3 dB = 17 dB). Obs.: o zero $s = -100$ não influencia a magnitude em $\omega = 1$ rad/s.

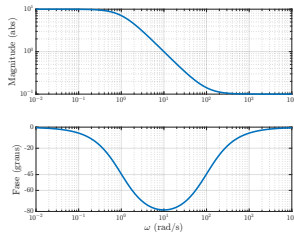
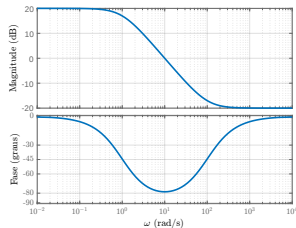


Figura: Diagrama de Bode de $H(s)$. Na esquerda, a magnitude de $H(j\omega)$ é mostrada em dB ($20 \log_{10}(|H(j\omega)|)$) e na direita a magnitude $|H(j\omega)|$ é mostrada em valores absolutos. Em ambos os gráficos a resposta da fase $\angle H(j\omega)$ é mostrada em graus.

Diagrama de Bode: exemplo

- Dado o diagrama de Bode de $H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)}$ na figura abaixo, é possível calcular a saída $y(t)$ para uma entrada

$$x(t) = 1 + 2 \cos(t) + 4 \cos(10t) + 10 \cos(10^4 t)$$

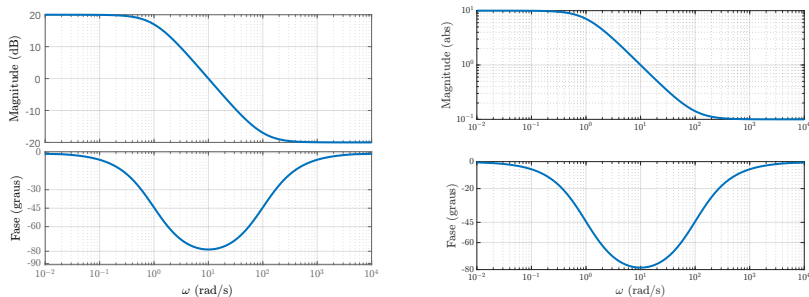


Figura: Diagrama de Bode de $H(s)$. Na esquerda, a magnitude de $H(j\omega)$ é mostrada em dB ($20 \log_{10}(|H(j\omega)|)$) e na direita a magnitude $|H(j\omega)|$ é mostrada em valores absolutos. Em ambos os gráficos a resposta da fase $\angle H(j\omega)$ é mostrada em graus.

Diagrama de Bode: Pólo de Segunda Ordem

Forma padrão:

$$H(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \Rightarrow H(j\omega) = \frac{1}{1 + j2\zeta(\omega/\omega_n) - (\omega/\omega_n)^2} \quad (33)$$

onde:

- ω_n = frequência natural (não amortecida)
- ζ = fator de amortecimento ($0 < \zeta < 1$ para polos complexos)

Amplitude:

$$|H(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{[1 - (\omega/\omega_n)^2]^2 + [2\zeta\omega/\omega_n]^2}} \quad (34)$$

Fase:

$$\angle H(j\omega) = -\arctan\left(\frac{2\zeta\omega/\omega_n}{1 - (\omega/\omega_n)^2}\right) \quad (35)$$

Pólo de Segunda Ordem: Aproximações Assintóticas

Para amplitude:

Baixas frequências ($\omega \ll \omega_n$):

$$20 \log |H(j\omega)| \approx 0 \text{ dB} \quad (36)$$

Altas frequências ($\omega \gg \omega_n$):

$$20 \log |H(j\omega)| \approx -40 \log(\omega/\omega_n) \text{ dB} \quad (37)$$

- Inclinação: **-40 dB/década** ou -12 dB/oitava
- Equivale a dois polos de primeira ordem

Na frequência natural ($\omega = \omega_n$):

- Dependência forte de ζ
- Pode haver pico de ressonância se $\zeta < 0.707$

Ressonância em Pólos de Segunda Ordem

Frequência de pico: $\omega_r = \omega_n \sqrt{1 - 2\zeta^2}$ (para $\zeta < 1/\sqrt{2}$)

Amplitude no pico:

$$|H(j\omega_r)| = \frac{1}{2\zeta\sqrt{1 - \zeta^2}} \quad (38)$$

Erro na frequência de canto ($\omega = \omega_n$):

ζ	Erro (dB)
0.1	+13.9
0.3	+5.7
0.5	+1.9
0.707	0
1.0	-3.0

Para $\zeta \geq 0.707$: sem ressonância, comportamento suave.

Pólo de Segunda Ordem: Comportamento da Fase

Valores importantes:

- $\omega \ll \omega_n$: fase $\approx 0^\circ$
- $\omega = \omega_n$: fase $= -90^\circ$ (independente de ζ !)
- $\omega \gg \omega_n$: fase $\rightarrow -180^\circ$

Aproximação assintótica:

- Função degrau: 0° para $\omega < \omega_n$, -180° para $\omega > \omega_n$
- Correção depende de ζ (ver figura 4.42 do Lathi)

Pólo de Segunda Ordem

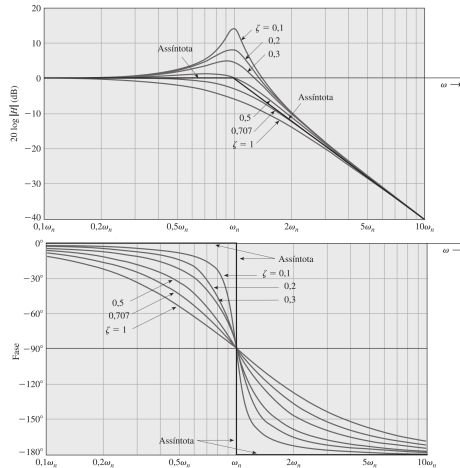


Figura: Resposta de amplitude e fase para polo de segunda ordem. Fonte: Lathi, 2000.

Exemplo MATLAB: Efeito de ζ em Pólos de 2ª Ordem

```
1 % Analise do efeito de zeta
2 wn = 10; % frequencia natural
3 zeta_vals = [0.1, 0.3, 0.5, 0.707, 1.0, 2.0];
4 w = logspace(-1, 2, 1000);
5
6 figure;
7 subplot(2,1,1);
8 hold on;
9 for i = 1:length(zeta_vals)
10     zeta = zeta_vals(i);
11     num = wn^2;
12     den = [1, 2*zeta*wn, wn^2];
13     H = tf(num, den);
14     [mag, ~] = bode(H, w);
15     mag = squeeze(mag);
16     semilogx(w, 20*log10(mag), 'LineWidth', 1.5, ...
17             'DisplayName', sprintf('\zeta = %.2f', zeta));
18 end
19 hold off; grid on;
20 xlabel('Frequencia (rad/s)');
21 ylabel('Magnitude (dB)');
22 title('Efeito de \zeta na Resposta em Frequencia');
23 legend('Location', 'best');
24
25 % Similar para fase no subplot(2,1,2)...
```

Etapa 1: Escrever $H(s)$ na forma normalizada:

$$H(s) = K \frac{\prod (s/z_i + 1) \cdots}{\prod (s/p_i + 1) \cdots} s^n \quad (39)$$

Etapa 2: Substituir $s = j\omega$ e identificar:

- Constante K
- Pólos/zeros na origem
- Pólos/zeros de primeira ordem (frequências de canto)
- Pólos/zeros de segunda ordem (ω_n e ζ)

Etapa 3: Desenhar assíntotas de cada componente.

Etapa 4: Somar graficamente todas as assíntotas.

Etapa 5: Aplicar correções nas frequências de canto.

Exemplo de Traçado do Diagrama de Bode

- O diagrama de Bode de uma FT, $G(s)$, composta de vários polos e zeros é obtido adicionando-se a curva de cada polo e zero individualmente
- Considere a FT

$$G(j\omega) = \frac{5(1 + j0,1\omega)}{j\omega(1 + j0,5\omega) \left[1 + j0,6 \left(\frac{\omega}{50} \right) + \left(\frac{j\omega}{50} \right)^2 \right]}$$

⇒ Ganho constante $K = 5$ ($20 \log_{10} 5 = 14\text{dB}$) ①

⇒ Um polo na origem ②, um polo em $\omega = 2\text{rad/s}$ ③, um par de polos complexos em $\omega = \omega_n = 50\text{rad/s}$ ⑤

⇒ Um zero em $\omega = 10\text{rad/s}$ ④

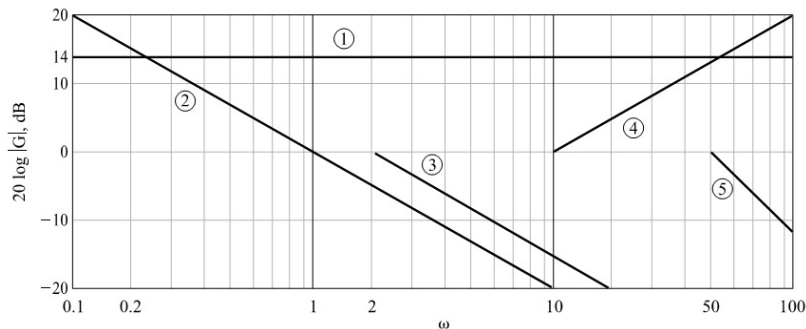
Exemplo de Traçado do Diagrama de Bode

● Assíntotas do ganho

↪ Ganho constante $K = 5$ ($20 \log_{10} 5 = 14\text{dB}$) ①

↪ Um polo na origem ②, um polo em $\omega = 2\text{rad/s}$ ③, um par de polos complexos em $\omega = \omega_n = 50\text{rad/s}$ ⑤

↪ Um zero em $\omega = 10\text{rad/s}$ ④



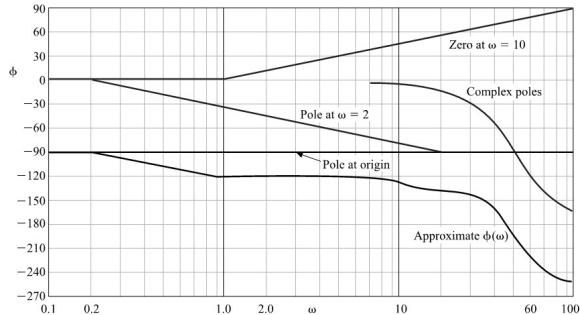
Exemplo de Traçado do Diagrama de Bode

● Assíntotas da fase

⇒ Ganho constante $K = 5$ ($20 \log_{10} 5 = 14\text{dB}$) ①

⇒ Um polo na origem ②, um polo em $\omega = 2\text{rad/s}$ ③, um par de polos complexos em $\omega = \omega_n = 50\text{rad/s}$ ⑤

⇒ Um zero em $\omega = 10\text{rad/s}$ ④



Esboce as assíntotas dos seguintes diagramas de Bode.

$$① \quad H_1(s) = \frac{100}{(s+1)(s+10)}$$

$$② \quad H_2(s) = \frac{10}{(s+1)^2}$$

$$③ \quad H_3(s) = \frac{100(s+10)}{(s+1)(s+100)}$$

$$④ \quad H_4(s) = \frac{(s+10)}{s+1}$$

$$⑤ \quad H_5(s) = \frac{10(s+1)}{s+10}$$

$$⑥ \quad H_6(s) = \frac{30}{s^2 + 2s + 3}$$

Exercício

- 1 Através da escolha dos polos e zeros, forneça um função de transferência de um *filtro passa-banda* de frequência central $\omega_0 = 10$ rad/s, tal que para $\omega \in [1, 100]$ rad/s o ganho seja próximo de 1 e atenuado nas outras frequência.

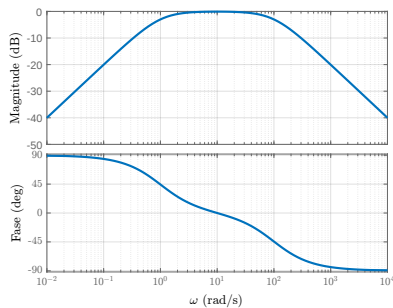


Figura: Solução: filtro passa-banda $H(s) = \frac{s}{(s+1)(s/100+1)}$.

Exercício

- 1 Através da escolha dos polos e zeros, forneça um função de transferência de um *filtro rejeita-banda* de frequência central $\omega_0 = 10$ rad/s, tal que para $\omega < 1$ rad/s e $\omega > 100$ o ganho seja próximo de 1 e atenuado em torno de $\omega = 10$.

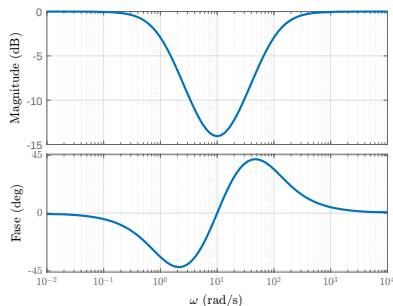


Figura: Solução: filtro rejeita-banda $H(s) = \frac{(s/10 + 1)^2}{(s + 1)(s/100 + 1)}$.

Exemplo 4.25: Sistema com Pólos e Zeros Reais

Função de transferência:

$$H(s) = \frac{20s(s + 100)}{(s + 2)(s + 10)} \quad (40)$$

Passo 1: Forma normalizada:

$$H(s) = 100 \cdot \frac{s(s/100 + 1)}{(s/2 + 1)(s/10 + 1)} \quad (41)$$

Componentes:

- Constante: 100 ($20 \log_{10} 100 = 40$ dB)
- Zero na origem: s (inclinação +20 dB/década)
- Zero em $s = -100$: frequência de corte (ou de canto) $\omega_z = 100$ rad/s
- Pólo em $s = -2$: frequência de corte $\omega_{p1} = 2$ rad/s
- Pólo em $s = -10$: frequência de corte $\omega_{p2} = 10$ rad/s

Exemplo 4.25: Construção do Diagrama de Amplitude

Passo 2: Desenhar assíntotas individuais:

- ① Constante 40 dB: linha horizontal
- ② Zero na origem: +20 dB/década passando por 0 dB em $\omega = 1$
- ③ Pólo em -2: -20 dB/década para $\omega > 2$
- ④ Pólo em -10: -20 dB/década para $\omega > 10$
- ⑤ Zero em -100: +20 dB/década para $\omega > 100$

Passo 3: Somar assíntotas:

- $\omega < 2$: +20 dB/década (devido ao zero na origem)
- $2 < \omega < 10$: 0 dB/década (+20 - 20)
- $10 < \omega < 100$: -20 dB/década (+20 - 20 - 20)
- $\omega > 100$: 0 dB/década (+20 - 20 - 20 + 20)

Passo 4: Aplicar correções de -3 dB em $\omega = 2, 10, 100$.

Exemplo 4.25: Diagrama de Fase

Assíntotas de fase:

- ① Zero na origem: $+90^\circ$ (constante)
- ② Pólo em -2:
 - $\omega < 0.2$: 0°
 - $0.2 < \omega < 20$: $-45^\circ/\text{década}$
 - $\omega > 20$: -90°
- ③ Pólo em -10:
 - $\omega < 1$: 0°
 - $1 < \omega < 100$: $-45^\circ/\text{década}$
 - $\omega > 100$: -90°
- ④ Zero em -100: similar, mas positivo

Fase total: Soma das contribuições individuais.

Exemplo 4.25

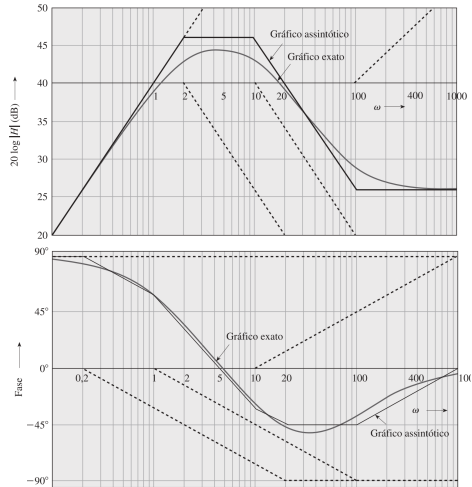


Figura: Diagramas de Bode para Exemplo 4.25. Fonte: Lathi, 2000.

Exemplo 4.25: Implementação no MATLAB

```
1 % Exemplo 4.25
2 num = 100 * conv([1 0], [1 100]); % 100*s*(s+100)
3 den = conv([1 2], [1 10]); % (s+2)*(s+10)
4 H = tf(num, den);
5
6 % Gerar diagrama de Bode
7 w = logspace(-1, 3, 1000);
8 figure;
9 bode(H, w);
10 grid on;
11 title('Diagrama de Bode — Exemplo 4.25');
12
13 % Alternativa: usar margin para ver margens
14 figure;
15 margin(H);
16 grid on;
17
18 % Verificar ganho em frequências específicas
19 freq_test = [1, 2, 10, 100];
20 for i = 1:length(freq_test)
21     w = freq_test(i);
22     [mag, phase] = bode(H, w);
23     fprintf('w = %.1f rad/s: |H| = %.2f (%.2f dB), fase = %.1f graus\n', ...
24             w, mag, 20*log10(mag), phase);
25 end
```

Exemplo 4.26: Sistema com Pólos Complexos

Função de transferência:

$$H(s) = \frac{10(s + 100)}{s^2 + 2s + 100} \quad (42)$$

Passo 1: Identificar a forma padrão do denominador:

$$s^2 + 2s + 100 = s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2 \quad (43)$$

Comparando: $\omega_n^2 = 100 \Rightarrow \omega_n = 10 \text{ rad/s}$

$2\zeta\omega_n = 2 \Rightarrow \zeta = \frac{2}{2 \times 10} = 0.1$

Forma normalizada:

$$H(s) = 10 \cdot \frac{(s/100 + 1)}{(s^2/100 + 0.2s/10 + 1)} \quad (44)$$

Exemplo 4.26: Componentes

Elementos identificados:

- Constante: 10 ($20 \log_{10} 10 = 20$ dB)
- Zero real em $s = -100$ ($\omega_z = 100$ rad/s)
- Par de polos complexos conjugados:
 - $\omega_n = 10$ rad/s
 - $\zeta = 0.1$ (baixo amortecimento!)

Consequências do baixo ζ :

- Forte pico de ressonância em $\omega \approx \omega_n$
- Magnitude na ressonância: $\frac{1}{2\zeta} = \frac{1}{0.2} = 5$ (14 dB acima da assíntota)
- Transição rápida na fase próximo a ω_n

Exemplo 4.26: Diagramas

Diagrama de amplitude:

- Começar em 20 dB (constante)
- $\omega < 10$: aproximadamente constante
- $\omega = 10$: pico de ressonância (+13.9 dB para $\zeta = 0.1$)
- $10 < \omega < 100$: -40 dB/década (polos de segunda ordem)
- $\omega > 100$: -20 dB/década ($-40 + 20$ do zero)

Diagrama de fase:

- Degrau de -180° em $\omega = 10$ (polos complexos)
- Rampa de $+45^\circ$ /década do zero (para $10 < \omega < 1000$)
- Resultado: transição em dente de serra

Exemplo 4.26: Diagramas

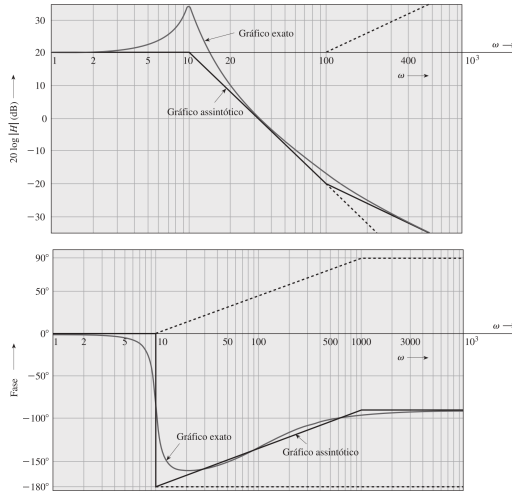


Figura: Diagramas de Bode para Exemplo 4.26. Fonte: Lathi, 2000.

Exemplo 4.26: Código MATLAB

```
1 % Exemplo 4.26: Sistema com polos complexos
2 num = 10 * [1 100];           % 10*(s+100)
3 den = [1 2 100];             % s^2 + 2s + 100
4 H = tf(num, den);
5
6 % Calcular parametros
7 wn = sqrt(100);               % frequencia natural
8 zeta = 2/(2*wn);              % fator de amortecimento
9 fprintf('omega_n = %.2f rad/s\n', wn);
10 fprintf('zeta = %.2f\n', zeta);
11
12 % Diagrama de Bode
13 w = logspace(-1, 3, 1000);
14 figure;
15 bode(H, w);
16 grid on;
17 title('Diagrama de Bode - Exemplo 4.26');
18
19 % Destacar o pico de ressonancia
20 [mag_max, idx_max] = max(abs(squeeze(freqresp(H, w))));
21 w_max = w(idx_max);
22 fprintf('Pico de ressonancia: |H| = %.2f (%.2f dB) em w = %.2f rad/s\n', ...
23         mag_max, 20*log10(mag_max), w_max);
```

Sistemas de Fase Não-Mínima

Pólos no SPD:

- Sistema instável (BIBO)
- Não são úteis para processamento de sinais
- Resposta em frequência não aplicável

Zeros no SPD:

- Sistema pode ser estável (polos no SPE)
- Chamados de sistemas de **fase não-mínima**
- Amplitude idêntica ao caso com zero no SPE
- Fase tem sinal oposto

Exemplo: Zero em $s = +a$ (SPD):

$$|H(j\omega)| = \sqrt{1 + (\omega/a)^2} \quad (\text{igual ao caso SPE}) \quad (45)$$

$$\angle H(j\omega) = -\arctan(\omega/a) \quad (\text{sinal oposto ao SPE}) \quad (46)$$

Comparação: Fase Mínima vs. Não-Mínima

Sistema de fase mínima:

- Todos os polos e zeros no SPE
- Menor variação de fase para dada resposta em amplitude
- Comportamento causal e estável mais previsível

Sistema de fase não-mínima:

- Um ou mais zeros no SPD
- Maior variação de fase
- Exemplos: sistemas com atrasos de transporte, alguns sistemas de controle

Observação: Pólos e zeros complexos no SPD seguem regras similares, com sinais de fase invertidos em relação aos correspondentes no SPE.

Determinação de $H(s)$ a partir de Diagramas de Bode

Problema inverso: Dados os diagramas de Bode, determinar $H(s)$.

Procedimento:

- 1 Identificar inclinações das assíntotas (múltiplos de ± 20 dB/década)
- 2 Cada mudança de inclinação indica uma frequência de canto
- 3 Mudança de $+20$ dB/década $\rightarrow$ zero
- 4 Mudança de -20 dB/década $\rightarrow$ polo
- 5 Mudanças de ± 40 dB/década $\rightarrow$ polos/zeros de segunda ordem
- 6 Determinar constante K do ganho em baixas frequências

Limitação: Só funciona para sistemas de **fase mínima** (ambiguidade quanto ao sinal dos zeros).

Exemplo: Identificação de Sistema

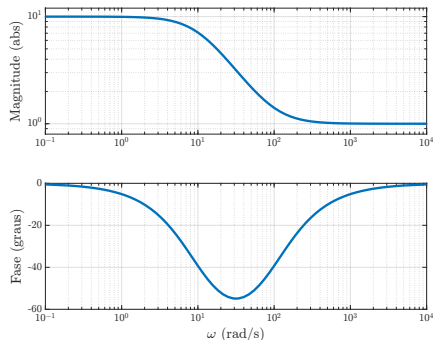


Figura: Diagrama de Bode para identificação de sistema.

Função de transferência:

$$H(s) = 10 \cdot \frac{s/100 + 1}{s/10 + 1}$$

Análise:

- Ganho DC: 20 dB $\rightarrow K = 10$
- Mudança em $\omega = 10$: inclinação -20 dB/década $\rightarrow$ polo em $s = -10$
- Mudança em $\omega = 100$: inclinação volta a 0 $\rightarrow$ zero em $s = -100$

Exercício 1

Problema: Dado o sistema com função de transferência:

$$H(s) = \frac{50(s + 5)}{s(s + 1)(s + 10)} \quad (47)$$

Tarefas:

- 1 Escrever $H(s)$ na forma normalizada
- 2 Identificar todas as frequências de canto
- 3 Desenhar as assíntotas do diagrama de amplitude
- 4 Determinar a inclinação em cada região
- 5 Calcular o ganho em $\omega = 5 \text{ rad/s}$
- 6 Esboçar o diagrama de fase

Resposta parcial:

- Frequências de canto: 1, 5, 10 rad/s
- Pólo na origem: linha começando em $i\infty$

Exercício 2

Problema: Para o sistema:

$$H(s) = \frac{25}{s^2 + 5s + 25} \quad (48)$$

Questões:

- 1 Determinar ω_n e ζ
- 2 Calcular a frequência de pico de ressonância
- 3 Determinar o ganho no pico
- 4 Prever o comportamento do sistema para entrada $x(t) = \cos(5t)$
- 5 Comparar com o caso $\zeta = 0.707$

Dicas:

- $\omega_n = 5 \text{ rad/s}$
- $\zeta = 0.5$
- Haverá sobre-elevação na resposta temporal

Exercício 3: Problema Prático

Contexto: Um circuito RLC série tem os seguintes parâmetros:

- $R = 100 \, \Omega$
- $L = 10 \, \text{mH}$
- $C = 10 \, \mu\text{F}$

Tarefas:

- 1 Determinar a função de transferência $H(s) = V_C(s)/V_{in}(s)$
- 2 Calcular ω_n e ζ
- 3 Construir os diagramas de Bode
- 4 Determinar a largura de faixa de -3 dB
- 5 Verificar os resultados usando MATLAB/Octave

Equação:

$$H(s) = \frac{1/LC}{s^2 + (R/L)s + 1/LC} \quad (49)$$

Exercício 3: Template de Solução

```
1 % Parametros do circuito
2 R = 100;      % Ohms
3 L = 10e-3;    % Henry
4 C = 10e-6;    % Farad
5
6 % Funcao de transferencia
7 num = 1/(L*C);
8 den = [1, R/L, 1/(L*C)];
9 H = tf(num, den);
10
11 % Calcular parametros
12 wn = sqrt(1/(L*C));
13 zeta = (R/2)*sqrt(C/L);
14 fprintf('Frequencia natural: %.2f rad/s\n', wn);
15 fprintf('Fator de amortecimento: %.2f\n', zeta);
16
17 % Diagrama de Bode
18 figure;
19 bode(H);
20 grid on;
21
22 % Determinar largura de faixa de -3dB
23 % (implementar busca pela frequencia onde mag = -3dB)
```

Filtros ideais

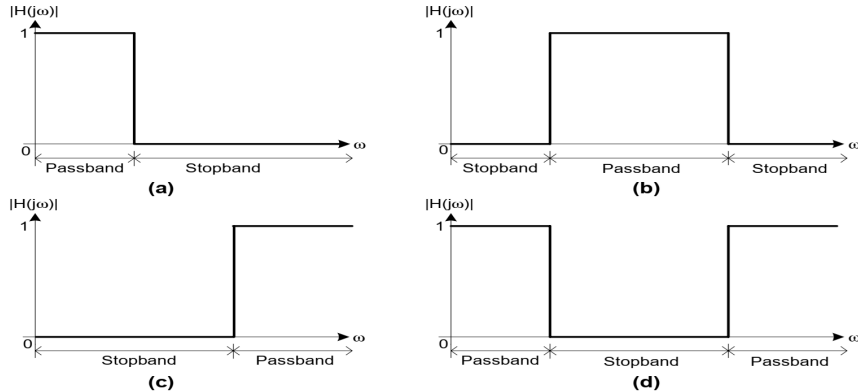


Figura: Filtros ideais: (a) filtro passa-baixa; (b) filtro passa-banda; (c) filtro passa-alta; (d) filtro rejeita-banda.

● A frequência em que ocorre a transição é chamada **frequência de corte**, denotada por ω_c .

Filtros práticos

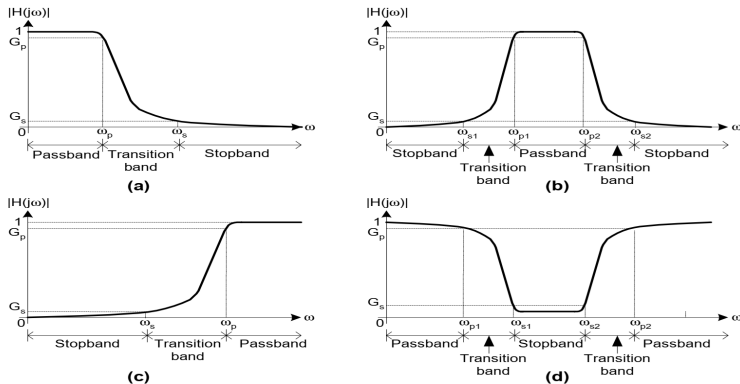


Figura: Filtros práticos: (a) filtro passa-baixa; (b) filtro passa-banda; (c) filtro passa-alta; (d) filtro rejeita-banda.

- No filtro passa-baixa, o intervalo $[\omega_p, \omega_s]$, denominado de faixa de transição, é para viabilizar a realização dos filtros. Note que no filtro passa-baixas ideal $\omega_p = \omega_s = \omega_c$.
- A frequência de corte ω_c é tipicamente definida como a frequência na qual o ganho do filtro é igual a $|H(0)|/2$.

Filtros passa-baixa

- Filtro passa-baixa de primeira ordem ($N = 1$):

$$H(s) = \frac{\omega_c}{s + \omega_c} \Rightarrow |H(j\omega)| = \frac{\omega_c}{|\omega_c + j\omega|} = \frac{\omega_c}{d}$$

- **Exemplo.** Filtro RC: $\frac{V_{out}(s)}{V_{in}(s)} = \frac{\omega_c}{s + \omega_c}$, $\omega_c = \frac{1}{RC}$ é a frequência de corte do filtro.

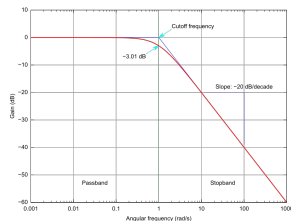
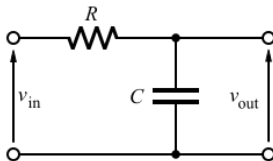
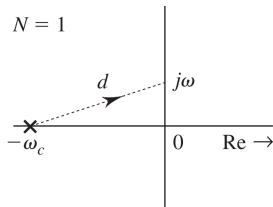


Figura: Filtro passa-baixa.

Filtros passa-baixa

- Filtro passa-baixa de segunda ordem ($N = 2$):

$$H(s) = \left(\frac{\omega_c}{s + \omega_c} \right)^2 \quad \text{ou} \quad H(s) = \frac{\omega_c^2}{s^2 + \frac{\omega_c}{Q}s + \omega_c^2}, \quad Q = \frac{1}{2\zeta} \text{ fator de qualidade do filtro}$$

- **Exemplo.** Filtro RLC (filtro de *Butterworth* de segunda ordem):

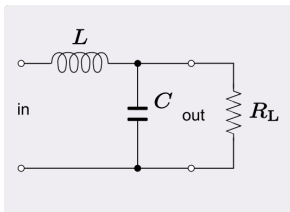
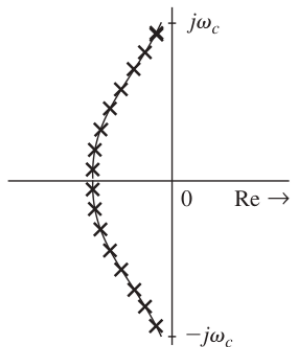


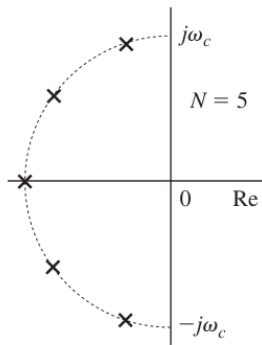
Figura: Filtro passa-baixa RLC de 2a ordem.

Filtros passa-baixa

- Filtro passa-baixas de *Butterworth* de ordem $N > 0$, $N \in \mathbb{Z}$: $|H(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega/\omega_c)^{2N}}}$



(a)



(b)

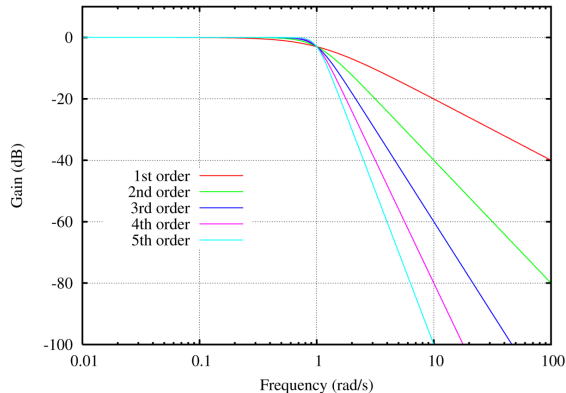


Figura: Configurações de polos de filtros passa-baixa de (a) ordem infinita e (b) ordem $N = 5$. Resposta de amplitude de um filtro passa-baixa (*Butterworth*) para várias ordens N .

Resposta em Frequência:

- $H(j\omega)$ caracteriza completamente o comportamento de filtragem
- Sistema responde a senóides mantendo a frequência
- Amplitude e fase são modificadas segundo $|H(j\omega)|$ e $\angle H(j\omega)$
- Só aplicável para sistemas BIBO estáveis

Diagramas de Bode:

- Representação gráfica em escalas logarítmicas
- Facilita análise em ampla faixa de frequências
- Aproximações assintóticas simplificam a construção
- Sistemas em cascata: soma gráfica dos diagramas

Componente	Amplitude	Fase
Constante K	$20 \log K$ dB	0° ou $\pm 180^\circ$
Zero na origem	$+20$ dB/déc	$+90^\circ$
Pólo na origem	-20 dB/déc	-90°
Zero 1ª ordem	0, depois $+20$ dB/déc	0° a $+90^\circ$
Pólo 1ª ordem	0, depois -20 dB/déc	0° a -90°
Zero 2ª ordem	0, depois $+40$ dB/déc	0° a $+180^\circ$
Pólo 2ª ordem	0, depois -40 dB/déc	0° a -180°

Frequências de canto importantes:

- 1ª ordem: $\omega_c = |p|$ ou $|z|$
- 2ª ordem: ω_n (frequência natural)

Passos para construir Diagramas de Bode:

- 1 Normalizar $H(s)$: fatores $(s/a + 1)$
- 2 Identificar componentes e frequências de canto
- 3 Desenhar assíntotas individuais
- 4 Somar graficamente
- 5 Aplicar correções:
 - -3 dB em polos de 1ª ordem
 - +3 dB em zeros de 1ª ordem
 - Depende de ζ para 2ª ordem

Verificação:

- Usar MATLAB/Octave: `bode()`, `margin()`
- Comparar com medições experimentais
- Validar especificações de projeto

Bibliografia principal:

- **Lathi, B.** *Sinais e Sistemas Lineares*, 2ª ed., Bookman, 2000.
 - Seção 4.8: Resposta em Frequência (pp. 380-387)
 - Seção 4.9: Diagramas de Bode (pp. 387-400)
- **Oppenheim, A.V.** *Signals & Systems*, 2ª ed., Prentice Hall, 1997.
 - Capítulo 6: Resposta em Frequência de Sistemas LTI

Recursos online:

- MathWorks: Documentação do MATLAB Control System Toolbox
- MIT OpenCourseWare: Signals and Systems

Exercícios Recomendados

Do livro Lathi (Cap. 4):

- Problemas 4.8-1 a 4.8-4 (Resposta em Frequência)
- Problemas 4.9-1 a 4.9-4 (Diagramas de Bode)

Práticas computacionais:

- 1 Implementar os Exemplos 4.25 e 4.26 no MATLAB/Octave
- 2 Explorar o efeito de ζ em polos de segunda ordem
- 3 Construir diagramas de Bode para diferentes tipos de filtros
- 4 Comparar aproximações assintóticas com curvas exatas

Projeto:

- Projetar um filtro que atenda especificações dadas
- Implementar em circuito RLC
- Validar experimentalmente (simulação)