

ENE0067 – Sinais e Sistemas em Tempo Contínuo

Série de Fourier (parte 1)

Prof. Eduardo Stockler Tognetti

Departamento de Engenharia Elétrica
Universidade de Brasília – UnB



Sumário da Aula

- 1 Introdução
- 2 Série Trigonométrica de Fourier
- 3 Funções Pares e Ímpares
- 4 Efeito da Simetria
- 5 Forma Compacta da Série de Fourier
- 6 Espectro de Fourier
- 7 Determinação da Frequência e Período Fundamental
- 8 Resumo e Conclusões

- **Análise espectral de sinais:** um tópico fundamental em engenharia
- Aplicações práticas:
 - Sinais de áudio têm largura de banda de aproximadamente 20 kHz
 - Alto-falantes de qualidade devem responder até 20 kHz
 - Pensar no domínio da frequência é essencial
- Agora: **representação espectral de sinais**

Objetivo da Aula

Mostrar que um sinal periódico pode ser representado como a soma de senoides (ou exponenciais) de várias frequências

Definição de Sinal Periódico

Definição

Um sinal $x(t)$ é **periódico** se para alguma constante positiva T_0 :

$$x(t) = x(t + T_0) \quad \text{para todo } t \quad (1)$$

- O menor valor de T_0 que satisfaz a condição é o **período fundamental**
- Um sinal periódico deve começar em $-\infty$ e continuar até $+\infty$
- A área sob $x(t)$ para qualquer intervalo de duração T_0 é a mesma

$$\int_a^{a+T_0} x(t) dt = \int_b^{b+T_0} x(t) dt \quad (2)$$

Propriedades de Sinais Periódicos

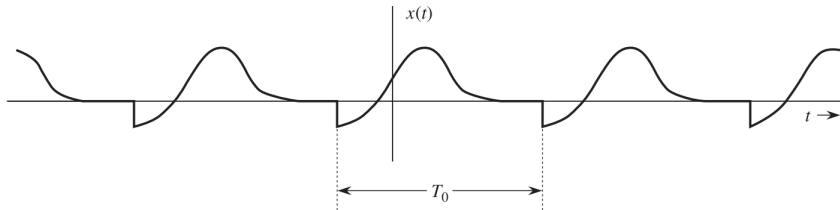


Figura: Um sinal periódico de período T_0 . Fonte: Lathi, 2000.

Propriedades Fundamentais

- Valores repetem a cada período T_0
- Área sob qualquer intervalo de duração T_0 é constante
- Pode ser gerado pela extensão periódica de qualquer segmento de duração T_0

Construindo um Sinal Periódico a partir de $x(t)$

● Dado um sinal não periódico $x(t)$ de duração finita T_0 , construímos um sinal periódico $x_{T_0}(t)$ que repete $x(t)$ a cada T_0 segundos.

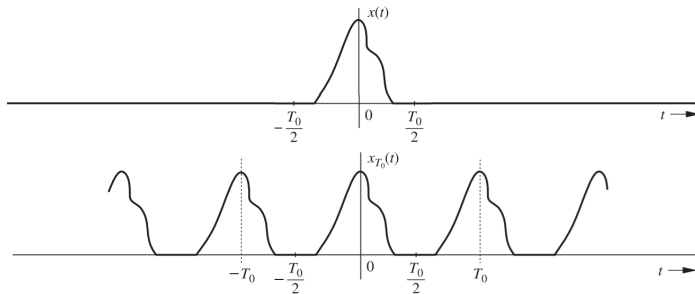


Figura: Construção de um sinal periódico pela extensão de $x(t)$. Fonte: Lathi, 2000.

Período de sinais

Seja uma sinal com período fundamental T_0 :

$$x(t) = x(t + T_0)$$

Frequência fundamental:

$$f_0 = 1/T_0 \quad [\text{Hz}]$$

$$\omega_0 = 2\pi f_0 = \frac{2\pi}{T_0} \quad [\text{rad/s}]$$

Harmônicas

- Primeira harmônica: senoide de frequência f_0
- Segunda harmônica: senoide de frequência $2f_0$
- Terceira harmônica: senoide de frequência $3f_0$
- n-ésima harmônica: senoide de frequência nf_0

Senoides e Harmônicos

- Frequência de $\cos(2\pi f_0 t)$ ou $\sin(2\pi f_0 t)$ é f_0
- Período é $T_0 = 1/f_0$
- Também expressas como $\cos(\omega_0 t)$ ou $\sin(\omega_0 t)$, onde $\omega_0 = 2\pi f_0 = \frac{2\pi}{T_0}$
- A senoide de frequência nf_0 é a **n-ésima harmônica** da senoide de frequência f_0

Período de sinais senoidais

O sinal $x_n(t) = \cos(n\omega_0 t)$, $n = 1, 2, 3, \dots$, tem **período fundamental** $T_n = \frac{2\pi}{n\omega_0}$ e **período** $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$.

• Seja $x_n(t) = \cos(n\omega_0 t)$, $n = 1, 2, 3, \dots$. O período fundamental de $x_n(t)$ é $T_n = \frac{2\pi}{n\omega_0}$, ou seja, $x_n(t + T_n) = x_n(t)$. Seja $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$, então T_0 também é um período de $x_n(t)$, ou seja, $x_n(t + T_0) = x_n(t)$.

↪ Prova: da relação $\omega_0 T_0 = 2\pi$, verifica-se $x_n(t + T_0) = \cos(n\omega_0(t + T_0)) = \cos(n\omega_0 t + n2\pi) = x(t)$.

Propriedade de Periodicidade

Teorema

O sinal $x(t)$ da forma:

$$x(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(n\omega_0 t) + b_n \sin(n\omega_0 t)] \quad (3)$$

onde ω_0 é chamada de **frequência fundamental**, é um sinal periódico com período $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$, independentemente dos valores das amplitudes a_n e b_n .

↪ Escolhendo os valores de a_n e b_n é possível representar praticamente qualquer sinal periódico.

Demonstração (Esboço).

- Período da fundamental: $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$
- Para provar periodicidade: mostrar que $x(t) = x(t + T_0)$
- Em um período fundamental T_0 , a harmônica de ordem n executa n ciclos completos
- Portanto: $n\omega_0 T_0 = n \cdot \omega_0 \cdot \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi n$



Série Trigonométrica de Fourier

Resultado Fundamental

Qualquer combinação de senoides de frequências $0, f_0, 2f_0, \dots, kf_0$ é um sinal periódico com período $T_0 = 1/f_0$, independentemente das amplitudes.

Resultado Inverso

Um sinal periódico $x(t)$ com período T_0 pode ser descrito como a soma de senoides de frequência $f_0 = 1/T_0$ e todas as suas harmônicas.

Definição

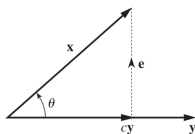
A **série trigonométrica de Fourier** de um sinal periódico $x(t)$ é:

$$x(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(n\omega_0 t) + b_n \sin(n\omega_0 t)] \quad (4)$$

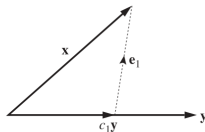
Produto interno, projeção e ortogonalidade de vetores

- Seja $\mathbf{x} = c\mathbf{y} + \mathbf{e}$, em que $c\mathbf{y}$ é uma aproximação de $\mathbf{x}$ com erro $\mathbf{e}$ ($\mathbf{x} \approx c\mathbf{y}$)
- O menor erro $\mathbf{e}$ ocorre quando $\mathbf{e} \perp \mathbf{y} \rightsquigarrow \mathbf{e} \cdot \mathbf{y} = 0$ (produto escalar) ou $\langle \mathbf{e}, \mathbf{y} \rangle = 0$ (**produto interno**)

$$\langle \mathbf{e}, \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{x} - c\mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle - c\langle \mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle = 0 \Rightarrow c = \frac{\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle}{\langle \mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle}$$



Componente (projeção) de um vetor ao longo de outro vetor.



Aproximação de um vetor em termos de outro vetor.

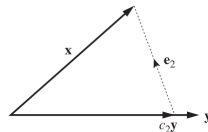


Figura: Projeção de um vetor. (Esquerda) **Projeção ortogonal:** $\mathbf{e} \perp \mathbf{y}$. Fonte: Lathi, 2000.

- O mesmo resultado é obtido minimizando o erro quadrático $\langle \mathbf{e}, \mathbf{e} \rangle \rightsquigarrow \frac{\partial \langle \mathbf{e}, \mathbf{e} \rangle}{\partial c} = 0$, com $\mathbf{e} = \mathbf{x} - c\mathbf{y}$
- Se $\mathbf{x} \perp \mathbf{y}$ (**sinais ortogonais**) então $c = 0 \rightsquigarrow \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = 0$

Produto interno, projeção e ortogonalidade de vetores

- Considerando o espaço vetorial Cartesiano $\mathbb{R}^3$: $\mathbf{x} = c_1\mathbf{x}_1 + c_2\mathbf{x}_2 + \mathbf{e}$ ($\mathbf{x} \approx c_1\mathbf{x}_1 + c_2\mathbf{x}_2$)
- Da mesma forma, o menor erro $\mathbf{e}$ é obtido quando $\langle \mathbf{e}, \mathbf{x}_i \rangle = 0$, resultando em

$$c_i = \frac{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x}_i \rangle}{\langle \mathbf{x}_i, \mathbf{x}_i \rangle}$$

- Chama-se **projeção ortogonal** a representação de $\mathbf{x}$ no espaço gerado pela combinação linear de uma base do espaço tal que $\mathbf{e} = 0$ ou $\langle \mathbf{e}, \mathbf{x}_i \rangle = 0$, com $\mathbf{x}_i$ linearmente independentes
- Observe que se $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3\}$ formam conjunto *completo* de vetores linearmente independentes (**base**) para o $\mathbb{R}^3$ o erro de aproximação é nulo, ou seja, $\mathbf{x} = c_1\mathbf{x}_1 + c_2\mathbf{x}_2 + c_3\mathbf{x}_3$ e $\mathbf{e} = 0$

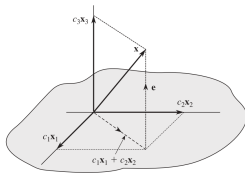


Figura: Representação de um vetor em um espaço tridimensional $\mathbb{R}^3$. Fonte: Lathi, 2000.

- No $\mathbb{R}^n$: $\mathbf{x} = \sum_{i=1}^n c_i \mathbf{x}_i$, com $\{\mathbf{x}_i\}$ uma **base ortogonal** para o $\mathbb{R}^n$, e $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = \sum_{i=1}^n c_i^2 \langle \mathbf{x}_i, \mathbf{x}_i \rangle$

Produto interno de sinais periódicos

- Definiremos o **produto interno** de sinais $x(t)$ e $y(t)$, escalares e periódicos de período T , como¹:

$$\langle x, y \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) y^*(t) dt \quad (5)$$

em que $y^*(t)$ indica o conjugado complexo de $y(t)$.

Se $y(t)$ é um sinal real escalar, então $y^*(t) = y(t)$. E se $y(t) \in \mathbb{R}^n$, então $y^*(t) = y^T(t)$.

- Interpretação:

- Mede o “grau de alinhamento” entre os sinais.
- Para sinais periódicos: $P_x = \langle x, x \rangle$ (potência de x)
- Para sinais energia definidos no intervalo $[t_1, t_2]$:

$$\langle x, y \rangle = \int_{t_1}^{t_2} x(t) y^*(t) dt \quad (6)$$

e $E_x = \langle x, x \rangle$ (energia de x)

¹Para sinais periódicos, adotamos aqui definição de $\langle x, y \rangle$ diferente da usualmente encontrada, dada em (6).

Norma de um sinal

A **norma** associada a um sinal $x(t)$ é:

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle} = \left(\frac{1}{T} \int_0^T |x(t)|^2 dt \right)^{1/2}$$

- Mede o “tamanho” ou “energia média” do sinal em um período.
- Para sinais periódicos $\|x\| = X_{rms}$ (valor RMS de x)
- Exemplo: para $x(t) = \cos(\omega_0 t)$,

$$\|x\|^2 = \langle x, x \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T \cos^2(\omega_0 t) dt = \frac{1}{2}.$$

- $\langle A \cos(\omega_0 t), A \cos(\omega_0 t) \rangle = \|A \cos(\omega_0 t)\|^2 = \frac{A^2}{2}.$

Ortogonalidade de sinais

Dois sinais $x(t)$ e $y(t)$ são **ortogonais** se:

$$\langle x, y \rangle = 0.$$

Exemplo

Para $x(t) = \cos(\omega_0 t)$ e $y(t) = \sin(\omega_0 t)$:

$$\langle x, y \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T \cos(\omega_0 t) \sin(\omega_0 t) dt = 0.$$

Logo, $\cos(\omega_0 t)$ e $\sin(\omega_0 t)$ são ortogonais.

● Observe que um sinal constante e senoidal são ortogonais: $\langle 1, \cos(\omega_0 t) \rangle = 0$.

Exemplo

Os sinais $x(t) = \cos(n_1 \omega_0 t)$ e $y(t) = \cos(n_2 \omega_0 t)$ são ortogonais para $n_1 \neq n_2$.

$$\langle x, y \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T \cos(n_1 \omega_0 t) \cos(n_2 \omega_0 t) dt = 0, \quad n_1 \neq n_2.$$

Ortogonalidade de sinais senoidais (demonstração)

Considere os sinais $x(t) = \cos(n_1\omega t)$ e $y(t) = \cos(n_2\omega t)$, onde o período é $T = 2\pi/\omega$ e $n_1 \neq n_2$.

$$\langle \cos(n_1\omega t), \cos(n_2\omega t) \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T \cos(n_1\omega t) \cos(n_2\omega t) dt$$

Utilizando a identidade trigonométrica do produto para a soma,
 $\cos(A) \cos(B) = \frac{1}{2}[\cos(A - B) + \cos(A + B)]$, temos:

$$\begin{aligned} \langle \cos(n_1\omega t), \cos(n_2\omega t) \rangle &= \frac{1}{T} \int_0^T \frac{1}{2} [\cos((n_1 - n_2)\omega t) + \cos((n_1 + n_2)\omega t)] dt \\ &= \frac{1}{2T} \left[\int_0^T \cos((n_1 - n_2)\omega t) dt + \int_0^T \cos((n_1 + n_2)\omega t) dt \right] \end{aligned}$$

Como $n_1 \neq n_2$, $(n_1 - n_2)$ e $(n_1 + n_2)$ são inteiros não nulos. Portanto, cada integral é zero:

$$\langle \cos(n_1\omega t), \cos(n_2\omega t) \rangle = \frac{1}{2T} [0 + 0] = 0$$

Como o produto interno é zero, os sinais são ortogonais.

Sinais Linearmente Independentes e Espaço Linear

Definição 4 (Sinais linearmente independentes)

Um conjunto de sinais $\{x_i(t), i = 1, \dots, n\}$ é **linearmente independente** se e somente se

$$\sum_{i=1}^n c_i x_i(t) = 0, \forall t \implies c_i = 0, i = 1, \dots, n$$

Definição 5 (Espaço linear)

A **combinação linear** de um conjunto de n sinais $x_i(t)$, isto é,

$$y(t) = \sum_{i=1}^n c_i x_i(t)$$

com escalares $c_i \in \mathbb{C}$ gera um espaço linear, cuja dimensão é dada pelo número r de sinais linearmente independentes do conjunto ($r \leq n$). Qualquer conjunto de r sinais que gere o mesmo espaço é uma **base** para esse espaço.

Teorema de Parseval

Teorema 1 (Teorema de Parseval)

Considere uma base ortogonal $\{x_i(t), i = 1, \dots, n\}$ e $y(t)$, um sinal pertencente ao espaço, descrito por $y(t) = \sum_{i=1}^n c_i x_i(t)$, então

$$\langle y, y \rangle = \sum_{i=1}^n |c_i|^2 \langle x_i, x_i \rangle \Rightarrow P_y = \sum_{i=1}^n |c_i|^2 P_{x_i}$$

Se as funções $x_i(t)$ têm norma unitária, ou seja, se $\langle x_i, x_i \rangle = 1$, tem-se $\langle y, y \rangle = \sum_{i=1}^n |c_i|^2$.

Prova: Como $y^*(t) = \sum_{i=1}^n c_i^* x_i^*(t)$, tem-se

$$\langle y, y \rangle = \sum_{i=1}^n |c_i|^2 \langle x_i, x_i \rangle$$

pois os sinais $x_i(t)$'s são ortogonais.

↪ **Interpretação:** a potência (energia) de um sinal é a soma das potências (energias) de todas as componentes ortogonais.

Definição 6 (Projeção ortogonal)

Denomina-se **projeção ortogonal** a representação do sinal $y(t)$ no espaço gerado pela combinação linear de uma base do espaço tal que o erro seja nulo ou ortogonal ao espaço, isto é,

$$y(t) = \sum_{i=1}^n c_i x_i(t) + \varepsilon(t)$$

com

$$\langle \varepsilon, x_i \rangle = 0, \forall i$$

sendo $\{x_i(t), i = 1, \dots, n\}$ um conjunto de sinais linearmente independentes (base de dimensão n).

● Se $\{x_i, i = 1, \dots, n\}$ é uma **base ortogonal**, o coeficiente de projeção de $y(t)$ sobre a componente $x_i(t)$ é

$$c_i = \frac{\langle y, x_i \rangle}{\langle x_i, x_i \rangle}$$

Base ortogonal de sinais

$$\begin{aligned}\langle \cos(n_1 \omega t), \cos(n_2 \omega t) \rangle &= \begin{cases} 0, & n_1 \neq n_2 \\ \frac{1}{2}, & n_1 = n_2 \neq 0 \end{cases} \\ \langle \cos(\omega t), \cos(\omega t + \theta) \rangle &= \frac{1}{2} \cos(\theta)\end{aligned}$$

Os sinais são **ortogonais** quando a frequência é distinta ou a defasagem entre eles é um múltiplo ímpar de $\pi/2$ ($\theta = \pm\pi/2, \pm3\pi/2, \dots$):

$$\theta = \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

- Observe que $\cos(\omega t - \pi/2) = \sin(\omega t)$ e portanto $\langle \cos(\omega t), \sin(\omega t) \rangle = 0$.

Base ortogonal

Um conjunto de funções $\{\phi_k(t)\}$ é uma **base ortogonal** se:

$$\langle \phi_i, \phi_j \rangle = 0, \quad i \neq j.$$

- Exemplo de bases ortogonais: $\{\cos(n_1 \omega_0 t), \cos(n_2 \omega_0 t)\}$, $n_1 \neq n_2$; $\{\cos(n \omega_0 t), \sin(n \omega_0 t)\}$.

Representação de sinal periódico em uma base

- Seja um sinal $x(t)$ periódico de período T_0 e frequência ω_0 .
- Seja uma base ortogonal $\mathcal{B}$:

$$\{1, \cos(\omega_0 t), \sin(\omega_0 t), \cos(2\omega_0 t), \sin(2\omega_0 t), \cos(3\omega_0 t), \sin(3\omega_0 t), \dots, \cos(n\omega_0 t), \sin(n\omega_0 t), \dots\}$$

Coeficientes da projeção ortogonal de x na base $\mathcal{B}$:

$$a_0 = \frac{\langle x, 1 \rangle}{\langle 1, 1 \rangle} = \langle x, 1 \rangle = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} x(t) dt$$

$$a_n = \frac{\langle x, \cos(n\omega_0 t) \rangle}{\langle \cos(n\omega_0 t), \cos(n\omega_0 t) \rangle} = 2 \langle x, \cos(n\omega_0 t) \rangle = \frac{2}{T_0} \int_0^{T_0} x(t) \cos(n\omega_0 t) dt$$

$$b_n = \frac{\langle x, \sin(n\omega_0 t) \rangle}{\langle \sin(n\omega_0 t), \sin(n\omega_0 t) \rangle} = 2 \langle x, \sin(n\omega_0 t) \rangle = \frac{2}{T_0} \int_0^{T_0} x(t) \sin(n\omega_0 t) dt$$

Cálculo dos coeficientes de Fourier: obtenção de a_n

- 1 Comece com o produto interno $\langle x, \cos(n\omega_0 t) \rangle = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} x(t) \cos(n\omega_0 t) dt$.
- 2 Substitua a série de Fourier de $x(t)$:

$$\langle x, \cos(n\omega_0 t) \rangle = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} \left(a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos(k\omega_0 t) + b_k \sin(k\omega_0 t)) \right) \cos(n\omega_0 t) dt.$$

- 3 Troque soma e integral (linearidade):

$$\langle x, \cos(n\omega_0 t) \rangle = a_0 \langle 1, \cos(n\omega_0 t) \rangle + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \langle \cos(k\omega_0 t), \cos(n\omega_0 t) \rangle + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \langle \sin(k\omega_0 t), \cos(n\omega_0 t) \rangle.$$

- 4 Pela ortogonalidade todos os termos são zero, exceto o termo $k = n$ no primeiro somatório. Portanto $\langle x, \cos(n\omega_0 t) \rangle = a_n \langle \cos(n\omega_0 t), \cos(n\omega_0 t) \rangle$.
- 5 Isolando a_n

$$a_n = \frac{\langle x, \cos(n\omega_0 t) \rangle}{\langle \cos(n\omega_0 t), \cos(n\omega_0 t) \rangle} = 2 \langle x, \cos(n\omega_0 t) \rangle = \frac{2}{T_0} \int_0^{T_0} x(t) \cos(n\omega_0 t) dt.$$

Cálculo dos coeficientes de Fourier: obtenção de b_n e a_0

O raciocínio é análogo ao caso do cosseno:

- 1 Comece com

$$\langle x, \sin(n\omega_0 t) \rangle = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} x(t) \sin(n\omega_0 t) dt.$$

- 2 Substitua a série e use linearidade; por ortogonalidade todos os termos somados desaparecem, exceto o termo $k = n$ associado ao seno. Portanto $\langle x, \sin(n\omega_0 t) \rangle = b_n \langle \sin(n\omega_0 t), \sin(n\omega_0 t) \rangle$.
- 3 Isolando b_n

$$\langle \sin(n\omega_0 t), \sin(n\omega_0 t) \rangle = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} \sin^2(n\omega_0 t) dt = \frac{1}{2}.$$

- 4 Portanto

$$b_n = \frac{\langle x, \sin(n\omega_0 t) \rangle}{\langle \sin(n\omega_0 t), \sin(n\omega_0 t) \rangle} = 2 \langle x, \sin(n\omega_0 t) \rangle = \frac{2}{T_0} \int_0^{T_0} x(t) \sin(n\omega_0 t) dt.$$

- De forma análoga

$$a_0 = \frac{\langle x, 1 \rangle}{\langle 1, 1 \rangle} = \langle x, 1 \rangle = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} x(t) dt.$$

Cálculo dos Coeficientes de Fourier

Para determinar os coeficientes a_0 , a_n e b_n , utilizamos as propriedades de **ortogonalidade**:

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{T_0} \int_{T_0} x(t) dt \\ a_n &= \frac{2}{T_0} \int_{T_0} x(t) \cos(n\omega_0 t) dt, \quad n = 1, 2, 3, \dots \\ b_n &= \frac{2}{T_0} \int_{T_0} x(t) \sin(n\omega_0 t) dt, \quad n = 1, 2, 3, \dots \end{aligned} \tag{7}$$

em que

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$$

e $\int_{T_0}$ denota a integração sobre qualquer intervalo de duração T_0 .

● Por exemplo, definindo os limites integração entre $-T_0/2$ e $T_0/2$, tem-se:

$$\int_{T_0} \rightarrow \int_{-T_0/2}^{T_0/2}$$

Cálculo dos Coeficientes de Fourier

Coeficientes da Série de Fourier como projeção ortogonal:

$$a_n = \frac{\langle x, \cos(n\omega_0 t) \rangle}{\langle \cos(n\omega_0 t), \cos(n\omega_0 t) \rangle} = 2\langle x, \cos(n\omega_0 t) \rangle, \quad b_n = \frac{\langle x, \sin(n\omega_0 t) \rangle}{\langle \sin(n\omega_0 t), \sin(n\omega_0 t) \rangle} = 2\langle x, \sin(n\omega_0 t) \rangle,$$
$$a_0 = \frac{\langle x, 1 \rangle}{\langle 1, 1 \rangle} = \langle x, 1 \rangle, \quad n = 1, \dots, \infty$$

↪ Cada coeficiente é uma **projeção** de $x(t)$ sobre uma função base ortogonal de dimensão infinita.

↪ Como $\langle \cos(n\omega_0 t), \cos(n\omega_0 t) \rangle = \langle \sin(n\omega_0 t), \sin(n\omega_0 t) \rangle = 1/2$, aparece o fator 2 no cálculo dos coeficientes.

↪ Os coeficientes acima são os que minimizam a potência do erro de estimação (erro quadrático).

↪ Quanto maior o número de termos n da série, menor a potência do erro, que tende a zero quando $n \rightarrow \infty$ **se o sinal tiver energia finita no período.**

● Podemos interpretar que o sinal periódico $x(t)$ é definido somente para o intervalo $t \in [0, T_0]$ (**sinal energia**) e que os sinais $\{1, \cos(n\omega_0 t), \sin(n\omega_0 t)\}$, $n = 1, \dots, \infty$, tem energia finita neste intervalo formando uma base ortogonal.

Série de Fourier

Observações

- Se o sinal $x(t)$ for **periódico** de período fundamental T_0 , a série representa o sinal para todo t .
- Se o sinal $x(t)$ for **não periódico**, a série representa o sinal no intervalo T considerado, como ilustrado na figura abaixo.

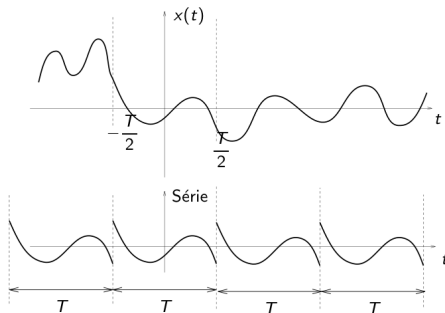


Figura: Sinal não periódico $x(t)$ e Série de Fourier do sinal $x(t)$ representado no intervalo $(-T/2, T/2)$ com período fundamental $T_0 = T$.

Exemplo

Determine, admitindo sua existência, a série de Fourier da função $x(t)$ definida por

$$x(t) = \begin{cases} -t, & -2 \leq t < 0 \\ t, & 0 \leq t < 2, \end{cases} \quad \text{e} \quad x(t+4) = x(t).$$

• Solução: primeiro, tem-se $\omega_0 = 2\pi/4 = \pi/2$.

Série de Fourier de $x(t)$:

$$x(t) = 1 - \frac{8}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos\left((2n-1)\frac{\pi}{2}t\right)}{(2n-1)^2}$$

Note que $(2n-1)$ é ímpar (simetria de meia onda).

Truncamento:
$$x_N(t) = 1 - \frac{8}{\pi^2} \sum_{n=1}^N \frac{\cos\left(\frac{(2n-1)\pi t}{2}\right)}{(2n-1)^2}$$

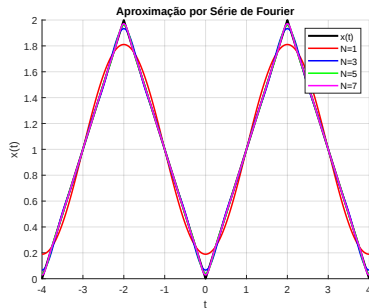


Figura: Função $x(t)$ e $x_N(t)$, para $N = 1, 3, 5, 7$.

Definições (revisão)

Função Par

$x_p(t)$ é par se:

$$x_p(t) = x_p(-t) \quad (8)$$

Propriedade: **simétrica** em relação ao eixo vertical

Função Ímpar

$x_i(t)$ é ímpar se:

$$x_i(t) = -x_i(-t) \quad (9)$$

Propriedade: **anti-simétrica** em relação ao eixo vertical

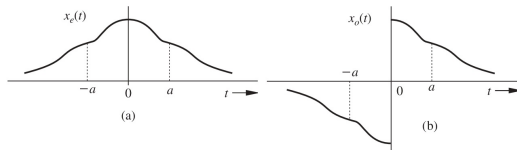


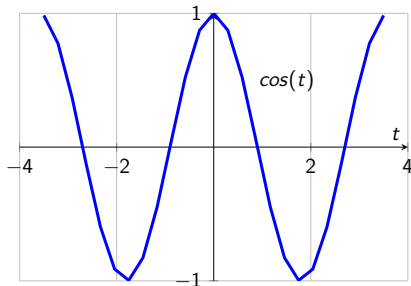
Figura: (a) Função par e (b) função ímpar. Fonte: Lathi, 2000.

Funções pares e ímpares

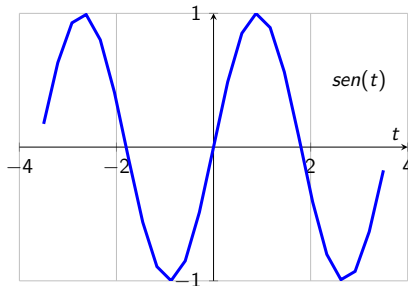
Exemplos de funções:

- **Pares:** $\cos(t)$, e^{-t^2} , t^2 , $|t|$
- **Ímpares:** $\sin(t)$, t , t^3 , $\text{sgn}(t)$

(a) Função par



(b) Função ímpar



Observação: Válido apenas se não há impulsos (ou derivadas) na origem.

Multiplicação:

$$\text{par} \times \text{par} = \text{par} \quad (10)$$

$$\text{ímpar} \times \text{ímpar} = \text{par} \quad (11)$$

$$\text{par} \times \text{ímpar} = \text{ímpar} \quad (12)$$

Propriedades de área:

$$\int_{-a}^a x_p(t) dt = 2 \int_0^a x_p(t) dt$$
$$\int_{-a}^a x_i(t) dt = 0$$

- Definindo os limites integração entre $-T_0/2$ e $T_0/2$, tem-se:

$$\begin{aligned}a_0 &= \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t) dt \\a_n &= \frac{2}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t) \cos(n\omega_0 t) dt, \quad n = 1, 2, 3, \dots \\b_n &= \frac{2}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t) \operatorname{sen}(n\omega_0 t) dt, \quad n = 1, 2, 3, \dots\end{aligned} \tag{13}$$

Definição

Um sinal $x(t)$ é **par** se $x(t) = x(-t)$.

Propriedades:

- $x(t) \cos(n\omega_0 t)$ é função par
- $x(t) \sin(n\omega_0 t)$ é função ímpar

Coefficientes para $x(t)$ par:

$$a_0 = \frac{2}{T_0} \int_0^{T_0/2} x(t) dt$$
$$a_n = \frac{4}{T_0} \int_0^{T_0/2} x(t) \cos(n\omega_0 t) dt$$
$$b_n = 0 \quad \text{para todo } n$$

Definição

Um sinal $x(t)$ é **ímpar** se $x(t) = -x(-t)$.

Propriedades:

- $x(t) \cos(n\omega_0 t)$ é função ímpar
- $x(t) \sin(n\omega_0 t)$ é função par

Coefficientes para $x(t)$ ímpar:

$$\begin{aligned} a_0 &= 0 \\ a_n &= 0 \quad \text{para todo } n \\ b_n &= \frac{4}{T_0} \int_0^{T_0/2} x(t) \sin(n\omega_0 t) dt \end{aligned}$$

Simetria de Meia Onda

Definição

Um sinal periódico $x(t)$ tem **simetria de meia onda** se:

$$x(t) = -x\left(t + \frac{T_0}{2}\right) \quad (14)$$

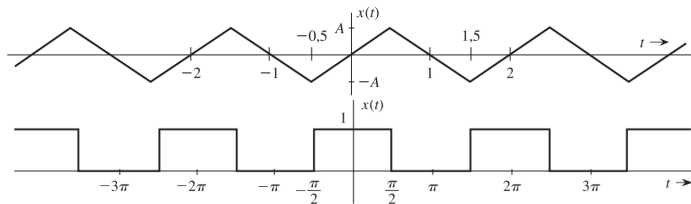


Figura: Sinais triangular periódico com $T_0 = 2$ e de pulso quadrado periódico com $T_0 = 2\pi$ (simetria de meia onda).

→ Pode-se ver a simetria de meia onda no pulso quadrado periódico se subtraído a componente CC (valor médio) de $0,5$.

Simetria de Meia Onda

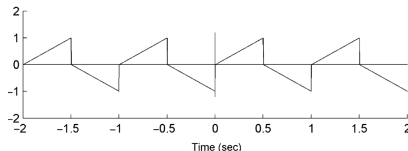


Figura: Sinal periódico com $T_0 = 1$ e simetria de meia onda.

Propriedades:

- Todas as harmônicas de número par desaparecem ($a_n = b_n = 0$ para n par)
- Somente harmônicas ímpares estão presentes
- Coeficientes calculados integrando apenas meio período

Coeficientes para $x(t)$ com simetria de meia onda:

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{4}{T_0} \int_0^{T_0/2} x(t) \cos(n\omega_0 t) dt \quad (n \text{ ímpar}) \\ b_n &= \frac{4}{T_0} \int_0^{T_0/2} x(t) \sen(n\omega_0 t) dt \quad (n \text{ ímpar}) \end{aligned}$$

Resumo das Propriedades de Simetria

Tipo de Simetria	Condição	Coeficientes Nulos	Termos Presentes
Par	$x(t) = x(-t)$	$b_n = 0$	Apenas cossenos
Ímpar	$x(t) = -x(-t)$	$a_0 = a_n = 0$	Apenas senos
Meia onda	$x(t) = -x(t + T_0/2)$	Harmônicos pares	Apenas ímpares

Tabela: Propriedades de simetria na série de Fourier

Vantagem Computacional

A simetria permite:

- Reduzir o número de integrais a calcular
- Integrar apenas em meio período
- Identificar quais coeficientes são zero por inspeção

Forma Compacta da Série de Fourier

Forma Compacta da Série de Fourier

A série pode ser escrita na forma compacta:

$$x(t) = C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos(n\omega_0 t + \theta_n) \quad (15)$$

onde:

$$C_0 = a_0 \quad (16)$$

$$C_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \quad (17)$$

$$\theta_n = -\tan^{-1} \left(\frac{b_n}{a_n} \right) \quad (18)$$

Potência de um sinal periódico - Teorema de Parseval

Teorema de Parseval

Seja um sinal periódico representado na forma

$$x(t) = C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos(n\omega_0 t + \theta_n)$$

então

$$P_x = \langle x, x \rangle = C_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n^2 \langle \cos(n\omega_0 t + \theta_n), \cos(n\omega_0 t + \theta_n) \rangle$$

$$P_x = C_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} C_n^2$$

↪ **Interpretação:** a **potência de $x(t)$** é igual a soma das potências de todas as componentes senoidais da série de Fourier (**Teorema de Parseval**).

Conceito de Espectro

Definição

*O **espectro de Fourier** mostra a composição em frequência de $x(t)$, ou seja, as amplitudes e fases de várias componentes senoidais.*

- **Espectro de amplitude:** gráfico de C_n versus ω
- **Espectro de fase:** gráfico de θ_n versus ω
- Fornece uma **descrição alternativa** no domínio da frequência

Dualidade

Um sinal possui identidade dual:

- Identidade no domínio do tempo: $x(t)$
- Identidade no domínio da frequência: espectro de Fourier

As duas identidades são complementares e proporcionam melhor entendimento do sinal.

Exemplo 1: Sinal Exponencial Decrescente Periódico

Considere o sinal periódico:

$$x(t) = e^{-t/2} \quad \text{para } 0 \leq t < \pi \quad (19)$$

com período $T_0 = \pi$.

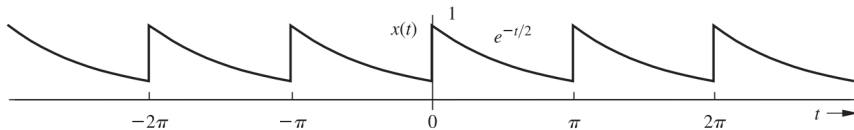


Figura: Sinal exponencial decrescente periódico. Fonte: Lathi, 2000.

Parâmetros:

- $T_0 = \pi$, $\omega_0 = 2\pi/T_0 = 2$
- Intervalo de integração: 0 a π

Exemplo 1: Cálculo dos Coeficientes

Coeficientes²:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} e^{-t/2} dt = \frac{2}{\pi} (1 - e^{-\pi/2}) = 0,504$$

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} e^{-t/2} \cos(2nt) dt = \frac{4(1 - e^{-\pi/2})}{\pi(1 + 16n^2)} = 0,504 \frac{2}{1 + 16n^2}$$

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} e^{-t/2} \sin(2nt) dt = \frac{16n(1 - e^{-\pi/2})}{\pi(1 + 16n^2)} = 0,504 \frac{8n}{1 + 16n^2}$$

Série de Fourier de $x(t)$:

$$\begin{aligned} x(t) &= 0,504 \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{1 + 16n^2} (\cos 2nt + 4n \sin 2nt) \right] \\ &= 0,504 + 0,504 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\sqrt{1 + 16n^2}} \cos(2nt - \tan^{-1}(4n)) \end{aligned}$$

²A integral pode ser resolvida por integração por partes ou via integração de exponenciais complexas.

Exemplo 1: Resultado Final

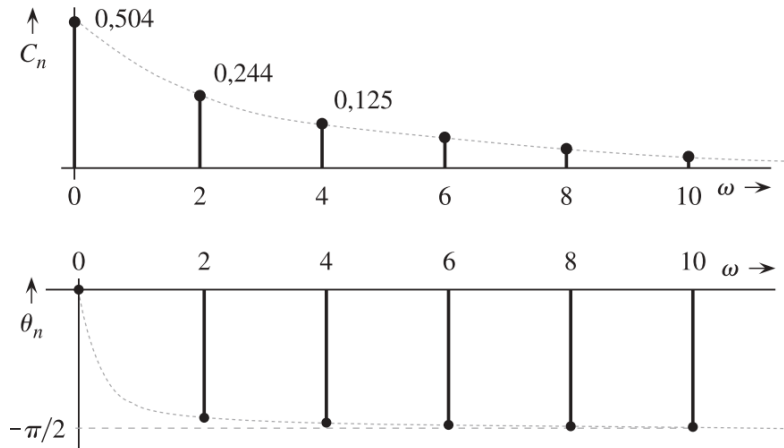


Figura: Espectro de amplitude e fase. Fonte: Lathi, 2000.

Código MATLAB para Série de Fourier

```
1 % Parâmetros do sinal
2 T0 = pi; % Período
3 w0 = 2*pi/T0; % Frequência fundamental
4 N_harm = 10; % Número de harmônicos
5
6 % Função do sinal (um período)
7 t = linspace(0, T0, 1000);
8 x = exp(-t/2);
9
10 % Cálculo dos coeficientes
11 a0 = (2/pi)*(1 - exp(-pi/2));
12
13 for n = 1:N_harm
14 % Coeficiente an
15 a(n) = (4*(1-exp(-pi/2)))/(pi*(1+16*n^2));
16
17 % Coeficiente bn
18 b(n) = (16*n*(1-exp(-pi/2)))/(pi*(1+16*n^2));
19
20 % Amplitude e fase
21 C(n) = sqrt(a(n)^2 + b(n)^2);
22 theta(n) = -atan2(b(n), a(n));
23 end
```

Listing 1: Cálculo dos coeficientes de Fourier

Código MATLAB: Visualização do Espectro

```
1 % Plotagem do espectro de amplitude
2 figure(1);
3 n = 0:N_harm;
4 C_plot = [a0, C];
5 stem(n*w0, C_plot, 'filled');
6 xlabel('Frequência (\omega)');
7 ylabel('Amplitude');
8 title('Espectro de Amplitude');
9 grid on;
10
11 % Plotagem do espectro de fase
12 figure(2);
13 theta_plot = [0, theta*180/pi]; % Conversão para graus
14 stem(n*w0, theta_plot, 'filled');
15 xlabel('Frequência (\omega)');
16 ylabel('Fase (graus)');
17 title('Espectro de Fase');
18 grid on;
19
20 % Reconstrução do sinal
21 t_recon = linspace(0, 2*T0, 1000);
22 x_recon = a0 * ones(size(t_recon));
23 for n = 1:N_harm
24 x_recon = x_recon + C(n)*cos(n*w0*t_recon + theta(n));
25 end
```

Exercício: Análise de Simetria

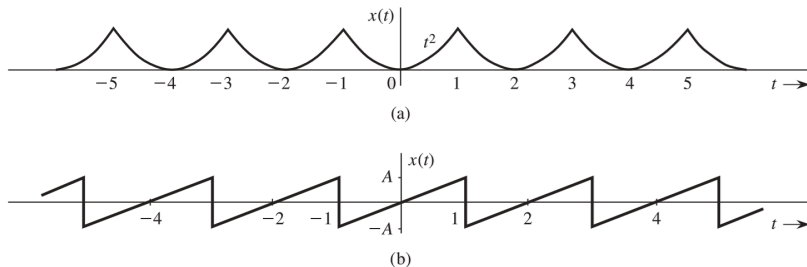


Figura: Sinais periódicos para análise de simetria. Fonte: Lathi, 2000.

Tarefa: Para cada sinal, determine:

- 1 Tipo de simetria presente
- 2 Quais coeficientes são zero
- 3 Forma da série de Fourier (apenas senos, apenas cossenos, etc.)

Exemplo 2: Sinal Triangular Periódico

Considere o sinal triangular periódico com $T_0 = 2$:

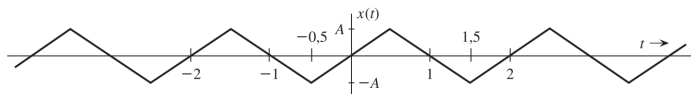


Figura: Sinal triangular periódico. Fonte: Lathi, 2000.

Parâmetros:

- $T_0 = 2$, $\omega_0 = 2\pi/T_0 = \pi$
- Por inspeção: $a_0 = 0$ (valor médio zero)
- Intervalo de integração: $-1/2$ a $3/2$ (mais conveniente)

$$x(t) = \begin{cases} 2At, & |t| < 1/2 \\ 2A(1-t), & 1/2 < t < 3/2 \end{cases}$$

Exemplo 2: Cálculo dos Coeficientes

Por análise da simetria do sinal triangular:

- $a_0 = 0$ (valor médio zero)
- $a_n = 0$ para todo n (função **ímpar**)
- Apenas coeficientes b_n são não-nulos

Cálculo de b_n (utilizando integral por partes):

$$b_n = 2 \frac{2}{T_0} \int_{-1/2}^{1/2} 2At \sin(n\pi t) dt = \frac{8A}{n^2\pi^2} \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) \quad (20)$$

Resultado:

$$x(t) = \frac{8A}{\pi^2} \sum_{n=1,3,5,\dots} \frac{1}{n^2} \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) \sin(n\pi t) \quad (21)$$

Série explícita:

$$x(t) = \frac{8A}{\pi^2} \sin(\pi t) - \frac{8A}{9\pi^2} \sin(3\pi t) + \frac{8A}{25\pi^2} \sin(5\pi t) - \dots$$

Exemplo 2: Resultado e Espectro

Usando as identidades

$$\begin{aligned}\sin(kt) &= \cos(kt - 90^\circ), & \sin(-\theta) &= -\sin(\theta) \\ -\sin(kt) &= \cos(kt + 90^\circ), & -\cos(kt) &= \cos(kt \pm 180^\circ)\end{aligned}$$

Obtém-se a forma compacta para traçar o espectro de Fourier

$$x(t) = \frac{8A}{\pi^2} \cos(\pi t - 90^\circ) + \frac{8A}{9\pi^2} \cos(3\pi t + 90^\circ) + \frac{8A}{25\pi^2} \cos(5\pi t - 90^\circ) + \dots$$

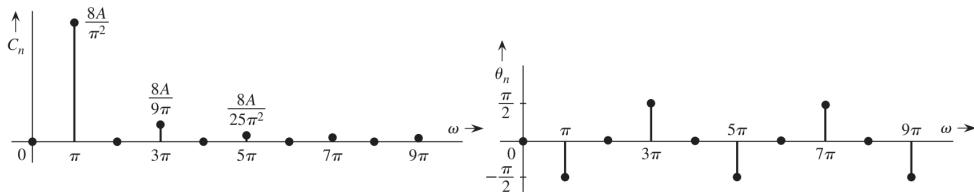


Figura: Espectro de amplitude e fase do sinal triangular. Fonte: Lathi, 2000.

- Apenas harmônicos ímpares presentes
- Fases alternam entre -90° e 90°

Exemplo 3: Sinal de Pulso Quadrado

Considere o sinal de pulso quadrado com $T_0 = 2\pi$:

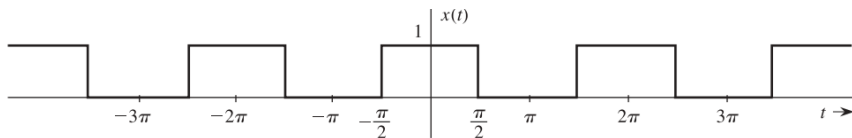


Figura: Sinal de pulso quadrado periódico. Fonte: Lathi, 2000.

- $T_0 = 2\pi, \omega_0 = 1$

$$x(t) = \begin{cases} 1, & -\pi/2 < t < \pi/2 \\ 0, & \pi/2 < t < 3\pi/2 \end{cases}$$

- Melhor intervalo de integração: $-\pi/2$ a $3\pi/2$

Exemplo 3: Cálculo dos Coeficientes

● Função par e de meia onda: intervalo de integração de 0 a $\frac{T_0}{2} = \pi$. Como o sinal é zero entre $\pi/2$ e π , tem-se:

Componente CC:

$$a_0 = \frac{2}{T_0} \int_0^{\pi/2} 1 dt = \frac{1}{2} \quad (22)$$

Coeficientes a_n :

$$a_n = \frac{4}{T_0} \int_0^{\pi/2} \cos(nt) dt = \frac{2}{n\pi} \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi}{2} \right) \quad (\text{somente harmônicas ímpares}) \quad (23)$$

Coeficientes b_n :

$$b_n = 0 \quad (\text{função par}) \quad (24)$$

Exemplo 3: Resultado Final

Resultado da série:

$$\begin{aligned}x(t) &= \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \cos(t) - \frac{2}{3\pi} \cos(3t) + \frac{2}{5\pi} \cos(5t) - \dots \\&= \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \cos(t) + \frac{2}{3\pi} \cos(3t - \pi) + \frac{2}{5\pi} \cos(5t) - \dots\end{aligned}$$

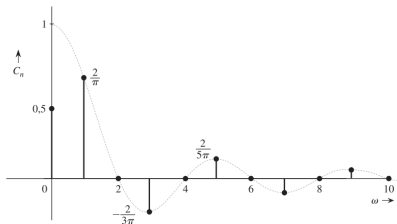


Figura: Espectro de amplitude do pulso quadrado. Fonte: Lathi, 2000.

- Apenas harmônicos ímpares
- Amplitudes decaem como $1/n$

Frequências Harmonicamente Relacionadas

Definição

*Duas frequências são **harmonicamente relacionadas** se a razão entre elas é um número racional.*

Teorema

A soma de senóides de quaisquer frequências representa um sinal periódico se e somente se todas as frequências forem harmonicamente relacionadas.

Determinação da frequência fundamental:

- A frequência fundamental é o **maior fator comum (MFC)** de todas as frequências
- Todas as frequências devem ser múltiplos inteiros da fundamental

Exemplos de Determinação do Período

Exemplo 1:

$$x_1(t) = 3 + 2 \cos\left(\frac{t}{2}\right) + 4 \sin\left(\frac{2t}{3}\right) + \cos\left(\frac{7t}{6}\right)$$

- Frequências: $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{7}{6}$
- Razões: $\frac{1/2}{2/3} = \frac{3}{4}$ e $\frac{2/3}{7/6} = \frac{4}{7}$ (ambas racionais)
- MFC = $\frac{1}{6}$, logo $\omega_0 = \frac{1}{6}$ e $T_0 = 12\pi$
- **Sinal periódico** de período $12/\pi$

Exemplo 2: $x_2(t) = \sin(2t) + \cos(\pi t)$

- Frequências: 2 e π
- Razão: $\frac{2}{\pi}$ (irracional)
- **Sinal não periódico**

Exemplo 3: $x_3(t) = 2 \cos(3t) + 5 \sin(6t)$

- Frequências: 3 e 6
- MFC = 3, logo $\omega_0 = 3$ e $T_0 = \frac{2\pi}{3}$
- **Sinal periódico** de período $\frac{2\pi}{3}$

Exemplo 4:

$$x_3(t) = 2 \sin(2\pi 5t) + 3 \sin(2\pi 7t) + 6 \sin(2\pi 14t)$$

- Frequências: 5, 7 e 14 Hz
- Como os números envolvidos são primos: 5, 7, e 2×7
- MFC = 1, logo $f_0 = 1$, $\omega_0 = 2\pi$ e $T_0 = 1$
- **Sinal periódico** de período 1 s

Algoritmo para Determinação do Período

Passos para Determinar se um Sinal é Periódico

- 1 Identifique todas as frequências presentes no sinal
- 2 Verifique se todas as razões entre frequências são números racionais
- 3 Se sim: calcule o MFC de todas as frequências
- 4 A frequência fundamental é $\omega_0 = \text{MFC}$
- 5 O período fundamental é $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$

Observação Importante

Se alguma razão entre frequências for irracional, o sinal não é periódico.

Código MATLAB: Verificação de Periodicidade

```
1 function [is_periodic, T0, w0] = check_periodicity(frequencies)
2 % Verifica se um conjunto de frequências é harmonicamente relacionado
3 % Input: frequencies — vetor com as frequências
4 % Output: is_periodic — true se periódico
5 %         T0 — período fundamental
6 %         w0 — frequência fundamental
7
8 % Remove frequências zero (componente DC)
9 freq_nonzero = frequencies(frequencies ~= 0);
10
11 if isempty(freq_nonzero)
12     is_periodic = false;
13     T0 = Inf;
14     w0 = 0;
15     return;
16 end
17
18 % Calcula todas as razões entre frequências
19 n = length(freq_nonzero);
20 tolerance = 1e-10;
```

Listing 3: Função para verificar periodicidade

Código MATLAB: Verificação de Periodicidade (continuação)

```
1 % Verifica se todas as razões são racionais
2 for i = 1:n
3     for j = i+1:n
4         ratio = freq_nonzero(i) / freq_nonzero(j);
5         [num, den] = rat(ratio, tolerance);
6         if abs(ratio - num/den) > tolerance
7             is_periodic = false;
8             T0 = Inf;
9             w0 = 0;
10            return;
11        end
12    end
13 end
14
15 % Calcula o MFC (usando aproximação numérica)
16 w0 = gcd_frequencies(freq_nonzero, tolerance);
17 T0 = 2*pi / w0;
18 is_periodic = true;
19
20
21 end
```

Listing 4: Função para verificar periodicidade (continuação)

Exercícios Propostos

Determine se os seguintes sinais são periódicos. Se sim, encontre o período fundamental:

- ① $x_1(t) = \cos(4t) + \sin(6t)$
- ② $x_2(t) = \cos(3t) + \sin(\sqrt{2}t)$
- ③ $x_3(t) = 2 + 3\cos(2t) + \sin(6t) + 4\cos(10t)$
- ④ $x_4(t) = \sin\left(\frac{\pi t}{3}\right) + \cos\left(\frac{\pi t}{4}\right)$
- ⑤ $x_5(t) = e^{j2t} + e^{j3t} + e^{j5t}$

Dica

Lembre-se de que $e^{j\omega t} = \cos(\omega t) + j\sin(\omega t)$ contribui com frequência ω .

- 1 $x_1(t) = \cos(4t) + \sin(6t)$
 - Frequências: 4, 6. MFC = 2, $T_0 = \pi$ (**periódico**)
- 2 $x_2(t) = \cos(3t) + \sin(\sqrt{2}t)$
 - Razão $3/\sqrt{2}$ é irracional (**não periódico**)
- 3 $x_3(t) = 2 + 3\cos(2t) + \sin(6t) + 4\cos(10t)$
 - Frequências: 2, 6, 10. MFC = 2, $T_0 = \pi$ (**periódico**)
- 4 $x_4(t) = \sin\left(\frac{\pi t}{3}\right) + \cos\left(\frac{\pi t}{4}\right)$
 - Frequências: $\pi/3$, $\pi/4$. MFC = $\pi/12$, $T_0 = 24$ (**periódico**)
- 5 $x_5(t) = e^{j2t} + e^{j3t} + e^{j5t}$
 - Frequências: 2, 3, 5. MFC = 1, $T_0 = 2\pi$ (**periódico**)

Tarefa: Implementar e comparar as séries de Fourier dos seguintes sinais:

- 1 Onda triangular (Exemplo 2)
- 2 Onda dente de serra
- 3 Pulso retangular com diferentes duty cycles

Requisitos:

- Calcular os coeficientes analiticamente
- Implementar no MATLAB/Octave
- Plotar espectros de amplitude e fase
- Comparar convergência (número de termos necessários)
- Analisar o efeito da simetria

Entrega: Código comentado e relatório com análise dos resultados

Fórmulas Importantes

Série Trigonométrica de Fourier

$$x(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(n\omega_0 t) + b_n \operatorname{sen}(n\omega_0 t)] \quad (25)$$

$$a_0 = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} x(t) dt \quad (26)$$

$$a_n = \frac{2}{T_0} \int_{T_0} x(t) \cos(n\omega_0 t) dt \quad (27)$$

$$b_n = \frac{2}{T_0} \int_{T_0} x(t) \operatorname{sen}(n\omega_0 t) dt \quad (28)$$

Forma Compacta

$$x(t) = C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos(n\omega_0 t + \theta_n) \quad (29)$$

$$C_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}, \quad \theta_n = -\tan^{-1} \left(\frac{b_n}{a_n} \right) \quad (30)$$

1 Série Trigonométrica de Fourier

- Qualquer sinal periódico pode ser decomposto em senoides
- Coeficientes determinados por integrais de ortogonalidade

2 Espectro de Fourier

- Representação no domínio da frequência
- Espectros de amplitude e fase
- Dualidade tempo-frequência

3 Efeito da Simetria

- Simetria par: apenas cossenos
- Simetria ímpar: apenas senos
- Simetria de meia onda: apenas harmônicos ímpares

4 Periodicidade e Frequências Harmonicamente Relacionadas

- Condição para periodicidade de somas de senoides
- Determinação do período fundamental

Aplicações da Série de Fourier:

- Análise de circuitos com fontes periódicas
- Processamento de sinais de áudio
- Análise de vibração em sistemas mecânicos
- Comunicações (modulação, multiplexação)
- Controle de sistemas (análise de resposta em frequência)

Próximas aulas:

- Existência e convergência da série de Fourier
- Série exponencial de Fourier
- Resposta de sistemas LCIT a entradas periódicas
- Transformada de Fourier (sinais não periódicos)

Exercícios para Casa

Exercícios teóricos:

- 1 Problemas 6.1-1, 6.1-2, 6.1-3 do livro do Lathi
- 2 Determinar a série de Fourier de uma onda dente de serra
- 3 Analisar o efeito do deslocamento temporal no espectro

Exercícios computacionais:

- 1 Implementar função MATLAB para cálculo automático de coeficientes
- 2 Criar ferramenta interativa para síntese de sinais
- 3 Comparar convergência para diferentes tipos de sinais

Importante

Pratiquem a identificação de simetrias - isso economizará muito tempo nos cálculos!

Bibliografia principal:

- Lathi, B. *Sinais e Sistemas Lineares* (2.^a Ed.). Bookman, 2000.
- Capítulo 6, Seção 6.1: páginas 528-543

Bibliografia complementar:

- Oppenheim, A. V. *Signals & Systems*. 2nd ed., 1997.
- Haykin, S. *Sinais e Sistemas*. Bookman, 2001.

Recursos online:

- MATLAB Documentation: Fourier Analysis
- MIT OpenCourseWare: Signals and Systems
- Khan Academy: Fourier Series

Software:

- MATLAB/Octave para implementações
- Wolfram Alpha para verificação de integrais
- GeoGebra para visualização interativa