

ENE0067 – Sinais e Sistemas em Tempo Contínuo

Análise no Espaço de Estados

Prof. Eduardo Stockler Tognetti

Departamento de Engenharia Elétrica
Universidade de Brasília – UnB



Sumário

- 1 Introdução à Análise no Espaço de Estados
- 2 Determinação das Equações de Estado
 - Equações de Estado de Circuitos Elétricos
 - Equações de Estado a partir da Função de Transferência
- 3 Transformação Linear do Vetor de Estado
 - Diagonalização da Matriz **A**
- 4 Solução das Equações de Estado
 - Solução via Transformada de Laplace
 - Solução no Domínio do Tempo
- 5 Controlabilidade e Observabilidade
 - Estabilidade e Realização Mínima
- 6 Interconexões entre sistemas
- 7 Controle por realimentação
- 8 Resumo e Aplicações

Motivação: Limitações das Abordagens Anteriores

Abordagens estudadas até agora:

- Equações diferenciais de entrada-saída
- Função de transferência $H(s)$ (transformada de Laplace)
- Resposta ao impulso $h(t)$

Limitações dessas abordagens:

- **Descrição externa**: relação apenas entre entrada e saída
- Dificuldade com sistemas **MIMO** (múltiplas entradas/saídas)
- Não se aplicam diretamente a sistemas **não lineares**
- Não se aplicam a sistemas **variantes no tempo**
- Não fornecem informação sobre **estados internos** do sistema

Solução: Análise no espaço de estados – **descrição interna** do sistema!

O que é a Análise no Espaço de Estados?

Ideia central:

Definição

Descrever o sistema através de um conjunto mínimo de **variáveis de estado** que caracterizam completamente o comportamento interno do sistema.

Variáveis de Estado $q_1(t), q_2(t), \dots, q_N(t)$:

- Representam a “**memória**” do sistema
- Conhecendo seus valores em t_0 e a entrada $x(t)$ para $t \geq t_0$, podemos determinar:
 - Qualquer saída $y(t)$ para $t \geq t_0$
 - Qualquer variável interna do sistema
- Não são únicas – existem infinitas escolhas possíveis!

Vantagens da Análise no Espaço de Estados

1 Generalidade:

- Sistemas lineares e **não lineares**
- Sistemas invariantes e **variantes no tempo**
- Sistemas SISO e **MIMO**

2 Notação matricial compacta:

- Facilita manipulações complexas
- Uso de técnicas de álgebra linear

3 Implementação computacional:

- Ideal para simulação em computador
- Adequado para projeto de controladores modernos

4 Descrição interna completa:

- Revela propriedades como **controlabilidade** e **observabilidade**
- Informação que a função de transferência não fornece!

Estrutura da Descrição no Espaço de Estados

A descrição no espaço de estados consiste de **duas partes**:

1. Equações de Estado

Relacionam as **derivadas** das variáveis de estado com as próprias variáveis de estado e as entradas.

2. Equações de Saída

Relacionam as **saídas** do sistema com as variáveis de estado e as entradas.

Procedimento de análise:

- 1 Resolver as equações de estado $\rightarrow$ obter $q_i(t)$
- 2 Usar as equações de saída $\rightarrow$ obter $y_i(t)$

Forma Geral das Equações de Estado

Para sistemas lineares invariantes no tempo:

Equações de Estado (forma escalar)

$$\dot{q}_1 = a_{11}q_1 + a_{12}q_2 + \cdots + a_{1N}q_N + b_{11}x_1 + \cdots + b_{1j}x_M$$

$$\dot{q}_2 = a_{21}q_1 + a_{22}q_2 + \cdots + a_{2N}q_N + b_{21}x_1 + \cdots + b_{2j}x_M$$

$$\vdots$$

$$\dot{q}_N = a_{N1}q_1 + a_{N2}q_2 + \cdots + a_{NN}q_N + b_{N1}x_1 + \cdots + b_{Nj}x_M$$

Onde:

- $q_1, q_2, \dots, q_N$ são as N variáveis de estado
- $x_1, x_2, \dots, x_M$ são as M entradas do sistema
- a_{ij} e b_{ij} são constantes

Forma Matricial das Equações de Estado

As N equações de estado podem ser escritas compactamente em **forma matricial**:

Equações de Estado (forma matricial)

$$\dot{\mathbf{q}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{q}(t) + \mathbf{B}\mathbf{x}(t)$$

Onde:

- $\mathbf{q}(t) = \begin{bmatrix} q_1(t) \\ q_2(t) \\ \vdots \\ q_N(t) \end{bmatrix}$ – vetor de estado

- $\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_M(t) \end{bmatrix}$ – vetor de entrada

- $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{N1} & \cdots & a_{NN} \end{bmatrix}_{N \times N}$ – matriz de estado

- $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1M} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{N1} & \cdots & b_{NM} \end{bmatrix}_{N \times M}$ – matriz de entrada

Equações de Saída

As P saídas do sistema são descritas por:

Equações de Saída (forma matricial)

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{q}(t) + \mathbf{D}\mathbf{x}(t)$$

Onde:

- $\mathbf{y}(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ \vdots \\ y_P(t) \end{bmatrix}$ – vetor de saída; $\mathbf{C} = \begin{bmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{P1} & \cdots & c_{PN} \end{bmatrix}_{P \times N}$ – matriz de saída;

- $\mathbf{D} = \begin{bmatrix} d_{11} & \cdots & d_{1M} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{P1} & \cdots & d_{PM} \end{bmatrix}_{P \times M}$ – matriz de transmissão direta

Nota: Em muitos sistemas, $\mathbf{D} = \mathbf{0}$ (sem transmissão direta da entrada para a saída).

Como Determinar as Equações de Estado?

Três abordagens principais:

1 A partir da estrutura física do sistema

- Circuitos elétricos: tensões de capacitores e correntes de indutores
- Sistemas mecânicos: posições e velocidades
- Usar leis físicas (Kirchhoff, Newton, etc.)

2 A partir da função de transferência $H(s)$

- Realizar $H(s)$ usando integradores
- Identificar variáveis de estado nas saídas dos integradores
- Diferentes realizações $\rightarrow$ diferentes representações

3 A partir da equação diferencial

- Converter equação de ordem N em N equações de 1ª ordem

Exemplo 10.1: Circuito RLC

Determinar a descrição no espaço de estados do circuito:

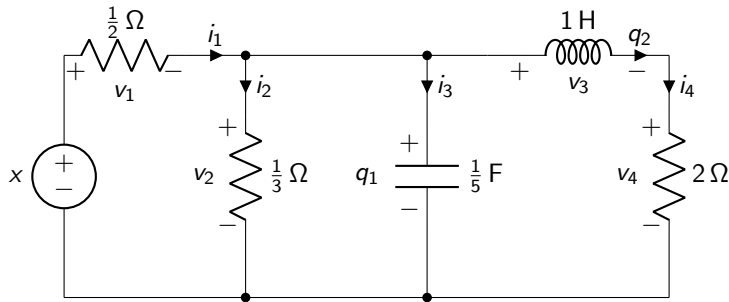


Figura: Circuito RLC. Fonte: Lathi, 2000, p. 793.

Escolha das variáveis de estado:

- $q_1(t) = v_C$ – tensão do capacitor
- $q_2(t) = i_L$ – corrente do indutor

Por que essa escolha? Essas variáveis armazenam a **energia** do circuito!

Exemplo 10.1: Derivação das Equações de Estado

Aplicando LKC no nó intermediário:

$$i_1 + i_2 = i_3 + q_2$$

Onde: $i_1 = 2(x - q_1)$, $i_2 = 3q_1$, $i_3 = 0,2\dot{q}_1$

Substituindo:

$$2(x - q_1) + 3q_1 = 0,2\dot{q}_1 + q_2$$

Primeira equação de estado

$$\dot{q}_1 = 5q_1 - 5q_2 + 10x$$

Aplicando LKT na malha da direita:

$$q_1 + 2q_2 + 0,1\dot{q}_2 = 0$$

Segunda equação de estado

$$\dot{q}_2 = -10q_1 - 20q_2$$

Exemplo 10.1: Forma Matricial

Equações de estado em forma matricial:

Equação de Estado

$$\begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & -5 \\ -10 & -20 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 10 \\ 0 \end{bmatrix} x$$

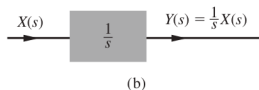
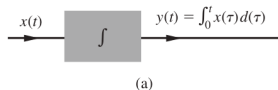
Equações de saída: Todas as tensões e correntes podem ser expressas em função de q_1 , q_2 e x :

Equações de Saída

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ i_1 \\ v_2 \\ i_2 \\ i_3 \\ i_4 \\ v_4 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -2 & 0 \\ 1 & 0 \\ 3 & 0 \\ -5 & -1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 2 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} x$$

Diagramas

- Para representar graficamente uma EDO será utilizado blocos integradores cujas saídas serão os estados q_i do sistema.



- Considere a equação diferencial de segunda ordem e sua respectiva função de transferência

$$\ddot{y} + a_1 \dot{y} + a_2 y = b_2 x, \quad H(s) = \frac{b_2}{s^2 + a_1 s + a_2}$$

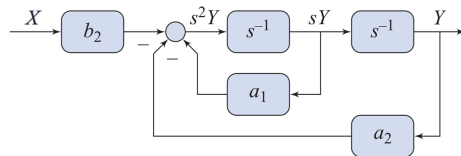
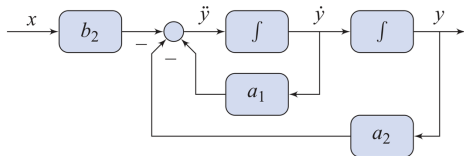


Figura: Representação da equação diferencial de segunda ordem e de $H(s)$.

Exemplo

Considere

$$H_1(s) = \frac{1}{s+a} \quad \text{e} \quad H_2(s) = \frac{5}{s+7};$$

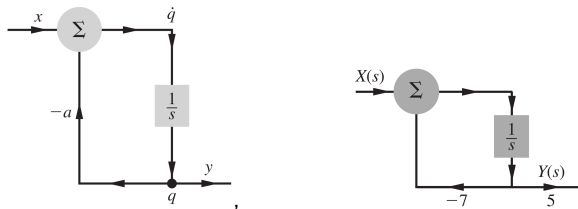


Figura: Realização de $H_1(s)$ (esquerda) e $H_2(s)$ (direita).

Representação no espaço de estados de $H_1(s)$ e $H_2(s)$:

$$H_1(s) : \begin{cases} \dot{q} = -aq + x \\ y = q \end{cases}$$

$$H_2(s) : \begin{cases} \dot{q} = -7q + x \\ y = 5q \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} \dot{v} = -7v + 5x \\ y = v \end{cases}$$

● Obs.: Uma dada função de transferência pode ser realizada de diversas formas.

Realização de Sistemas a partir de $H(s)$

Problema: Dada $H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)}$, como obter a descrição no espaço de estados?

Ideia central:

- Realizar $H(s)$ usando **integradores**, multiplicadores e somadores
- Identificar as **saídas dos integradores** como variáveis de estado
- Escrever as equações relacionando estas variáveis

Diferentes realizações $\rightarrow$ diferentes representações no espaço de estados:

- 1 Forma Canônica Controlável
- 2 Forma Canônica Observável
- 3 Forma em Cascata
- 4 Forma em Paralelo (diagonal)

Importante: A descrição no espaço de estados **não é única!**

Realização no espaço de estados a partir da função de transferência

- Considere a entrada $x(t)$ e a saída $y(t)$ relacionadas por equações diferenciais lineares na forma

$$\frac{d^N y}{dt^N} + a_1 \frac{d^{N-1} y}{dt^{N-1}} + \dots + a_{N-1} \frac{dy}{dt} + a_N y = b_0 \frac{d^N x}{dt^N} + b_1 \frac{d^{N-1} x}{dt^{N-1}} + \dots + b_{N-1} \frac{dx}{dt} + b_N x \quad (1)$$

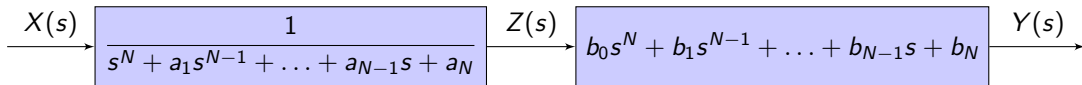
com coeficientes a_i e b_i constantes. Utilizando o operador derivada:

$$Q(p)y(t) = P(p)x(t) \quad \Rightarrow \quad Q(s)Y(s) = P(s)X(s)$$

- Função de transferência associada a (1):

$$H(s) = \frac{b_0 s^N + b_1 s^{N-1} + \dots + b_{N-1} s + b_N}{s^N + a_1 s^{N-1} + \dots + a_{N-1} s + a_N}$$

- Diagrama de blocos equivalente

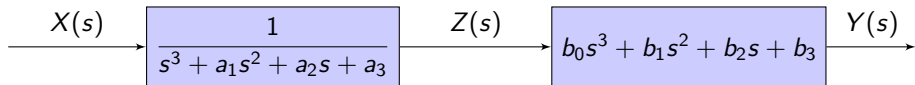


Realização no espaço de estados a partir da função de transferência

- Exemplo:

$$H(s) = \frac{b_0 s^3 + b_1 s^2 + b_2 s + b_3}{s^3 + a_1 s^2 + a_2 s + a_3}$$

- Diagrama de blocos equivalente



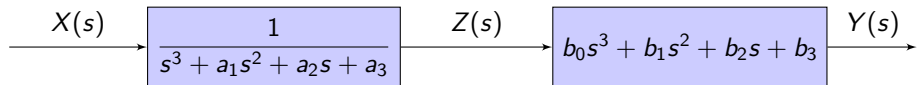
- Do diagrama de blocos para o domínio do tempo (condições iniciais nulas)

$$\underbrace{\ddot{z}}_{\dot{q}_3} + a_1 \underbrace{\ddot{z}}_{q_3} + a_2 \underbrace{\dot{z}}_{q_2} + a_3 \underbrace{z}_{q_1} = x$$

- Mudança de variáveis

$$\begin{aligned} \dot{q}_1 &= q_2 \\ \dot{q}_2 &= q_3 \\ \dot{q}_3 &= -a_3 q_1 - a_2 q_2 - a_1 q_3 + x \end{aligned} \quad \Leftrightarrow \quad \dot{q} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_3 & -a_2 & -a_1 \end{bmatrix} q + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} x$$

Realização no espaço de estados a partir da função de transferência



• Equação de saída

$$y = b_0 \underbrace{\ddot{z}}_{\dot{q}_3} + b_1 \underbrace{\ddot{z}}_{q_3} + b_2 \underbrace{\dot{z}}_{q_2} + b_3 \underbrace{z}_{q_1}, \quad \text{em que} \quad \dot{q}_3 = -a_3q_1 - a_2q_2 - a_1q_3 + x$$

• Mudança de variáveis

$$\begin{aligned} y &= (b_3 - a_0b_0)q_1 + (b_2 - a_2b_0)q_2 + (b_1 - a_1b_0) + b_0x \\ &\Leftrightarrow \\ y &= \begin{bmatrix} b_3 - a_3b_0 & b_2 - a_2b_0 & b_1 - a_1b_0 \end{bmatrix} q + b_0x \end{aligned}$$

Realização no espaço de estados a partir da função de transferência

- Exemplo:

$$H(s) = \frac{b_0 s^3 + b_1 s^2 + b_2 s + b_3}{s^3 + a_1 s^2 + a_2 s + a_3}$$

- Caso $b_0 \neq 0$ (ordem numerador = ordem denominador): função de transferência **própria**

$$\dot{q} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_3 & -a_2 & -a_1 \end{bmatrix} q + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} x$$
$$y = [b_3 - a_3 b_0 \quad b_2 - a_2 b_0 \quad b_1 - a_1 b_0] q + b_0 x$$

- Caso $b_0 = 0$ (ordem numerador < ordem denominador): função de transferência **estritamente própria**

$$\dot{q} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_3 & -a_2 & -a_1 \end{bmatrix} q + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} x$$
$$y = [b_3 \quad b_2 \quad b_1] q$$

⇒ Sistema na forma **canônica controlável**.

Diagramas e Realizações

- Considere a equação diferencial de segunda ordem

$$\ddot{y} + a_1\dot{y} + a_2y = b_0\ddot{x} + b_1\dot{x} + b_2x \quad (2)$$

e sua respectiva função de transferência

$$H(s) = \frac{b_0s^2 + b_1s + b_2}{s^2 + a_1s + a_2}$$

- Diagrama:

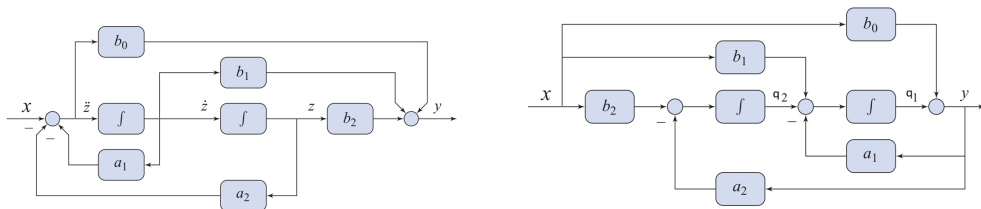


Figura: Diferentes representações da mesma equação diferencial de segunda ordem (2).

Realizações

- A realização na forma canônica controlável também pode ser obtida reescrevendo a função de transferência usando $1/s$ ao invés de s para destacar os integradores no diagrama.

$$H(s) = \frac{b_0 s^3 + b_1 s^2 + b_2 s + b_3}{s^3 + a_1 s^2 + a_2 s + a_3} = \frac{b_0 + \frac{b_1}{s} + \frac{b_2}{s^2} + \frac{b_3}{s^3}}{1 + \frac{a_1}{s} + \frac{a_2}{s^2} + \frac{a_3}{s^3}}$$
$$H(s) = \underbrace{\left(b_0 + \frac{b_1}{s} + \frac{b_2}{s^2} + \frac{b_3}{s^3}\right)}_{H_1(s)} \underbrace{\left(\frac{1}{1 + \frac{a_1}{s} + \frac{a_2}{s^2} + \frac{a_3}{s^3}}\right)}_{H_2(s)}$$
$$V(s) = X(s) - \left(\frac{a_1}{s} + \frac{a_2}{s^2} + \dots + \frac{a_N}{s^N}\right)V(s)$$
$$Y(s) = \left(b_0 + \frac{b_1}{s} + \frac{b_2}{s^2} + \dots + \frac{b_N}{s^N}\right)V(s)$$

(a) (b)

Figura: Diagramas de $H(s)$

- O diagrama (b) da figura acima (Forma Direta II) será usado para obter um diagrama e uma realização na forma canônica de controlabilidade de $H(s)$.

- **Forma cascata:** Pode-se expressar $H(s)$ como

$$H(s) = \frac{4s + 28}{(s + 1)(s + 5)} = \underbrace{\left(\frac{4s + 28}{s + 1} \right)}_{H_1(s)} \underbrace{\left(\frac{1}{s + 5} \right)}_{H_2(s)}$$

- **Forma paralela ou diagonal:** Pode-se expressar $H(s)$ como uma soma de frações

$$H(s) = \frac{4s + 28}{(s + 1)(s + 5)} = \underbrace{\frac{6}{s + 1}}_{H_3(s)} - \underbrace{\frac{2}{s + 5}}_{H_4(s)}$$

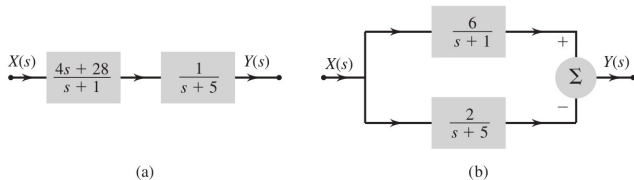


Figura: Realizações na forma cascata (esquerda) e paralela (direita).

Exemplo 1: Sistema de 3ª Ordem

Determinar a descrição no espaço de estados para:

$$H(s) = \frac{2s + 10}{s^3 + 8s^2 + 19s + 12} = \frac{2s + 10}{(s + 1)(s + 3)(s + 4)}$$

Formas de fração parcial:

Cascata:

$$H(s) = \frac{2}{s + 1} \cdot \frac{s + 5}{s + 3} \cdot \frac{1}{s + 4}$$

Paralela:

$$H(s) = \frac{4/3}{s + 1} - \frac{2}{s + 2} - \frac{2/3}{s + 4}$$

Realizações correspondentes...

Forma canônica controlável

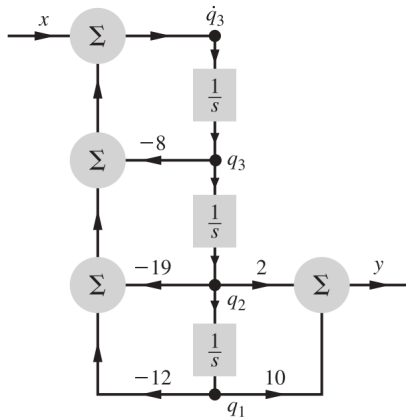


Figura: Realização na forma canônica controlável.

$$H(s) = \frac{2s + 10}{s^3 + 8s^2 + 19s + 12}$$

● Realização espaço de estados na forma **canônica controlável**:

Variáveis de estado: q_1, q_2, q_3

Equações de estado:

$$\begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -12 & -19 & -8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} x$$

Equação de saída:

$$y = \begin{bmatrix} 10 & 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix}$$

Forma canônica observável

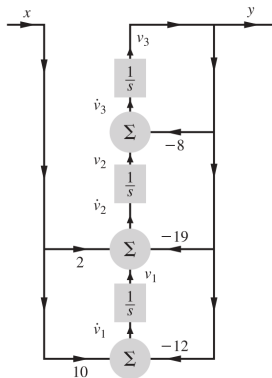


Figura: Realização na forma canônica observável.

$$H(s) = \frac{2s + 10}{s^3 + 8s^2 + 19s + 12}$$

● Realização espaço de estados na forma **canônica observável**:

Variáveis de estado: v_1, v_2, v_3

Equações:

$$\begin{bmatrix} \dot{v}_1 \\ \dot{v}_2 \\ \dot{v}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -12 \\ 1 & 0 & -19 \\ 0 & 1 & -8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 10 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} x$$

$$y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}$$

Relação de dualidade: em sistemas SISO (uma entrada e uma saída) $G(s)^T = G(s)$ e portanto

$$\mathbf{A}_{\text{observ.}} = \mathbf{A}_{\text{controlav.}}^T, \quad \mathbf{B}_{\text{observ.}} = \mathbf{C}_{\text{controlav.}}^T, \quad \mathbf{C}_{\text{observ.}} = \mathbf{B}_{\text{controlav.}}^T, \quad \mathbf{D}_{\text{observ.}} = \mathbf{D}_{\text{controlav.}}^T.$$

Forma em Cascata

Cascata:

$$H(s) = \underbrace{\frac{2}{s+1}}_{H_1(s)} \cdot \underbrace{\frac{s+5}{s+3}}_{H_2(s)} \cdot \underbrace{\frac{1}{s+4}}_{H_3(s)}$$

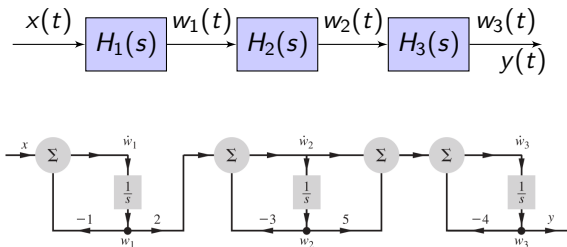


Figura: Realização em cascata.

- Realização espaço de estados na forma **cascata**:

Variáveis de estado: w_1 , w_2 , w_3 (saída dos integradores da figura)

Equações:

$$\begin{bmatrix} \dot{w}_1 \\ \dot{w}_2 \\ \dot{w}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 0 \\ 2 & 2 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} x$$

$$y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix}$$

Forma em Paralelo (Diagonal)

Paralela:

$$H(s) = \underbrace{\frac{4/3}{s+1}}_{H_1(s)} + \underbrace{\frac{-2}{s+2}}_{H_2(s)} + \underbrace{\frac{-2/3}{s+4}}_{H_3(s)}$$

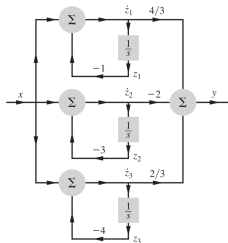


Figura: Realização em paralelo.

● Realização espaço de estados na forma **diagonal** ou paralela (**estados desacoplados**):

Variáveis de estado: z_1, z_2, z_3 (saída dos integradores da figura)

Equações:

$$\begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \\ \dot{z}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} x$$

$$y = \begin{bmatrix} 4/3 & -2 & 2/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix}$$

Observação importante I: A matriz **A** é **diagonal**, com os **polos de $H(s)$** na diagonal!

Observação importante II: Assumiremos **autovalores distintos** para obter a representação no espaço de estados na forma diagonal.

Exemplo 2: Sistema de 3ª Ordem

Determinar a descrição no espaço de estados para:

$$H(s) = \frac{s^2 + 7s + 2}{s^3 + 6s^2 + 11s + 6} = \frac{s^2 + 7s + 2}{(s + 1)(s + 2)(s + 3)}$$

Formas de fração parcial:

Cascata:

$$H(s) = \frac{s + 1}{s + 1} \cdot \frac{s + 2}{s + 2} \cdot \frac{s + 4}{s + 3}$$

Paralela:

$$H(s) = -\frac{3/2}{s + 1} + \frac{5}{s + 2} - \frac{5/2}{s + 3}$$

Realizações correspondentes...

Forma canônica controlável

$$H(s) = \frac{s^2 + 7s + 2}{s^3 + 6s^2 + 11s + 6} = \frac{s^2 + 7s + 2}{(s + 1)(s + 2)(s + 3)}$$

Variáveis de estado: q_1, q_2, q_3

Equações de estado:

$$\begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -11 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} x$$

Equação de saída:

$$y = \begin{bmatrix} 2 & 7 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix}$$

⇒ Realização espaço de estados forma **canônica controlável**

Forma canônica observável

$$H(s) = \frac{s^2 + 7s + 2}{s^3 + 6s^2 + 11s + 6} = \frac{s^2 + 7s + 2}{(s + 1)(s + 2)(s + 3)}$$

Variáveis de estado: v_1, v_2, v_3

Equações:

$$\begin{bmatrix} \dot{v}_1 \\ \dot{v}_2 \\ \dot{v}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -6 \\ 1 & 0 & -11 \\ 0 & 1 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 7 \\ 1 \end{bmatrix} x$$
$$y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}$$

↪ Realização espaço de estados forma **canônica observável**

Relação de dualidade: em sistemas SISO (uma entrada e uma saída) $G(s)^T = G(s)$ e portanto

$$\mathbf{A}_{\text{observ.}} = \mathbf{A}_{\text{controlav.}}^T, \quad \mathbf{B}_{\text{observ.}} = \mathbf{C}_{\text{controlav.}}^T, \quad \mathbf{C}_{\text{observ.}} = \mathbf{B}_{\text{controlav.}}^T, \quad \mathbf{D}_{\text{observ.}} = \mathbf{D}_{\text{controlav.}}^T$$

Forma em Paralelo (Diagonal)

$$H(s) = -\frac{3/2}{s+1} + \frac{5}{s+2} - \frac{5/2}{s+3}$$

Variáveis de estado: z_1, z_2, z_3

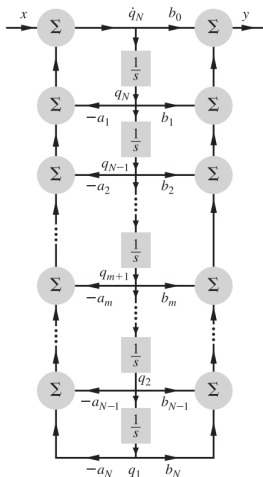
Equações:

$$\begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \\ \dot{z}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} x$$
$$y = \begin{bmatrix} -3/2 & 5 & -5/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix}$$

Observação importante: Note que a matriz **A** é **diagonal** com os **polos de $H(s)$** na diagonal!

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

Caso Geral: Sistema de Ordem N – forma controlável



$$H(s) = \frac{b_0 s^N + b_1 s^{N-1} + \dots + b_N}{s^N + a_1 s^{N-1} + \dots + a_N}$$

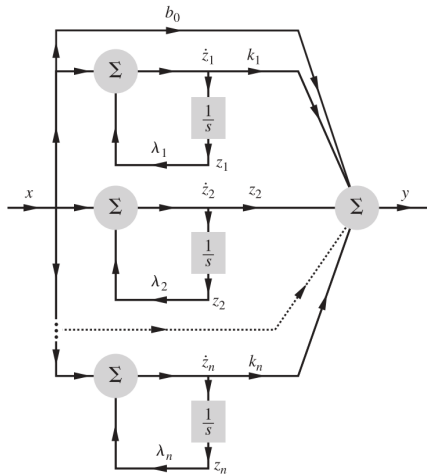
Forma matricial (forma canônica controlável):

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_N & -a_{N-1} & -a_{N-2} & \dots & -a_1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C} = [\hat{b}_N \quad \hat{b}_{N-1} \quad \dots \quad \hat{b}_1], \quad \text{onde } \hat{b}_i = b_i - b_0 a_i$$

Figura: Realização controlável.

Caso Geral: Sistema de Ordem N – Paralela



$$H(s) = b_0 + \frac{k_1}{s - \lambda_1} + \frac{k_2}{s - \lambda_2} + \cdots + \frac{k_N}{s - \lambda_N}$$

Forma matricial (diagonal) caso os autovalores são distintos:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_N \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix},$$
$$\mathbf{C} = [c_1 \quad c_2 \quad \cdots \quad c_N]$$

Os autovalores λ_i são os polos de $H(s)$!

Figura: Realização em paralelo.

Exemplo MATLAB: Conversão $H(s) \rightarrow$ Espaço de Estados

Problema: Dado $H(s) = \frac{s^2+7s+2}{s^3+6s^2+11s+6}$, obter (A, B, C, D)

```
1 % Definir H(s)
2 num = [1 7 2];           % Numerador
3 den = [1 6 11 6];        % Denominador
4
5 % Conversao para espaco de estados (FDII)
6 [A, B, C, D] = tf2ss(num, den);
7
8 % Exibir matrizes
9 disp('Matriz A:'); disp(A);
10 disp('Matriz B:'); disp(B);
11 disp('Matriz C:'); disp(C);
12 disp('Matriz D:'); disp(D);
13
14 % Obter forma diagonal (se possivel)
15 [Ad, Bd, Cd, Dd] = tf2ss(num, den);
16 T = inv([A^2*B A*B B]); % Matriz de transformacao
17 Ad = T*A*inv(T);
18 Bd = T*B;
19 Cd = C*inv(T);
```

Condições Iniciais da Equação no Espaço de Estados

Entrada com condições iniciais nulas: $x(t) = 0, \dot{x}(0) = 0, \dots$

Para um sistema linear invariante no tempo de ordem N com condições iniciais

$$\frac{d^N y(t)}{dt^N} + \dots + a_{N-1} \frac{dy(t)}{dt} + a_N y(t) = b_0 \frac{d^N x(t)}{dt^N} + \dots + b_{N-1} \frac{dx}{dt} + b_N x(t), \quad y(0), \dot{y}(0), \dots, y^{(N-1)}(0)$$

e a respectiva realização no espaço de estados $\dot{\mathbf{q}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{q}(t) + \mathbf{B}\mathbf{x}(t)$, $\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{q}(t) + \mathbf{D}\mathbf{x}(t)$.

Então

$$\begin{bmatrix} y(0) \\ \dot{y}(0) \\ \vdots \\ y^{(N-1)}(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{N-1} \end{bmatrix} q(0) = W_o q(0), \quad W_o : \text{matriz de observabilidade}$$

Se o sistema for observável, $\det(W_o) \neq 0$, permitindo mapear a saída para o estado:

$$q(0) = W_o^{-1} [y(0) \quad \dot{y}(0) \quad \dots \quad y^{(N-1)}(0)]^T$$

Condições Iniciais da Equação no Espaço de Estados

Exemplo de Ordem 2

Dado um sistema com condições iniciais da saída $y(0) = 1$, $\dot{y}(0) = -2$ e realização:

$$\dot{q}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} q(t), \quad y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} q(t)$$

- ❶ **Montagem de W_o :** $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$, $CA = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \implies W_o = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$
- ❷ **Cálculo de $q(0)$:** Como $W_o^{-1} = I$, temos diretamente:

$$q(0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

Não Unicidade das Variáveis de Estado

Fato importante: As variáveis de estado **não são únicas!**

Exemplo: No Exemplo 1 (slide pág. 24), vimos 4 diferentes representações para o mesmo sistema:

- Forma controlável: $\mathbf{q} = [q_1, q_2, q_3]^T$
- Forma observável (transposta): $\mathbf{v} = [v_1, v_2, v_3]^T$
- Cascata: $\mathbf{w} = [w_1, w_2, w_3]^T$
- Paralela (diagonal): $\mathbf{z} = [z_1, z_2, z_3]^T$

Questão: Como esses diferentes conjuntos de variáveis de estado se relacionam?

Resposta: Por meio de uma **transformação linear!**

$$\mathbf{w} = \mathbf{P}\mathbf{q} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{q} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{w}$$

Onde $\mathbf{P}$ é uma matriz $N \times N$ **não singular** ($|\mathbf{P}| \neq 0$).

Transformação das Equações de Estado

Dado: $\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{A}\mathbf{q} + \mathbf{B}\mathbf{x}$, $\mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{q} + \mathbf{D}\mathbf{x}$

Transformação: $\mathbf{w} = \mathbf{P}\mathbf{q} \Rightarrow \mathbf{q} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{w}$

Derivando: $\dot{\mathbf{w}} = \mathbf{P}\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{P}(\mathbf{A}\mathbf{q} + \mathbf{B}\mathbf{x}) = \mathbf{P}\mathbf{A}\mathbf{P}^{-1}\mathbf{w} + \mathbf{P}\mathbf{B}\mathbf{x}$

Equações Transformadas

$$\dot{\mathbf{w}} = \hat{\mathbf{A}}\mathbf{w} + \hat{\mathbf{B}}\mathbf{x}$$

$$\mathbf{y} = \hat{\mathbf{C}}\mathbf{w} + \hat{\mathbf{D}}\mathbf{x}$$

Onde:

$$\hat{\mathbf{A}} = \mathbf{P}\mathbf{A}\mathbf{P}^{-1}, \quad \hat{\mathbf{B}} = \mathbf{P}\mathbf{B}, \quad \hat{\mathbf{C}} = \mathbf{C}\mathbf{P}^{-1}, \quad \hat{\mathbf{D}} = \mathbf{D}$$

Importante: $\mathbf{A}$ e $\hat{\mathbf{A}}$ são **matrizes similares** – têm os mesmos autovalores!

Exemplo 3: Transformação Linear

Dado o sistema:

$$\dot{\mathbf{q}} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \mathbf{q} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} x$$

Transformação proposta:

$$\mathbf{w} = \mathbf{P}\mathbf{q} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_1 + q_2 \end{bmatrix}$$

Cálculo de $\mathbf{P}^{-1}$:

$$\mathbf{P}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Matrizes transformadas:

$$\hat{\mathbf{A}} = \mathbf{P}\mathbf{A}\mathbf{P}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\hat{\mathbf{B}} = \mathbf{P}\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Motivação para Diagonalização

Problema: Para $\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{A}\mathbf{q} + \mathbf{B}\mathbf{x}$, resolver N equações acopladas é difícil!

Ideia: Transformar para uma forma onde as equações são **desacopladas**!

Forma Diagonal (autovalores distintos)

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{z}} &= \mathbf{\Lambda}\mathbf{z} + \hat{\mathbf{B}}\mathbf{x}, \\ \mathbf{y} &= \hat{\mathbf{C}}\mathbf{z} + \mathbf{D}\mathbf{x}, \end{aligned} \quad \mathbf{\Lambda} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_N \end{bmatrix}$$

Cada equação seria independente: $\dot{z}_i = \lambda_i z_i + \hat{b}_i x$

Vantagem: N equações de 1ª ordem **desacopladas** são fáceis de resolver!

- Se $\mathbf{A}$ tiver **autovalores complexos**, as matrizes $\mathbf{\Lambda}$, $\hat{\mathbf{B}}$ e $\hat{\mathbf{C}}$ serão complexas $\rightsquigarrow$ usar forma diagonalizada por blocos (**forma canônica de Jordan**, não será visto nesta aula) para obter uma representação com matrizes reais.
- Se $\mathbf{A}$ tiver autovalores repetidos ou não for diagonalizável $\rightsquigarrow$ obter forma canônica de Jordan.

Procedimento de Diagonalização

Para diagonalizar $\mathbf{A}$, precisamos encontrar $\mathbf{P}$ tal que:

$$\mathbf{\Lambda} = \mathbf{PAP}^{-1}$$

Procedimento:

- 1 Calcular os autovalores $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N$ de $\mathbf{A}$:

$$|s\mathbf{I} - \mathbf{A}| = 0$$

- 2 Para cada autovalor λ_i , encontrar o autovetor $\mathbf{p}_i$:

$$(\mathbf{A} - \lambda_i \mathbf{I})\mathbf{p}_i = \mathbf{0}$$

- 3 Formar a matriz $\mathbf{P}$ com os autovetores como colunas:

$$\mathbf{P} = [\mathbf{p}_1 \quad \mathbf{p}_2 \quad \cdots \quad \mathbf{p}_N]$$

- 4 Verificar se $\mathbf{A}$ é diagonalizável $\rightsquigarrow$ base formada pelos autovetores $\{\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_N\}$ é linearmente independente ($\mathbf{P}$ é não singular)

- 5 Calcular:

$$\mathbf{\Lambda} = \mathbf{PAP}^{-1}, \quad \hat{\mathbf{B}} = \mathbf{PB}, \quad \hat{\mathbf{C}} = \mathbf{CP}^{-1}, \quad \hat{\mathbf{D}} = \mathbf{D}$$

Nota: Só é possível se todos os autovalores forem distintos (ou $\mathbf{A}$ for diagonalizável).

Exemplo 4: Diagonalização

Sistema:

$$\dot{\mathbf{q}} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \mathbf{q} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} x$$

Passo 1: Autovalores

$$|s\mathbf{I} - \mathbf{A}| = \begin{vmatrix} s-1 & -3 \\ -2 & s-2 \end{vmatrix} = s^2 - 3s - 4 = (s-4)(s+1) = 0$$

$$\lambda_1 = 4, \quad \lambda_2 = -1$$

Passo 2: Autovetores

$$\text{Para } \lambda_1 = 4: (\mathbf{A} - 4\mathbf{I})\mathbf{p}_1 = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{p}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ (escolhendo } p_{11} = 1)$$

$$\text{Para } \lambda_2 = -1: (\mathbf{A} + \mathbf{I})\mathbf{p}_2 = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{p}_2 = \begin{bmatrix} -3/2 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ (escolhendo } p_{22} = 1)$$

Exemplo 4: Continuação

Passo 3: Formar $\mathbf{P}$ e calcular $\mathbf{P}^{-1}$

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & -3/2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{P}^{-1} = \frac{1}{5/2} \begin{bmatrix} 1 & 3/2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2/5 & 3/5 \\ -2/5 & 2/5 \end{bmatrix}$$

Passo 4: Matrizes diagonalizadas

$$\mathbf{\Lambda} = \mathbf{PAP}^{-1} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\hat{\mathbf{B}} = \mathbf{PB} = \begin{bmatrix} 1 & -3/2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Equações desacopladas:

$$\dot{z}_1 = 4z_1 - \frac{1}{2}x, \quad \dot{z}_2 = -z_2 + 2x$$

Cada equação pode ser resolvida independentemente!

Interpretação Física da Diagonalização

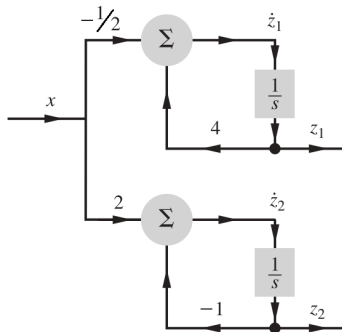


Figura: Estados desacoplados z_1, z_2 .

$$\dot{z}_1 = 4z_1 - \frac{1}{2}x$$

$$\dot{z}_2 = -z_2 + 2x$$

Observações:

- Estados diagonalizados z_i são **desacoplados** – não há interação entre eles
- Estados originais q_i são **acoplados** – há realimentação cruzada
- Ambas as realizações representam o **mesmo sistema**!
- A transformação é apenas uma **mudança de coordenadas**

Equação de estado a resolver:

$$\dot{\mathbf{q}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{q}(t) + \mathbf{B}\mathbf{x}(t), \quad \mathbf{q}(0) = \mathbf{q}_0$$

Dois métodos principais:

① Solução pela Transformada de Laplace

- Trabalhar no domínio da frequência
- Mais fácil e direto
- Semelhante ao que já conhecemos

② Solução no Domínio do Tempo

- Trabalhar diretamente no domínio do tempo
- Usa a matriz exponencial $e^{\mathbf{A}t}$
- Fornece maior insight sobre a estrutura da solução

Solução via Transformada de Laplace

Aplicando a transformada de Laplace à equação de estado:

$$\mathcal{L}\{\dot{\mathbf{q}}(t)\} = \mathcal{L}\{\mathbf{A}\mathbf{q}(t) + \mathbf{B}\mathbf{x}(t)\}$$

$$s\mathbf{Q}(s) - \mathbf{q}(0) = \mathbf{A}\mathbf{Q}(s) + \mathbf{B}\mathbf{X}(s)$$

Isolando $\mathbf{Q}(s)$:

$$(s\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{Q}(s) = \mathbf{q}(0) + \mathbf{B}\mathbf{X}(s)$$

Solução no Domínio de Laplace

$$\mathbf{Q}(s) = (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{q}(0) + (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}\mathbf{X}(s)$$

Onde: $\Phi(s) = (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}$ é a **matriz resolvente** ou transformada de Laplace da **matriz transição de estados** $\phi(t) = \mathcal{L}^{-1}\{\Phi(s)\}$.

Solução via Transformada de Laplace

Aplicando a transformada inversa de Laplace:

Solução Geral

$$\mathbf{q}(t) = \mathcal{L}^{-1}\{(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\}\mathbf{q}(0) + \mathcal{L}^{-1}\{(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}X(s)\}$$

A solução tem **duas componentes**:

- ① **Resposta de entrada nula:** $\mathbf{q}_{zi}(t) = \mathcal{L}^{-1}\{\Phi(s)\}\mathbf{q}(0) = \mathcal{L}^{-1}\{(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\}\mathbf{q}(0)$
 - Devido apenas às condições iniciais ($\mathbf{x}(t) = 0$)
- ② **Resposta de estado nulo:** $\mathbf{q}_{zs}(t) = \mathcal{L}^{-1}\{\Phi(s)\mathbf{B}X(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\{(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}X(s)\}$
 - Devido apenas à entrada ($\mathbf{q}(0) = 0$)

$$\mathbf{q}(t) = \mathbf{q}_{zi}(t) + \mathbf{q}_{zs}(t)$$

Matriz transição de estados

$$\phi(t) = \mathcal{L}^{-1}\{(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\} = e^{At}$$

(instante inicial $t_0 = 0$)

Exemplo 5: Solução via Laplace

Resolver o sistema:

$$\dot{\mathbf{q}} = \begin{bmatrix} -4 & -3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{q} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} x, \quad x(t) = u(t), \quad \mathbf{q}(0) = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Passo 1: Calcular $\Phi(s) = (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}$

$$s\mathbf{I} - \mathbf{A} = \begin{bmatrix} s+4 & 3 \\ -2 & s-1 \end{bmatrix}$$

$$|s\mathbf{I} - \mathbf{A}| = (s+4)(s-1) + 6 = s^2 + 3s + 2 = (s+1)(s+2)$$

$$\Phi(s) = (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} = \frac{1}{(s+1)(s+2)} \begin{bmatrix} s-1 & -3 \\ 2 & s+4 \end{bmatrix}$$

Exemplo 5: Continuação

Passo 2: Calcular $\mathbf{Q}(s)$

$$\mathbf{Q}(s) = (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{q}(0) + (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}X(s)$$

Com $\mathbf{q}(0) = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ e $X(s) = 1/s$:

$$\mathbf{Q}(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)} \begin{bmatrix} 2s-5 \\ 2s+7 \end{bmatrix} + \frac{1}{s(s+1)(s+2)} \begin{bmatrix} s+1 \\ s+6 \end{bmatrix}$$

Passo 3: Aplicar frações parciais e transformada inversa

$$\mathbf{q}(t) = \begin{bmatrix} -2e^{-t} + 3e^{-2t} \\ 4e^{-t} - 3e^{-2t} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 - e^{-t} \\ -1 + 3e^{-t} - 2e^{-2t} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{q}(t) = \begin{bmatrix} 1 - 3e^{-t} + 3e^{-2t} \\ -1 + 7e^{-t} - 5e^{-2t} \end{bmatrix}$$

Equação de saída:

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{q}(t) + \mathbf{D}\mathbf{x}(t)$$

Substituindo $\mathbf{Q}(s)$ da solução anterior:

$$\mathbf{Y}(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{q}(0) + \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}\mathbf{X}(s) + \mathbf{D}\mathbf{X}(s)$$

Resposta de estado nulo: (condições iniciais nulas)

Matriz de Função de Transferência

$$\mathbf{Y}(s) = [\mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D}]\mathbf{X}(s)$$

$$\mathbf{H}(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D}$$

Importante: A função de transferência pode ser obtida diretamente de $(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D})$!

Exemplo 6: Sistemas MIMO - Matriz de Função de Transferência

Para o sistema com duas entradas e três saídas:

$$\dot{\mathbf{q}} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \mathbf{q} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}, \quad \mathbf{y} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{q}$$

Calcular $(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}$:

$$(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{s+1} & 0 \\ \frac{-1}{(s+1)(s+2)} & \frac{1}{s+2} \end{bmatrix}$$

Matriz de função de transferência:

$$\mathbf{H}(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \frac{1}{s+1} & 0 \\ \frac{-1}{(s+1)(s+2)} & \frac{1}{s+2} \\ \frac{s+1}{(s+1)(s+2)} & \frac{1}{s+2} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Y}(s) = \mathbf{H}(s)\mathbf{X}(s)$$

⇒ $H(s)$ é a **Matriz de Transferência** de sistema MIMO com 3 saídas e 2 entradas.

Raízes Características (Autovalores)

Observação importante sobre $(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}$:

A matriz resolvente tem a forma:

$$(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} = \frac{\text{adj}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})}{|s\mathbf{I} - \mathbf{A}|}$$

Denominador comum: $|s\mathbf{I} - \mathbf{A}|$ – **polinômio característico**

Raízes Características (Autovalores)

Os zeros de $|s\mathbf{I} - \mathbf{A}|$ são chamados de **autovalores** ou **raízes características** da matriz $\mathbf{A}$.

$$|s\mathbf{I} - \mathbf{A}| = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N$$

Consequência: Se a realização é mínima, os autovalores de $\mathbf{A}$ são os **polos** de $\mathbf{H}(s)$!

Autovalores de $\mathbf{A}$ = Pólos de $H(s)$

Exceto por possíveis cancelamentos polo-zero!

Solução no Domínio do Tempo - caso homogêneo

Considere o sistema de equações diferenciais:

$$\dot{q}(t) = Aq(t), \quad q(0) = q_0, \quad q(t) \in \mathbb{R}^2,$$

Solução geral:

$$q(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} v_1 + c_2 e^{\lambda_2 t} v_2, \quad v_i \in \mathbb{R}^2, \quad c_i \in \mathbb{R},$$

Substituindo:

$$\dot{q}_i = c_i \lambda_i e^{\lambda_i t} v_i \Rightarrow A(c_i e^{\lambda_i t} v_i) = c_i e^{\lambda_i t} A v_i \Rightarrow (\lambda_i I - A)v_i = 0 \quad (\text{autovalor, autovetor de } A)$$

Forma matricial

$$q(t) = \underbrace{\begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} v_1 & e^{\lambda_2 t} v_2 \end{bmatrix}}_{\Psi(t)} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \Psi(t)c, \quad (\Psi(t) \text{ matriz fundamental})$$

Solução particular: aplicando a condição inicial

$$q(0) = \Psi(0)c = q_0 \Rightarrow c = \Psi(0)^{-1}q_0, \quad \boxed{q(t) = \Psi(t)\Psi(0)^{-1}q_0 = \Phi(t)q_0, \quad \Phi(t) = e^{At}, \quad \Phi(0) = I}$$

● A **matriz transição de estados** $\Phi(t) = e^{At}$ descreve a evolução completa do sistema.

Interpretação geométrica

Se a condição inicial está sobre um autovetor, $q_0 \in \text{span}(v_i)$ (por ex., $q(0) = q_0 = v_1$), então

$$q(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} v_1 + c_2 e^{\lambda_2 t} v_2 \Rightarrow c_1 = 1, c_2 = 0 \Rightarrow \boxed{q(t) = e^{\lambda_1 t} v_1}$$

a trajetória permanece nessa direção, ou seja, o movimento ocorre somente ao longo da direção do autovetor.

• Para

$$\dot{q}(t) = Aq(t), \quad y(t) = Cq(t), \quad q(0) = v_i, \quad (\lambda_i I - A)v_i = 0, \quad q \in \mathbb{R}^N$$

Então $y(t) = e^{\lambda_i t} C v_i$. Se $C v_i = 0$, então $y(t) = 0$.

Condição de observabilidade (teste PBH)

$$\begin{aligned} (\lambda_i I - A)v_i = 0 \\ C v_i \neq 0 \end{aligned} \Rightarrow \text{rank} \left(\begin{bmatrix} \lambda_i I - A \\ C \end{bmatrix} \right) = N, \quad \forall \lambda_i \in \sigma(A)$$

Condição de controlabilidade (teste PBH)

Pela dualidade (transposto): $\text{rank} \left(\begin{bmatrix} \lambda_i I - A & B \end{bmatrix} \right) = N, \quad \forall \lambda_i \in \sigma(A)$

Solução no Domínio do Tempo - caso geral

Equação de estado: $\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{A}\mathbf{q} + \mathbf{B}\mathbf{x}$

Multiplicando por $e^{-\mathbf{A}t}$:

$$e^{-\mathbf{A}t}\dot{\mathbf{q}} - e^{-\mathbf{A}t}\mathbf{A}\mathbf{q} = e^{-\mathbf{A}t}\mathbf{B}\mathbf{x} \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt}[e^{-\mathbf{A}t}\mathbf{q}] = e^{-\mathbf{A}t}\mathbf{B}\mathbf{x}$$

Integrando de 0 a t :

$$e^{-\mathbf{A}t}\mathbf{q}(t) - \mathbf{q}(0) = \int_0^t e^{-\mathbf{A}\tau}\mathbf{B}\mathbf{x}(\tau)d\tau$$

Solução Geral no Domínio do Tempo

$$\mathbf{q}(t) = e^{\mathbf{A}t}\mathbf{q}(0) + \int_0^t e^{\mathbf{A}(t-\tau)}\mathbf{B}\mathbf{x}(\tau)d\tau$$

Forma de convolução: $\mathbf{q}(t) = e^{\mathbf{A}t}\mathbf{q}(0) + e^{\mathbf{A}t} * \mathbf{B}\mathbf{x}(t)$

Matriz de Transição de Estados

Definição

A matriz $e^{\mathbf{A}t}$ é chamada de **Matriz de Transição de Estados** (MTE) e denotada por $\phi(t)$:

$$\phi(t) = e^{\mathbf{A}t}$$

Propriedades da MTE:

- $\phi(0) = \mathbf{I}$
- $\phi(t_1)\phi(t_2) = \phi(t_1 + t_2)$
- $[\phi(t)]^{-1} = \phi(-t)$
- $\mathcal{L}\{\phi(t)\} = (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}$

Com a MTE, a solução fica:

$$\mathbf{q}(t) = \phi(t)\mathbf{q}(0) + \int_0^t \phi(t - \tau)\mathbf{B}\mathbf{x}(\tau)d\tau$$

Matriz Exponencial $e^{\mathbf{A}t}$

Definição por analogia com a exponencial escalar:

Para um escalar: $e^{at} = 1 + at + \frac{(at)^2}{2!} + \frac{(at)^3}{3!} + \dots$

Matriz Exponencial

$$e^{\mathbf{A}t} = \mathbf{I} + \mathbf{A}t + \frac{(\mathbf{A}t)^2}{2!} + \frac{(\mathbf{A}t)^3}{3!} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\mathbf{A}t)^k}{k!}$$

Propriedades importantes:

- $e^{\mathbf{A} \cdot 0} = \mathbf{I}$
- $\frac{d}{dt} e^{\mathbf{A}t} = \mathbf{A}e^{\mathbf{A}t} = e^{\mathbf{A}t} \mathbf{A}$
- $e^{-\mathbf{A}t} e^{\mathbf{A}t} = e^{\mathbf{A}t} e^{-\mathbf{A}t} = \mathbf{I}$
- $(e^{\mathbf{A}t})^{-1} = e^{-\mathbf{A}t}$

Nota: $e^{(\mathbf{A}+\mathbf{B})t} \neq e^{\mathbf{A}t} e^{\mathbf{B}t}$ em geral (apenas se $\mathbf{AB} = \mathbf{BA}$)

Três métodos principais:

- ❶ **Pela série infinita** (definição) $\rightsquigarrow$ trabalhoso, raramente usado na prática

$$e^{\mathbf{A}t} = \mathbf{I} + \mathbf{A}t + \frac{(\mathbf{A}t)^2}{2!} + \dots$$

- ❷ **Pela transformada de Laplace** $\rightsquigarrow$ método mais comum

$$e^{\mathbf{A}t} = \mathcal{L}^{-1}\{(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\}$$

- ❸ **Pela fórmula de Sylvester** (para autovalores distintos) $\rightsquigarrow$ útil quando os autovalores são conhecidos

$$e^{\mathbf{A}t} = \sum_{i=1}^N e^{\lambda_i t} \frac{\prod_{j \neq i} (\mathbf{A} - \lambda_j \mathbf{I})}{\prod_{j \neq i} (\lambda_i - \lambda_j)}$$

Forma Diagonal

Se equação de estado está na forma diagonal (autovalores distintos) $\rightsquigarrow$ N independente equações:

$$\dot{z}_i = \lambda_i z_i + \hat{b}_i x$$

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{z}} &= \mathbf{\Lambda} \mathbf{z} + \hat{\mathbf{B}} \mathbf{x}, \\ \mathbf{y} &= \hat{\mathbf{C}} \mathbf{z} + \mathbf{D} \mathbf{x}, \end{aligned} \quad \mathbf{\Lambda} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_N \end{bmatrix}$$

Se autovalores distintos:

$$e^{\mathbf{\Lambda} t} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & e^{\lambda_N t} \end{bmatrix}$$

● Se $\mathbf{A}$ tiver autovalores repetidos ou não for diagonalizável $\rightsquigarrow$ obter forma diagonalizada por blocos (forma canônica de Jordan).

Exemplo 7: Solução no Domínio do Tempo

Mesmo sistema do Exemplo 5:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -4 & -3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad x(t) = u(t), \quad \mathbf{q}(0) = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Passo 1: Calcular autovalores de $\mathbf{A}$

$$|s\mathbf{I} - \mathbf{A}| = s^2 + 3s + 2 = (s + 1)(s + 2) = 0$$

$$\lambda_1 = -1, \quad \lambda_2 = -2$$

Passo 2: Usar fórmula de Sylvester

$$e^{\mathbf{A}t} = e^{-t} \frac{\mathbf{A} + 2\mathbf{I}}{-1 + 2} + e^{-2t} \frac{\mathbf{A} + \mathbf{I}}{-2 + 1}$$

$$e^{\mathbf{A}t} = \begin{bmatrix} -2e^{-t} + 3e^{-2t} & -3e^{-t} + 3e^{-2t} \\ 2e^{-t} - 2e^{-2t} & 3e^{-t} - 2e^{-2t} \end{bmatrix}$$

Exemplo 7: Continuação

Componente de entrada nula:

$$\mathbf{q}_{zi}(t) = e^{\mathbf{A}t} \mathbf{q}(0) = \begin{bmatrix} -2e^{-t} + 3e^{-2t} & -3e^{-t} + 3e^{-2t} \\ 2e^{-t} - 2e^{-2t} & 3e^{-t} - 2e^{-2t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{q}_{zi}(t) = \begin{bmatrix} -7e^{-t} + 9e^{-2t} \\ 7e^{-t} - 6e^{-2t} \end{bmatrix}$$

Componente de estado nulo:

$$\mathbf{q}_{zs}(t) = \int_0^t e^{\mathbf{A}(t-\tau)} \mathbf{B}u(\tau) d\tau = \int_0^t e^{\mathbf{A}(t-\tau)} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} d\tau$$

Após integração:

$$\mathbf{q}_{zs}(t) = \begin{bmatrix} 1 + 4e^{-t} - 6e^{-2t} \\ -1 - 4e^{-t} + e^{-2t} \end{bmatrix}$$

Solução total:

$$\boxed{\mathbf{q}(t) = \begin{bmatrix} 1 - 3e^{-t} + 3e^{-2t} \\ -1 + 7e^{-t} - 5e^{-2t} \end{bmatrix}} \quad (\text{igual ao Ex. 5})$$

Exemplo MATLAB: Solução via Exponencial Matricial

```
1 % Definir o sistema
2 A = [-4 -3; 2 1];
3 B = [1; 1];
4 q0 = [2; 1];
5 % Vetor de tempo
6 t = 0:0.01:5;
7 % Calcular  $e^{At}$  para cada instante
8 n = length(t);
9 q = zeros(2, n);
10
11 for k = 1:n
12     % Exponencial matricial: expm(A*t(k))
13     Phi_t = expm(A*t(k));
14     % Componente de entrada nula
15     q_zi = Phi_t * q0;
16     % Componente de estado nulo (integral numerica)
17     integrand = @(tau) expm(A*(t(k)-tau))*B;
18     q_zs = integral(integrand, 0, t(k), 'ArrayValued', true);
19     % Solucao total
20     q(:,k) = q_zi + q_zs;
21 end
22 % Plotar
23 plot(t, q(1,:), 'b-', t, q(2,:), 'r—', 'LineWidth', 1.5);
24 xlabel('Tempo (s)'); ylabel('Estado');
25 legend('q_1(t)', 'q_2(t)'); grid on;
```

Conceitos Fundamentais

Duas propriedades estruturais importantes de sistemas:

Controlabilidade

Um sistema é **controlável** se é possível transferir o sistema de qualquer estado inicial $\mathbf{q}(t_0)$ para qualquer estado final $\mathbf{q}(t_f)$ em tempo finito, usando uma entrada apropriada $\mathbf{x}(t)$.

Observabilidade

Um sistema é **observável** se é possível determinar o estado inicial $\mathbf{q}(t_0)$ a partir do conhecimento da entrada $\mathbf{x}(t)$ e da saída $\mathbf{y}(t)$ em um intervalo finito de tempo $[t_0, t_f]$.

Interpretação:

- **Controlabilidade:** Podemos **controlar** todos os estados pela entrada?
- **Observabilidade:** Podemos **observar** todos os estados pela saída?

Equações de Estado

$$\dot{\mathbf{q}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{q}(t) + \mathbf{B}\mathbf{x}(t)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{q}(t) + \mathbf{D}\mathbf{x}(t)$$

Interpretação:

- **Controlabilidade do par (A, B) :** A falta de controlabilidade pode ser interpretada como a impossibilidade de calcular uma entrada de controle que possa direcionar todas as coordenadas do vetor de estado para um local desejado.
- **Observabilidade do par (A, C) :** A perda de observabilidade é que nem todas as coordenadas do vetor de estado podem ser estimadas apenas através de medições da saída e suas derivadas.

Dualidade

Seja a realização (A_1, B_1, C_1, D_1) e seu transposto (dual) $(A_2, B_2, C_2, D_2) = (A_1^T, C_1^T, B_1^T, D_1^T)$

$$(A_1, B_1) \text{ controlável} \Leftrightarrow (A_2, C_2) \text{ observável}$$

$$(A_1, C_1) \text{ observável} \Leftrightarrow (A_2, B_2) \text{ controlável}$$

Realização Mínima

Considere a realização no formato

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ \beta \end{bmatrix}, \quad C = [\alpha \quad 1], \quad D = \gamma.$$

Função de transferência de segunda ordem:

$$H(s) = C(sI - A)^{-1}B + D = \frac{\alpha + \beta}{s} + \frac{\alpha\beta}{s^2} + \gamma.$$

Pergunta: O que ocorre quando $\alpha = 0$ ou $\beta = 0$?

- Equação de estados não parece mudar de estrutura (dimensão do vetor de estados é 2).
- **Ordem da função de transferência diminui se $\alpha = 0$ ou $\beta = 0$** (ordem do denominador diminui de 2 para 1).

Realização Mínima

Mesmo que a forma de espaço de estados não pareça mudar, o **grau do sistema diminui** quando α ou β são zero.

- Se um deles é zero, a ordem de $H(s)$ cai de 2 para 1.
- Se $\alpha = \beta = 0$, a ordem cai para 0 e $H(s) = \gamma$.

Isso indica um **cancelamento polo-zero** interno: a equação no espaço de estados não é mais uma **realização mínima** de $H(s)$ $\rightsquigarrow$ o grau do modelo não coincide com a dimensão do vetor de estados.

Realização mínima (sistemas SISO)

dimensão do vetor de estados = ordem do denominador da função de transferência (após cancelamento entre polos e zeros)

Realização mínima e controlabilidade/observabilidade

Uma **realização mínima** no espaço de estados é a representação matemática que utiliza a menor dimensão possível para o vetor de estados. Para que isso ocorra, o modelo no espaço de estados deve ser **simultaneamente controlável e observável**, garantindo que não existam estados redundantes ou modos ocultos.

Realização mínima

● Exemplo:

$$H(s) = \frac{s^2 + 3s + 2}{s^3 + 8s^2 + 19s + 12} \Rightarrow \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -12 & -19 & -8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad y = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix}$$

Note que,

$$H(s) = \frac{s^2 + 3s + 2}{s^3 + 8s^2 + 19s + 12} = \frac{(s+1)(s+2)}{(s+1)(s+3)(s+4)} = \frac{(s+2)}{(s+3)(s+4)} \rightarrow \text{ordem 2}$$

↪ a **realização não é mínima** pois dimensão 3 de q é maior que a ordem 2 de $H(s)$.

↪ de fato a realização de espaço de estados é controlável mas **não é observável**: o polo -1 fica oculto na relação entrada-saída devido ao cancelamento com o zero (modo e^{-1t} não influencia a saída).

Realização mínima

- Exemplo:

$$H(s) = \frac{1}{s^2 + 3s + 2} \Rightarrow \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix}$$

↪ é uma **realização mínima**, e portanto, **controlável e observável**, pois a dimensão 2 de q é igual a ordem 2 de $H(s)$.

- A equação de estados abaixo também é uma realização para $H(s)$

$$\begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \Rightarrow \quad H(s) = C(sI - A)^{-1}B = \frac{1}{s^2 + 3s + 2}$$
$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix}$$

mas **não é uma realização não mínima**: dimensão 3 de q maior que ordem 2 de $H(s)$.

De fato, a realização acima é controlável mas **não observável** (basta ver que a EE é bloco diagonal).

Note que a realização transposta, (A^T, C^T, B^T, D^T) é observável, mas não controlável.

Teste de Controlabilidade e Observabilidade (Forma Diagonal)

Para sistemas na forma diagonal:

$$\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{\Lambda}\mathbf{z} + \hat{\mathbf{B}}\mathbf{x}, \quad \mathbf{y} = \hat{\mathbf{C}}\mathbf{z}$$

onde $\mathbf{\Lambda} = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N)$

Teste de Controlabilidade (EE na forma diagonal)

O sistema é **completamente controlável** se e somente se a matriz $\hat{\mathbf{B}}$ **não possui nenhuma linha completamente nula**.

Interpretação: Cada modo $e^{\lambda_i t}$ deve estar acoplado a pelo menos uma entrada.

Teste de Observabilidade (EE na forma diagonal)

O sistema é **completamente observável** se e somente se a matriz $\hat{\mathbf{C}}$ **não possui nenhuma coluna completamente nula**.

Interpretação: Cada modo $e^{\lambda_i t}$ deve aparecer em pelo menos uma saída.

Exemplo 8: Sistema (a)

Equações de estado:

$$\dot{\mathbf{q}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{q} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} x, \quad y = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{q}$$

Já está na forma diagonal! $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$

Teste de controlabilidade:

$$\hat{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{Nenhuma linha é nula}$$

Sistema é **CONTROLÁVEL**

Teste de observabilidade:

$$\hat{\mathbf{C}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{Primeira coluna é nula!}$$

Sistema é **NÃO OBSERVÁVEL**

O modo e^t ($\lambda_1 = 1$) não aparece na saída!

Exemplo 9: Sistema (b)

Equações de estado:

$$\dot{\mathbf{q}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{q} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} x, \quad y = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{q}$$

Já está na forma diagonal! $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$

Teste de controlabilidade:

$$\hat{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{Primeira linha é nula!}$$

Sistema é **NÃO CONTROLÁVEL**

Teste de observabilidade:

$$\hat{\mathbf{C}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{Nenhuma coluna é nula}$$

Sistema é **OBSERVÁVEL**

O modo e^t ($\lambda_1 = 1$) não pode ser controlado pela entrada!

Realizações Equivalentes dos Sistemas

Sistema (a):

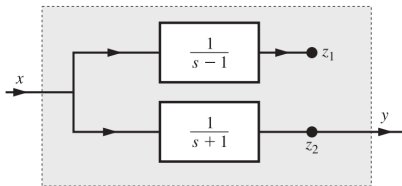


Figura: Realização do sistema (a). Fonte: Lathi, 2000.

Sistema (b):

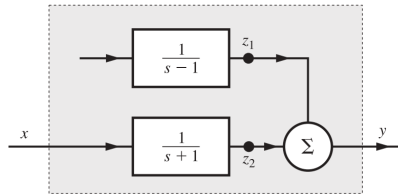


Figura: Realização do sistema (b). Fonte: Lathi, 2000.

Controlável, mas não observável

Observável, mas não controlável

Observações:

- Os dois sistemas têm $H(s) = \frac{1}{s+1}$ (mesmo polo em $s = -1$)
- O polo instável em $s = 1$ **não aparece** em $H(s)$ devido a cancelamento!
- **Limitação da função de transferência:** não revela modos não controláveis/observáveis!

Incapacidade da Função de Transferência

Fato Importante

A função de transferência $H(s)$ descreve apenas a parte do sistema que é **simultaneamente controlável E observável**.

Modos que são não controláveis OU não observáveis **não aparecem** em $H(s)$ devido a cancelamentos polo-zero!

Consequências:

- $H(s)$ é uma **descrição externa** – vê apenas entrada-saída
- Não revela modos internos que não afetam a relação entrada-saída
- Pode ocultar **instabilidades internas**!

Vantagem do espaço de estados:

- **Descrição interna completa** do sistema
- Revela **todos** os modos, controláveis/observáveis ou não
- Permite análise de controlabilidade e observabilidade

Para sistemas controláveis e observáveis, as descrições por $H(s)$ e por espaço de estados são equivalentes!

Estabilidade no Espaço de Estados

A estabilidade é determinada pelos **autovalores de $\mathbf{A}$** !

Os modos característicos do sistema têm a forma $e^{\lambda_i t}$ (ou $t^r e^{\lambda_i t}$ para autovalores repetidos), onde $\lambda_1, \dots, \lambda_N$ são as raízes de $|s\mathbf{I} - \mathbf{A}| = 0$.

Estabilidade Interna (Assintótica) – Critério dos Autovalores de $\mathbf{A}$

- 1 **Assintoticamente estável** sse **todos** os λ_i estão no SPE ($\text{Re } \lambda_i < 0$)
- 2 **Instável** sse (i) algum λ_i está no SPD, **ou** (ii) há λ_i **repetidos** no eixo imaginário
- 3 **Marginalmente estável** sse nenhum λ_i está no SPD e há λ_i **não repetidos** no eixo imaginário

Equivalência com os pólos de $H(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D}$:

Os pólos de $H(s)$ são um **subconjunto** dos autovalores de $\mathbf{A}$ (podem ocorrer cancelamentos pólo-zero).

Sem cancelamentos, pólos de $H(s) \equiv$ autovalores de $\mathbf{A}$.

Estabilidade BIBO (Externa)

O sistema é **BIBO estável** se toda entrada limitada produz saída limitada, isto é, se $h(t)$ (resposta ao impulso) é absolutamente integrável $\Leftrightarrow$ todo **pólo de** $H(s)$ está no SPE.

Relação entre as duas noções de estabilidade:

Estabilidade Interna (assintótica) $\Rightarrow$ Estabilidade BIBO

A implicação inversa **NÃO** vale em geral!

Exemplo (cancelamento pólo-zero –ver Exemplo 8): dois subsistemas em cascata, $H_1(s) = \frac{1}{s-1}$ e

$$H_2(s) = \frac{s-1}{s+1}:$$

$$H(s) = H_1(s)H_2(s) = \frac{1}{s+1} \Rightarrow \text{BIBO estável}$$

Mas o modo e^t ($\lambda = 1$, SPD) persiste internamente $\Rightarrow$ sistema **assintoticamente instável!**

Estabilidade Interna $\times$ BIBO e Realização Mínima

Estabilidade BIBO (Externa)

O sistema é **BIBO estável** se toda entrada limitada produz saída limitada, isto é, se $h(t)$ (resposta ao impulso) é absolutamente integrável $\Leftrightarrow$ todo **pólo de $H(s)$** está no SPE.

Relação entre as duas noções de estabilidade:

Estabilidade Interna (assintótica) $\implies$ Estabilidade BIBO

A implicação inversa **NÃO** vale em geral!

Realização Mínima

Uma realização $(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D})$ é **mínima** quando N (ordem de $\mathbf{A}$) é igual à ordem do polinômio característico de $H(s)$ – ou seja, quando o sistema é **controlável e observável** (sem cancelamentos).

Realização mínima $\implies$ Estabilidade Interna $\equiv$ Estabilidade BIBO

Interconexão em cascata (série)

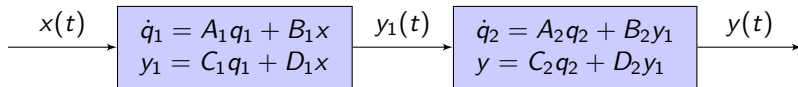


Figura: Conexão em série ou cascata ($x_2 = y_1$).

Sistema correspondente:

$$\begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ B_2 C_1 & A_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 D_1 \end{bmatrix} x, \quad y = \begin{bmatrix} D_2 C_1 & C_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} + D_2 D_1 x,$$

com estado $q := [q_1^T \ q_2^T]^T \in \mathbb{R}^{N_1+N_2}$. A estrutura em cascata é responsável pela estrutura triangular em blocos na matriz $\begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ B_2 C_1 & A_2 \end{bmatrix}$, e, de fato, uma estrutura triangular em blocos nesta matriz indica que o sistema em espaço de estados pode ser decomposto como uma cascata de dois sistemas em espaço de estados com estados menores.

Interconexão em paralelo

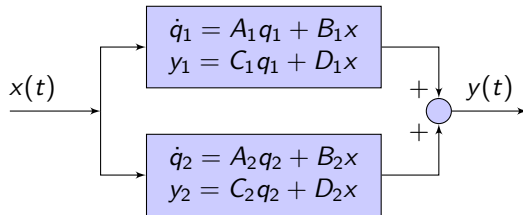


Figura: Conexão em paralelo ($x_1 = x_2 = x$ e $y = y_1 + y_2$).

Sistema correspondente:

$$\begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} x, \quad y = \begin{bmatrix} C_1 & C_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} + (D_1 + D_2)x,$$

com estado $q := [q_1^T \ q_2^T]^T \in \mathbb{R}^{N_1+N_2}$. A estrutura em paralelo é responsável pela estrutura diagonal em blocos na matriz $\begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix}$, e, de fato, uma estrutura diagonal em blocos nesta matriz indica que o sistema em espaço de estados pode ser decomposto como o paralelo de dois sistemas em espaço de estados com estados menores.

Interconexão em realimentação (*feedback*)

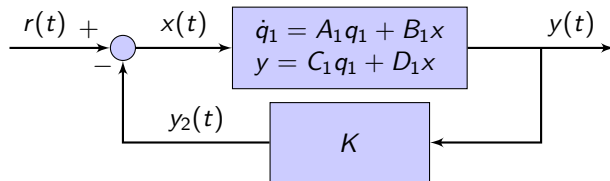


Figura: Conexão em realimentação negativa ($x = r - y_2$).

Normalmente deseja-se que a saída y siga a referência externa r . Sistema correspondente:

$$\begin{aligned}\dot{q}_1 &= (A_1 - B_1 K (I + D_1 K)^{-1} C_1) q_1 + B_1 (I - (I + D_1 K)^{-1} D_1) r \\ y &= (I + D_1 K)^{-1} C_1 q_1 + (I + D_1 K)^{-1} D_1 r,\end{aligned}$$

com estado $q_1 \in \mathbb{R}^{n_1}$. A interconexão é dita *bem posta* se a matriz $(I + D_1)$ for não singular (existe inversa).

● Para $D_1 = 0$:

$$\begin{aligned}\dot{q}_1 &= (A_1 - B_1 K C_1) q_1 + B_1 r \\ y &= C_1 q_1\end{aligned}$$

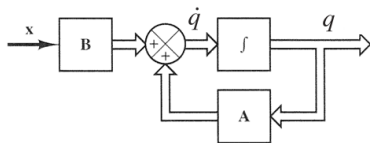
Controle por realimentação de estados

Considere $C = I$, ou seja, os estados são medidos.

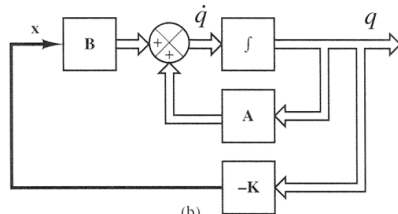
$$\dot{q} = Aq + Bx$$

$$y = q$$

- Lei de controle por realimentação de estados: $x = -Kq + v$.
- Sistema em malha fechada: $\dot{q} = (A - BK)q + Bv \rightsquigarrow$ autovalores ou polos do sistema em malha fechada $|sI - (A - BK)| = 0$.



(a)



(b)

Figura: (a) Sistema em malha aberta. (b) Sistema em malha fechada com controle por realimentação de estados $x = -Kq$.

Controle por realimentação de estados

Seja o sistema na forma canônica controlável e uma lei de controle por realimentação de estados

$$\dot{q} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_3 & -a_2 & -a_1 \end{bmatrix} q + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} x, \quad |sI - A| = s^3 + a_1 s^2 + a_2 s + a_3$$
$$x = -Kq + v, \quad K = [k_3 \quad k_2 \quad k_1]$$

● Sistema em malha fechada: $\dot{q} = (A - BK)q + Bv \rightsquigarrow$ deseja-se alocar os autovalores ou polos do sistema em malha fechada em p_1 , p_2 e p_3

$$|sI - (A - BK)| = (s - p_1)(s - p_2)(s - p_3) = s^3 + \hat{a}_1 s^2 + \hat{a}_2 s + \hat{a}_3$$

● Escolhendo

$$K = [k_3 \quad k_2 \quad k_1] = [\hat{a}_3 - a_3 \quad \hat{a}_1 - a_1 \quad \hat{a}_2 - a_2]$$

tem-se

$$A - BK = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_3 & -a_2 & -a_1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} [\hat{a}_3 - a_3 \quad \hat{a}_1 - a_1 \quad \hat{a}_2 - a_2] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -\hat{a}_3 & -\hat{a}_2 & -\hat{a}_1 \end{bmatrix}$$

Obs.: Se a equação de estado não está na forma controlável, basta fazer transformação $q = Pz$.

Resumo: Análise no Espaço de Estados

Conceitos fundamentais:

- **Variáveis de estado:** conjunto mínimo que caracteriza o sistema
- **Equações de estado:** $\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{A}\mathbf{q} + \mathbf{B}\mathbf{x}$
- **Equações de saída:** $\mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{q} + \mathbf{D}\mathbf{x}$

Métodos de solução:

- Pela transformada de Laplace: $\mathbf{Q}(s) = (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}[\mathbf{q}(0) + \mathbf{B}\mathbf{X}(s)]$
- No domínio do tempo: $\mathbf{q}(t) = e^{\mathbf{A}t}\mathbf{q}(0) + \int_0^t e^{\mathbf{A}(t-\tau)}\mathbf{B}\mathbf{x}(\tau)d\tau$

Propriedades estruturais:

- **Controlabilidade:** todos os estados podem ser controlados pela entrada
- **Observabilidade:** todos os estados podem ser observados pela saída
- **Diagonalização:** desacoplamento das equações de estado

Relação com função de transferência:

$$\mathbf{H}(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D}$$

Comparação: Espaço de Estados vs. Função de Transferência

Espaço de Estados	Função de Transferência
Descrição interna	Descrição externa
Revela todos os modos do sistema	Revela apenas modos controláveis E observáveis
Aplicável a sistemas MIMO	Limitado para sistemas SISO (ou MIMO simples)
Aplicável a sistemas lineares e não lineares	Apenas sistemas lineares
Aplicável a sistemas invariantes e variantes no tempo	Apenas sistemas invariantes no tempo
Permite análise de controlabilidade e observabilidade	Não fornece essa informação
Equações diferenciais de 1ª ordem	Equação diferencial de ordem N
Ideal para simulação computacional	Menos adequado para simulação

Conclusão: Análise no espaço de estados é mais **geral e poderosa!**

Aplicações da Análise no Espaço de Estados

Áreas de aplicação:

1 Teoria de Controle Moderno

- Projeto de controladores por realimentação de estados
- Controle ótimo (LQR, LQG)
- Observadores de estado (filtro de Kalman)

2 Sistemas Multivariáveis (MIMO)

- Controle de processos industriais
- Sistemas aeroespaciais
- Robótica

3 Análise de Sistemas

- Estabilidade
- Controlabilidade e observabilidade
- Análise modal

4 Simulação Computacional

- MATLAB/Simulink
- Ferramentas de CAD para controle

Ferramentas MATLAB para Espaço de Estados

Comandos principais do Control System Toolbox:

```
1 % Criar sistema no espaco de estados
2 sys = ss(A, B, C, D);
3 % Conversao H(s) -> espaco de estados
4 [A, B, C, D] = tf2ss(num, den);
5 % Conversao espaco de estados -> H(s)
6 [num, den] = ss2tf(A, B, C, D);
7 % Resposta ao degrau
8 step(sys);
9 % Resposta ao impulso
10 impulse(sys);
11 % Autovalores (polos)
12 poles = eig(A);
13
14 % Teste de controlabilidade
15 Wc = ctrb(A, B);
16 rank_Wc = rank(Wc); % rank = N => controlavel
17
18 % Teste de observabilidade
19 Wo = obsv(A, C);
20 rank_Wo = rank(Wo); % rank = N => observavel
```

Exercícios Propostos

Para fixação dos conceitos:

- 1 Determine as equações de estado para o circuito RLC série com entrada de tensão $v(t)$ e saída igual à corrente $i(t)$.
- 2 Para $H(s) = \frac{s+3}{s^2+4s+3}$:
 - Obtenha as equações de estado nas formas FDII e diagonal
 - Calcule e^{At} para ambas as formas
 - Compare os resultados

- 3 Para o sistema:

$$\dot{\mathbf{q}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \mathbf{q} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} x, \quad y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{q}$$

- Diagonalize o sistema
- Teste controlabilidade e observabilidade
- Obtenha $H(s)$ e compare com os autovalores de $\mathbf{A}$

Referências principais:

- **Nise, Norman S.** *Engenharia de Sistemas de Controle*, 6th ed., LTC, 2012.
 - Seções 3.5, 4.10, 6.5, e 12.2.
- **Lathi, B.** *Sinais e Sistemas Lineares*, 2ª ed., Bookman, 2006.
 - Capítulo 10: Análise no Espaço de Estados
 - Apêndice B.6: Álgebra Matricial (revisão)
- **Oppenheim, A.V.; Willsky, A.S.** *Signals and Systems*, 2nd ed., Prentice Hall, 1997.
 - Chapter 9: The State-Variable Description of Systems
- **Ogata, K.** *Modern Control Engineering*, 5th ed., Prentice Hall, 2010.
 - Capítulos sobre análise e projeto no espaço de estados

Material complementar:

- Exemplos de Computador (MATLAB) do Capítulo 10 do Lathi
- Problemas propostos (Cap. 10, Lathi)