

ENE0067 – Sinais e Sistemas em Tempo Contínuo

Série de Fourier (parte 2)

Prof. Eduardo Stockler Tognetti

Departamento de Engenharia Elétrica
Universidade de Brasília – UnB



Conteúdo da Aula

- 1 Revisão: Série Trigonométrica de Fourier
- 2 Série de Fourier: Forma Exponencial
- 3 Resposta de Sistemas LCIT a Entradas Periódicas
- 4 Propriedades da Série de Fourier
- 5 Resumo e relações importantes
- 6 Tópicos extras: existência e Convergência da Série de Fourier
- 7 Aplicações e Exemplos Computacionais
- 8 Série de Fourier Generalizada: Sinais como Vetores
- 9 Determinação Numérica de D_n
- 10 Resumo e Aplicações

Revisão: Série Trigonométrica de Fourier

● Série trigonométrica de Fourier:

$$x(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega_0 t + b_n \operatorname{sen} n\omega_0 t) \quad (1)$$

Coeficientes:

$$a_0 = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} x(t) dt, \quad a_n = \frac{2}{T_0} \int_{T_0} x(t) \cos n\omega_0 t dt, \quad b_n = \frac{2}{T_0} \int_{T_0} x(t) \operatorname{sen} n\omega_0 t dt$$

● Forma compacta da série trigonométrica de Fourier:

$$x(t) = C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos(n\omega_0 t + \theta_n) \quad (2)$$

Coeficientes:

$$C_0 = a_0 \text{ (valor médio)}, \quad C_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}, \quad \theta_n = -\tan^{-1} \left(\frac{b_n}{a_n} \right)$$

onde $\omega_0 = 2\pi/T_0$ é a frequência fundamental.

Base de exponenciais complexas e ortogonalidade

- Considere o conjunto $\{e^{jn\omega_0 t}\}_{n \in \mathbb{Z}}$.
- **Ortogonalidade em um período:**

$$\langle e^{jm\omega_0 t}, e^{jn\omega_0 t} \rangle = \frac{1}{T_0} \int_{t_0}^{t_0+T_0} e^{j(m-n)\omega_0 t} dt = \begin{cases} 1, & m = n, \\ 0, & m \neq n. \end{cases}$$

em que $\langle x, y \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) y^*(t) dt$ e $y(t) = e^{j\omega t} \Rightarrow y^*(t) = e^{-j\omega t}$

Demonstração para $m \neq n$:

$$\int_{T_0} e^{j(m-n)\omega_0 t} dt = \int_{T_0} [\cos(m-n)\omega_0 t + j \sin(m-n)\omega_0 t] dt = 0$$

pois integramos $(m-n)$ ciclos completos de seno e cosseno.

⇒ Portanto, $\{e^{jn\omega_0 t}\}_{n \in \mathbb{Z}}$ é uma **base ortogonal** e norma unitária (**base ortonormal**).

⇒ O sinal $x(t)$ pode ser representado como uma combinação linear dos elementos desta base tal que o erro de aproximação seja nulo ou ortogonal a esse espaço.

Série de Fourier (forma exponencial)

• Sendo a série de Fourier na forma exponencial um **projeção ortogonal**, ou seja, $x(t)$ representado como uma combinação linear dos elementos da **base ortogonal** $\{e^{jn\omega_0 t}\}_{n \in \mathbb{Z}}$, tal que o erro de aproximação seja nulo ou ortogonal a esse espaço, tem-se

$$\left\langle x(t) - \sum_{m=-\infty}^{\infty} D_m e^{jm\omega_0 t}, e^{jn\omega_0 t} \right\rangle = 0 \Rightarrow \langle x(t), e^{jn\omega_0 t} \rangle - D_n \langle e^{jn\omega_0 t}, e^{jn\omega_0 t} \rangle = 0$$
$$D_n = \frac{\langle x(t), e^{jn\omega_0 t} \rangle}{\langle e^{jn\omega_0 t}, e^{jn\omega_0 t} \rangle} = \langle x(t), e^{jn\omega_0 t} \rangle = \frac{1}{T_0} \int_{t_0}^{t_0+T_0} x(t) e^{-jn\omega_0 t} dt$$

• D_n como coeficientes da projeção de $x(t)$ na componente $e^{jn\omega_0 t}$ da base ortonormal:

$$D_n = \langle x(t), e^{jn\omega_0 t} \rangle$$

→ Os coeficientes D_n minimizam o erro quadrático da aproximação do sinal pela Série de Fourier.

Série de Fourier (forma exponencial)

Forma alternativa mais compacta da série de Fourier:

Representação

Para $x(t)$ periódico de período T_0 ,

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} D_n e^{jn\omega_0 t}, \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}.$$

Coefficientes de Fourier

$$D_n = \frac{1}{T_0} \int_{t_0}^{t_0+T_0} x(t) e^{-jn\omega_0 t} dt.$$

- D_0 é o valor médio em um período ($D_0 = C_0 = a_0$).
- Forma mais compacta
- Coeficiente complexo: $D_n = |D_n| e^{j\angle D_n}$
- Simplifica cálculos e manipulações algébricas (único coeficiente)

Convergência da Série de Fourier

Propriedade (Condições suficientes para convergência da série de Fourier)

Considere o *erro* da série de Fourier truncada:

$$\varepsilon_N(t) = x(t) - x_N(t), \quad x_N(t) = \sum_{n=-N}^{+N} D_n e^{jn\omega_0 t}$$

Quando $N \rightarrow +\infty$, a série converge quadraticamente se $\langle \varepsilon_N, \varepsilon_N \rangle \rightarrow 0$, e converge pontualmente se $\varepsilon_N(t) \rightarrow 0$ para todo t .

- Sinais quadraticamente integráveis (energia finita) no intervalo T_0 , ou seja,

$$\int_{T_0} |x(t)|^2 dt < +\infty$$

possuem série de Fourier que **converge quadraticamente**, isto é, a energia do erro tende a zero.

→ Mais comentários sobre convergência no Slide 39.

Série de Fourier

Observações

- Para sinais contínuos, a minimização do erro quadrático não implica que o erro é nulo, ou seja, a série não converge ponto a ponto para o sinal.
- Mesmo para erro quadrático nulo (eventualmente com um número infinito de coeficientes), nas discontinuidades do sinal ocorre uma distorção (denominada fenômeno de Gibbs¹).

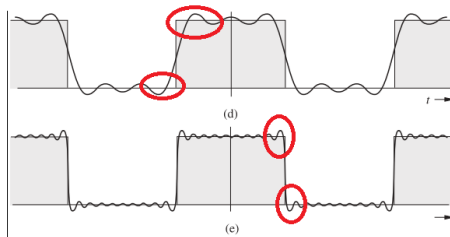


Figura: Fenômeno de Gibbs (oscilação) em descontinuidade. Síntese de Fourier de um sinal contínuo usando as primeiras 5 e 19 harmônicas. Fonte: Lathi, 2000.

¹Willard Gibbs, matemático norte-americano (1839-1903).

Relação com Coeficientes Trigonométricos

Para $n = 0$:

$$D_0 = a_0 = C_0$$

Para $n \neq 0$:

$$\begin{aligned} D_n &= \frac{1}{2}(a_n - jb_n) = \frac{1}{2}C_n e^{j\theta_n} \\ D_{-n} &= \frac{1}{2}(a_n + jb_n) = \frac{1}{2}C_n e^{-j\theta_n} \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} |D_n| &= |D_{-n}| = \frac{C_n}{2} \\ \angle D_n &= \theta_n, \quad \angle D_{-n} = -\theta_n \end{aligned}$$

Para $x(t)$ real:

$$D_{-n} = D_n^* \quad (\text{conjugados complexos})$$

em que a_n e b_n são os coeficientes da série trigonométrica (1), e C_n e θ_n são os coeficientes da série na forma compacta (2).

Amplitude e Fase no Espectro Exponencial

Magnitude e ângulo:

$$|D_n| = \frac{C_n}{2} \quad (n \geq 1)$$
$$\angle D_n = \theta_n$$

Para $x(t)$ real:

- Espectro de amplitude $|D_n|$ é **par**: $|D_{-n}| = |D_n|$
- Espectro de fase $\angle D_n$ é **ímpar**: $\angle D_{-n} = -\angle D_n$

Frequências negativas: Interpretadas como parte da representação matemática. A frequência física é sempre $|n\omega_0|$.

Exemplo: Pulso Exponencial Decrescente

Sinal periódico:

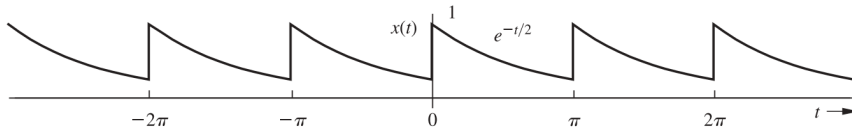


Figura: Sinal exponencial decrescente periódico. Fonte: Lathi, 2000.

$$T_0 = \pi, \omega_0 = 2$$

Cálculo:

$$D_n = \langle x(t), e^{jn\omega_0 t} \rangle = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi e^{-t/2} e^{-j2nt} dt = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi e^{-(1/2+j2n)t} dt$$

Exemplo: Pulso Exponencial (continuação)

Resultado:

$$\begin{aligned} D_n &= \frac{1}{\pi} \left[\frac{e^{-(1/2+j2n)t}}{-(1/2+j2n)} \right]_0^\pi \\ &= \frac{2}{\pi(1+j4n)} (1 - e^{-\pi/2} e^{-j2n\pi}) \\ &= \frac{1}{\pi} \frac{1 - e^{-\pi/2}}{\sqrt{1/4 + 4n^2}} e^{-j \tan^{-1}(4n)} \end{aligned}$$

Observação:

- Os coeficientes D_n são complexos
- D_n e D_{-n} são conjugados (como esperado)
- O espectro existe para $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

Espectro Exponencial de Fourier

Representação gráfica:

Plotamos $|D_n|$ (amplitude) e $\angle D_n$ (fase) versus $\omega = n\omega_0$

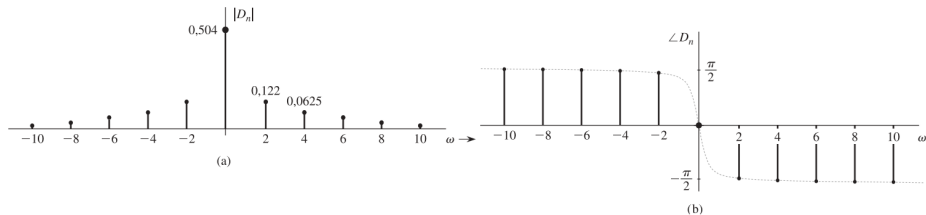


Figura: Espectro exponencial: (a) amplitude, (b) fase. Fonte: Lathi, 2000.

Propriedades para $x(t)$ real:

- $|D_n|$ é função par de ω
- $\angle D_n$ é função ímpar de ω

Efeito da Simetria no Espectro Exponencial

Para $x(t)$ com simetria par: $b_n = 0$

- $D_n = a_n/2$ (real)
- $\angle D_n = 0$ ou $\pm\pi$

Para $x(t)$ com simetria ímpar: $a_n = 0$

- $D_n = -jb_n/2$ (imaginário puro)
- $\angle D_n = \pm\pi/2$

Observação: A simetria é aplicada indiretamente, através dos coeficientes trigonométricos. Não pode ser aplicada diretamente na integral de D_n .

Exemplo MATLAB: Espectro Exponencial

Cálculo e plotagem do espectro:

```
1 % Parâmetros
2 T0 = pi; w0 = 2*pi/T0;
3 n = -10:10; % Índices das harmônicas
4
5 % Coeficientes (exemplo: pulso exponencial)
6 Dn = (1 - exp(-pi/2)) ./ (pi * (0.5 + 1j*2*n));
7 Dn(n==0) = (1 - exp(-pi/2))/pi; % D_0
8
9 % Espectro de amplitude e fase
10 figure;
11 subplot(2,1,1);
12 stem(n*w0, abs(Dn), 'filled');
13 xlabel('\omega (rad/s)'); ylabel('|D_n|');
14 title('Espectro de Amplitude');
15 grid on;
16
17 subplot(2,1,2);
18 stem(n*w0, angle(Dn), 'filled');
19 xlabel('\omega (rad/s)'); ylabel('\angle D_n (rad)');
20 title('Espectro de Fase');
21 grid on;
```

Interpretação de Frequências Negativas

Questão: O que significa frequência negativa?

Resposta: A frequência é sempre positiva!

$$\cos(-\omega_0 t + \theta) = \cos(\omega_0 t - \theta) = \frac{1}{2}e^{j(\omega_0 t - \theta)} + \frac{1}{2}e^{-j(\omega_0 t - \theta)}$$

- A frequência física é $|\omega_0|$
- Componentes em $\pm\omega_0$ representam a mesma senóide
- $e^{-j\omega_0 t}$ e $e^{j\omega_0 t}$ são parte da representação matemática
- O espectro em $\omega < 0$ é necessário para representar funções reais

Exemplo: Trem de Impulsos

Trem de impulsos unitário:

$$\delta_{T_0}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT_0)$$

Série exponencial considerando o intervalo de integração $(-T_0/2, T_0/2)$:

$$D_n = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} \delta(t) e^{-jn\omega_0 t} dt = \frac{1}{T_0} \quad (\text{fase nula})$$

Portanto:

$$\delta_{T_0}(t) = \frac{1}{T_0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{jn\omega_0 t}$$

Espectro uniforme para todas as frequências!

● **Forma trigonométrica:**

$$\delta_{T_0}(t) = \frac{1}{T_0} + \frac{2}{T_0} \sum_{n=1}^{\infty} \cos n\omega_0 t$$

Exemplo: Trem de Impulsos (espectro)

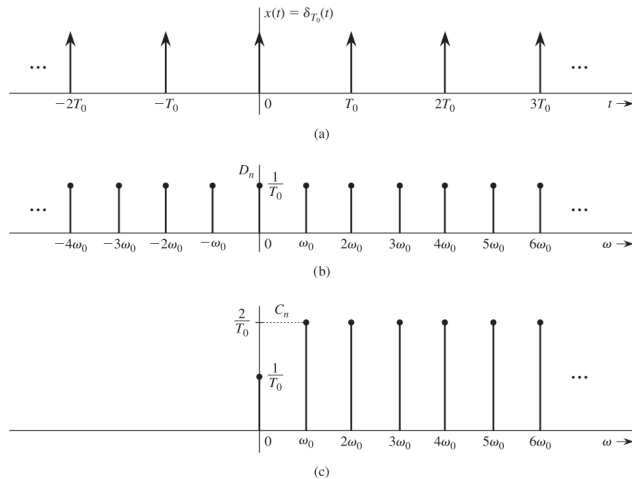


Figura: (a) Trem de impulsos, (b) espectro exponencial, (c) espectro trigonométrico. Fonte: Lathi, 2000.

Teorema de Parseval

Para série trigonométrica:

$$P_x = a_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) = C_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} C_n^2 \quad (C_0 = a_0)$$

Para série exponencial:

$$P_x = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |D_n|^2$$

Para $x(t)$ real:

$$P_x = |D_0|^2 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} |D_n|^2$$

Interpretação: A potência total é a soma das potências de cada componente harmônica.

Largura de Faixa ou de Banda de um Sinal

Largura de banda (*bandwidth*)

Diferença entre a frequência mais alta e a mais baixa com amplitude não-nula.

No espectro exponencial:

- Considerar apenas frequências **positivas**
- Ignorar componentes com amplitude zero
- $B = \omega_{max} - \omega_{min}$

Exemplo: Se o espectro tem componentes em $\omega = 0, 3\omega_0, 6\omega_0, 9\omega_0$:

- Frequência mínima: 0
- Frequência máxima: $9\omega_0$
- Largura de faixa: $B = 9\omega_0$ rad/s

Largura de Faixa ou de Banda de um Sinal

Largura de banda (*bandwidth*): Diferença entre a frequência mais alta e a mais baixa com amplitude não-nula.

- Exemplo: sinal com largura de banda 9 rad.

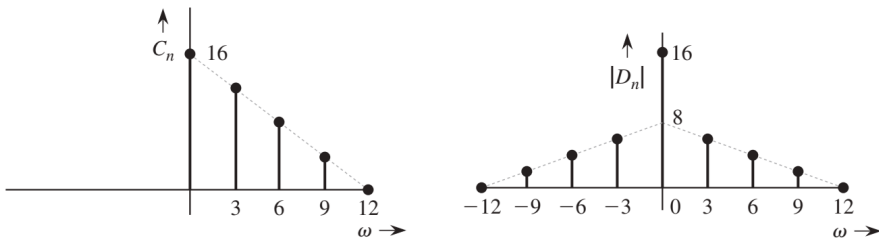


Figura: Espectro (a) trigonométrico e (b) exponencial de sinal com largura de banda 9 rad. Fonte: Lathi, 2000.

Por Que Usar o Conjunto Exponencial?

Centenas de conjuntos ortogonais existem! Por que preferir exponenciais/senóides?

Resposta: Exponenciais são **autofunções** de sistemas LIT!

Para sistema LIT com entrada e^{st} :

$$\text{Saída} = H(s)e^{st}$$

- A saída tem a **mesma forma** da entrada
- Apenas a amplitude/fase mudam (fator $H(s)$)
- Simplifica enormemente a análise de sistemas

Conclusão: Exponenciais/senóides são a escolha natural para análise de sistemas LIT!

Resposta a Entradas Periódicas

Sistema LCIT com função de transferência $H(j\omega)$:

Entrada periódica:

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} D_n e^{jn\omega_0 t}$$

Saída:

$$y(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} D_n H(jn\omega_0) e^{jn\omega_0 t}$$

Princípio: Cada componente exponencial $e^{jn\omega_0 t}$ é multiplicada por $H(jn\omega_0)$.

Procedimento para Análise

Passos:

- 1 Determinar a série de Fourier da entrada $x(t)$: obter D_n
- 2 Calcular a resposta em frequência $H(jn\omega_0)$ para cada harmônica
- 3 Multiplicar: coeficientes da saída são $D_n H(jn\omega_0)$
- 4 Reconstruir $y(t)$ usando a série de Fourier inversa

Forma trigonométrica da saída:

$$y(t) = C_0 H(0) + \sum_{n=1}^{\infty} C_n |H(jn\omega_0)| \cos(n\omega_0 t + \theta_n + \angle H(jn\omega_0))$$

Exemplo: Distorção Harmônica

Amplificador não-linear:

- Entrada: $x(t) = 0.1 \cos \omega_0 t$
- Saída ideal: $10 \cos \omega_0 t$ (ganho 100)
- Saída real: ceifada em ± 8 V

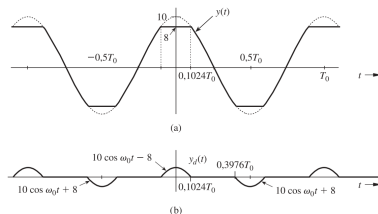


Figura: (a) Senóide ceifada $y(t)$ e (b) componente de distorção $y_d(t)$. Fonte: Lathi, 2000.

Análise: A distorção introduz harmônicas superiores no sinal de saída

$$y_d(t) = 1,07 \cos(\omega_0 t) + 0,733 \cos(3\omega_0 t) + 0,311 \cos(5\omega_0 t) + \dots$$

- Potência do sinal desejado $10 \cos \omega_0 t$: $10^2/2 = 50$
- Potência da componente de terceiro harmônico: $0,733^2/2 = 0,2686$
- Distorção do terceiro harmônico: $0,2686/50 \times 100 = 0,5372\%$

Exemplo: Filtro Passa-Baixas

Sistema: Filtro RC com $H(j\omega) = \frac{1}{1+j\omega RC}$

Entrada: Onda quadrada com $\omega_0 = 1 \text{ rad/s}$

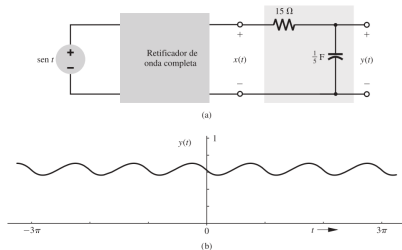


Figura: (a) Filtro passa-baixas e (b) resposta a onda quadrada (saída). Fonte: Lathi, 2000.

Resultado:

- Harmônicas de baixa frequência passam com pouca atenuação
- Harmônicas de alta frequência são atenuadas
- Saída é suavizada (bordas arredondadas)

Exemplo MATLAB: Resposta de Sistema

Análise de sistema com entrada periódica:

```
1 % Sistema:  $H(s) = 1/(s+1)$ 
2 RC = 1; w0 = 1;
3 n = 0:2:20; % Apenas harmônicas ímpares (onda quadrada)
4
5 % Entrada: onda quadrada
6 Dn_in = (2./(n*pi)) .* sin(n*pi/2);
7 Dn_in(1) = 0.5; % Componente DC
8
9 % Resposta em frequência
10 H = 1 ./ (1 + 1j*n*w0*RC);
11
12 % Saída
13 Dn_out = Dn_in .* H;
14
15 % Reconstrução
16 t = linspace(0, 4*pi, 1000);
17 y = zeros(size(t));
18 for k = 1:length(n)
19 y = y + abs(Dn_out(k)) * cos(n(k)*w0*t + angle(Dn_out(k)));
20 end
21
22 plot(t, y, 'LineWidth', 2);
23 xlabel('t (s)'); ylabel('y(t)'); grid on;
24 title('Saída do filtro para onda quadrada');
```

Notação e Linearidade da Série de Fourier

Notação:

$$\mathcal{F}_S\{x(t)\}_T = \{D_n\}_{\omega_0} \iff x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} D_n e^{jn\omega_0 t},$$

$$D_n = \frac{1}{T} \int_T x(t) e^{-jn\omega_0 t} dt, \quad T = \frac{2\pi}{\omega_0}$$

A notação pressupõe que o sinal original $x(t)$ foi descrito em um intervalo T , no qual são computados os coeficientes D_n .

Por construção, a série de Fourier de $x(t)$ é periódica, de período T .

Propriedade (Linearidade)

A série de Fourier é linear, isto é,

$$\mathcal{F}_S\{\alpha_1 x_1(t) + \alpha_2 x_2(t)\}_T = \alpha_1 \mathcal{F}_S\{x_1(t)\}_T + \alpha_2 \mathcal{F}_S\{x_2(t)\}_T$$

Exemplo 1.8

$$2 \cos(t) + 2 \cos(2t) = \exp(jt) + \exp(-jt) + \exp(j2t) + \exp(-j2t)$$

Portanto, a série de Fourier é dada por

$$\mathcal{F}_S\{2 \cos(t) + 2 \cos(2t)\}_{T=2\pi} = \mathcal{F}_S\{2 \cos(t)\}_{T=2\pi} + \mathcal{F}_S\{2 \cos(2t)\}_{T=2\pi}$$

$$D_1 = D_{-1} = D_2 = D_{-2} = 1 \quad , \quad w_0 = 1$$

Propriedade (Deslocamento no tempo)

$$\mathcal{F}_S\{x(t)\}_T = \{D_n\}_{\omega_0}, \quad a \text{ real} \quad \Rightarrow \quad \mathcal{F}_S\{x(t-a)\}_T = \{D_n e^{-jn\omega_0 a}\}_{\omega_0}$$

pois

$$x(t-a) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} D_n e^{-jn\omega_0 a} e^{jn\omega_0 t}$$

Propriedade de Multiplicação no Tempo

Propriedade (Multiplicação no tempo)

$$\mathcal{F}_S\{x(t)v(t)\}_T = \mathcal{F}_S\{x(t)\}_T * \mathcal{F}_S\{v(t)\}_T = \{X_n * V_n\}_{\omega_0}$$

em que X_n e V_n são os coeficientes da série exponencial de Fourier de $x(t)$ e $v(t)$, respectivamente. Denominando E_n os coeficientes da série associada ao produto $x(t)v(t)$, tem-se

$$E_n = \frac{1}{T} \int_T x(t)v(t)e^{-jn\omega_0 t} dt = \frac{1}{T} \int_T \left(\sum_{m=-\infty}^{+\infty} X_m e^{jm\omega_0 t} \right) v(t)e^{-jn\omega_0 t} dt \quad (3)$$

$$= \sum_{m=-\infty}^{+\infty} X_m \underbrace{\frac{1}{T} \int_T v(t)e^{-j(n-m)\omega_0 t} dt}_{V_{n-m}} = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} X_m V_{n-m} = X_n * V_n \quad (4)$$

Propriedade (Derivada)

$$\mathcal{F}_S\{x(t)\}_T = \{D_n\}_{\omega_0} \Rightarrow \mathcal{F}_S\left\{\frac{d}{dt}x(t)\right\}_T = \{jn\omega_0 D_n\}_{\omega_0}$$

Prova: usando a propriedade (integração por partes)

$$\int u dv = uv - \int v du$$

tem-se que os coeficientes da série de Fourier da derivada são dados por

$$\frac{1}{T} \int_T \left(\frac{d}{dt} x(t) \right) e^{-jn\omega_0 t} dt = \frac{1}{T} \int_T e^{-jn\omega_0 t} dx(t) = \quad (5)$$

$$= \frac{1}{T} x(t) e^{-jn\omega_0 t} \Big|_0^T - \frac{1}{T} \int_T x(t) (-jn\omega_0) e^{-jn\omega_0 t} dt = jn\omega_0 D_n \quad (6)$$

Propriedade (Integral)

$$\mathcal{F}_S\{x(t)\}_T = \{D_n\}_{\omega_0} \text{ e } D_0 = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathcal{F}_S\left\{\int_{-\infty}^t x(\beta)d\beta\right\}_T = \left\{\frac{1}{jn\omega_0}D_n\right\}_{\omega_0}$$

pois

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_S\left\{x(t) = \frac{d}{dt}v(t)\right\}_T &= \{D_n\}_{\omega_0} = \{jn\omega_0 d_n\}_{\omega_0} \\ \Rightarrow \mathcal{F}_S\left\{v(t) = \int_{-\infty}^t x(\beta)d\beta\right\}_T &= \{d_n\}_{\omega_0} = \left\{\frac{D_n}{jn\omega_0}\right\}_{\omega_0}\end{aligned}$$

Observe que, se o valor médio de $x(t)$ for diferente de zero, $v(t)$ diverge e não é um sinal periódico.

Resumo das propriedades da série de Fourier

Operação	$x(t)$	D_n
Multiplicação escalar	$kx(t)$	kD_n
Adição	$x_1(t) + x_2(t)$ $x_1(t), x_2(t)$ requerem o mesmo ω_0	$D_{1,n} + D_{2,n}$
Conjugação	$x^*(t)$	D_{-n}^*
Reversão	$x(-t)$	D_{-n}
Deslocamento temporal	$x(t - t_0)$	$D_n e^{-jn\omega_0 t_0}$
Deslocamento em frequência	$x(t)e^{jn_0\omega_0 t}$	D_{n-n_0}
Convolução em frequência	$x_1(t)x_2(t)$ $x_1(t), x_2(t)$ requerem o mesmo ω_0	$D_{1,n} * D_{2,n}$
Diferenciação temporal	$\frac{d^k x(t)}{dt^k}$	$(jn\omega_0)^k D_n$

Representações da Série de Fourier de um sinal periódico com período T_0 ($\omega_0 = 2\pi/T_0$).

Forma da série	Cálculo dos coeficientes	Fórmulas de conversão
Trigonométrica $f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\omega_0 t + b_n \sin n\omega_0 t$	$a_0 = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} f(t) dt$ $a_n = \frac{2}{T_0} \int_{T_0} f(t) \cos n\omega_0 t dt$ $b_n = \frac{2}{T_0} \int_{T_0} f(t) \sin n\omega_0 t dt$	$a_0 = C_0 = D_0$ $a_n - jb_n = C_n e^{j\theta_n} = 2D_n$ $a_n + jb_n = C_n e^{-j\theta_n} = 2D_{-n}$
Trigonométrica compacta $f(t) = C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos(n\omega_0 t + \theta_n)$	$C_0 = a_0$ $C_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$ $\theta_n = \tan^{-1} \left(\frac{-b_n}{a_n} \right)$	$C_0 = D_0$ $C_n = 2 D_n \quad n \geq 1$ $\theta_n = \angle D_n$
Exponencial $f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} D_n e^{jn\omega_0 t}$	$D_n = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} f(t) e^{-jn\omega_0 t} dt$	

Relações importantes para o cálculo dos coeficientes de Fourier

- Coeficientes como projeção ortogonal em base de sinais $\rightsquigarrow$ produto interno
- Simetria de sinal: par, ímpar e meia onda $\rightsquigarrow$ simplificação no cálculo dos coeficientes
- Escolha de limites de integração adequados
- Relações trigonométricas e plano complexo

$$\begin{aligned} \text{sen}(\theta) &= \cos(\theta - \pi/2), \quad \cos(\theta) = \cos(-\theta), \quad -\cos(\theta) = \cos(\theta - \pi) = \cos(\theta + \pi) \\ j &= e^{j\pi/2}, \quad -j = e^{-j\pi/2}, \quad -1 = e^{-j\pi}, \quad z = a + jb = re^{j\theta} \Rightarrow z^* = a - jb = re^{-j\theta}, \\ e^{j\omega t} &= \cos \omega t + j \text{sen} \omega t, \quad \cos \omega t = \frac{e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}}{2}, \quad \text{sen} \omega t = \frac{e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}}{2j} \end{aligned}$$

- Da forma trigonométrica para forma compacta: adição de senóides usando fasores. Ex.:

$$3 \cos(\omega_0 t) + 4 \text{sen}(\omega_0 t) = 5 \cos(\omega_0 t - 53, 13)$$

- Cálculo do período fundamental de múltiplos sinais senoidais de frequências distintas $\rightsquigarrow$ relação racional e máximo divisor comum

Relações importantes para o cálculo dos coeficientes de Fourier

- Integral por partes para cálculo de $\int_{T_0} x(t) \cos(n\omega_0 t) dt$:

$$\int_a^b u(x) v'(x) dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x) dx$$

- Série Exponencial de Fourier

$$D_n = \langle x(t), e^{jn\omega_0 t} \rangle = |D_n| e^{j\angle D_n}, \quad |D_n| = |D_{-n}| = \frac{C_n}{2}, \quad \angle D_n = \theta_n$$

$$D_0 = a_0 = C_0, \quad D_n = \frac{1}{2}(a_n - jb_n) = \frac{1}{2}C_n e^{j\theta_n}, \quad D_{-n} = D_n^* \quad (\text{se } x(t) \text{ real})$$

- Potência de um sinal a partir do espectro de Fourier (**Teorema de Parseval**)

$$P_x = C_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} C_n^2, \quad P_x = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |D_n|^2 \quad \text{ou} \quad P_x = D_0^2 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} |D_n|^2 \quad (\text{se } x(t) \text{ real})$$

- Resposta de sistemas LCIT com função de transferência $H(s = j\omega)$:

$$y(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} D_n H(jn\omega_0) e^{jn\omega_0 t}, \quad y(t) = C_0 H(0) + \sum_{n=1}^{\infty} C_n |H(jn\omega_0)| \cos(n\omega_0 t + \theta_n + \angle H(jn\omega_0))$$

Outros tópicos sobre a série de Fourier

Questão fundamental: Quando a série de Fourier existe e converge?

Condição para existência:

- Os coeficientes a_0, a_n, b_n devem ser finitos
- Isso é garantido se $x(t)$ for **absolutamente integrável** em um período:

$$\int_{T_0} |x(t)| dt < \infty$$

Mas existência não implica em convergência!

Tipos de convergência:

- ① **Convergência uniforme:** A série converge para $x(t)$ com erro arbitrariamente pequeno usando número fixo de termos para todo t .
- ② **Convergência pontual:** A série converge em cada ponto, mas pode precisar de diferentes números de termos para diferentes valores de t .
- ③ **Convergência na média:** A energia do erro tende a zero quando $N \rightarrow \infty$.

Convergência na Média

Aproximação por N termos:

$$x_N(t) = a_0 + \sum_{n=1}^N (a_n \cos n\omega_0 t + b_n \sen n\omega_0 t)$$

Erro de aproximação:

$$e(t) = x(t) - x_N(t)$$

Convergência na média:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_{T_0} |e(t)|^2 dt = 0$$

Importante: A energia do erro pode ser zero mesmo se $e(t) \neq 0$ em pontos isolados!

Condição Suficiente para Convergência na Média

Se $x(t)$ possui **energia finita** em um período:

$$\int_{T_0} |x(t)|^2 dt < \infty$$

então a série de Fourier converge na média para $x(t)$.

Observação:

- Esta condição garante que os coeficientes são finitos
- É menos restritiva que a integrabilidade absoluta
- Praticamente todos os sinais de energia encontrados em aplicações satisfazem esta condição

Critério alternativo para convergência pontual:

Se $x(t)$ satisfaz as seguintes condições (Condições de Dirichlet):

- ❶ $x(t)$ é absolutamente integrável: $\int_{T_0} |x(t)| dt < \infty$
- ❷ $x(t)$ tem apenas um número **finito de descontinuidades finitas** em um período
- ❸ $x(t)$ tem apenas um número **finito de máximos e mínimos** em um período

Então a série de Fourier converge para $x(t)$ em todos os pontos de continuidade.

Teorema

Sempre que houver um salto de descontinuidade em $x(t)$, a série de Fourier no ponto de descontinuidade converge para a média dos limites do lado direito e esquerdo de $x(t)$.

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=-N}^N (\text{série}) = \frac{x(t^+) + x(t^-)}{2} \quad (7)$$

Convergência em Pontos de Descontinuidade

Exemplo. Considere o sinal periódico:

$$x(t) = e^{-t/2} \quad \text{para } 0 \leq t < \pi \quad (8)$$

com período $T_0 = \pi$.

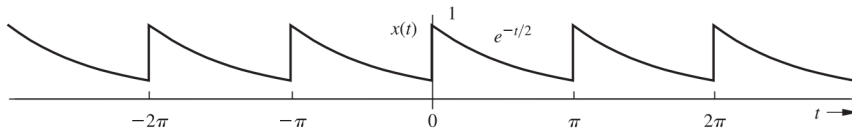


Figura: Sinal exponencial decrescente periódico. Fonte: Lathi, 2000.

Em $t = 0$:

- $x(0^+) = 1$
- $x(0^-) = x(\pi) = e^{-\pi/2} = 0,208$
- Série converge para: $(1 + 0,208)/2 = 0,604$

Síntese de Sinais pela Série de Fourier

Objetivo

Demonstrar como sintetizar um sinal periódico somando suas componentes espectrais sequencialmente

Exemplo: Síntese do pulso quadrado

$$x(t) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \cos(t) - \frac{2}{3\pi} \cos(3t) + \frac{2}{5\pi} \cos(5t) - \dots \quad (9)$$

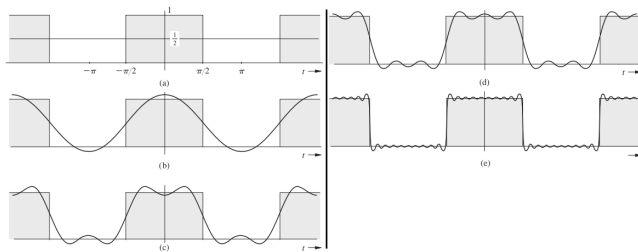


Figura: Síntese progressiva do pulso quadrado. (a) Componente constante; (b) Adição da fundamental; (c) Adição da terceira harmônica; (d) Adição da quinta harmônica; (e) Componentes até a décima nona harmônica.

Papel das Frequências na Forma de Onda

- **Baixas frequências:** afetam o comportamento em grande escala
- **Altas frequências:** determinam a estrutura fina (variações rápidas)
- **Mudanças bruscas:** necessitam de altas frequências na série

Taxa de Decaimento do Espectro

- Sinais suaves: espectro decai rapidamente (poucos termos necessários)
- Sinais com discontinuidades: espectro decai lentamente (muitos termos necessários)
- Sinais com discontinuidades em salto (ex.: onda quadrada): decaimento dos coeficientes proporcional a $1/n$
- Sinais suaves: coeficientes decaem mais rapidamente que $1/n$ (ex. onda triangular $\rightsquigarrow \propto 1/n^2$)

Código MATLAB: Síntese Progressiva

```
1 % Parâmetros
2 T0 = 2*pi;
3 t = linspace(-2*pi, 2*pi, 1000);
4 N_max = [1, 3, 5, 9, 19]; % Número máximo de harmônicos
5 figure;
6 for k = 1:length(N_max)
7     N = N_max(k);
8
9     % Componente DC
10    x_synth = 0.5 * ones(size(t));
11
12    % Adiciona harmônicos ímpares
13    for n = 1:2:N
14        coeff = 2/(n*pi);
15        x_synth = x_synth + coeff * cos(n*t);
16    end
17
18    % Plotagem
19    subplot(length(N_max), 1, k);
20    plot(t, x_synth, 'b-', 'LineWidth', 1.5);
21    title(['Síntese com até ', num2str(N), ' harmônicos']);
22    xlabel('t'); ylabel('x(t)'); grid on;
23    axis([-2*pi 2*pi -0.2 1.2]);
24 end
```

Listing 1: Síntese progressiva do pulso quadrado

Fenômeno de Gibbs

Definição

*O **Fenômeno de Gibbs** é a oscilação persistente que ocorre próximo a descontinuidades quando se aproxima um sinal pela série de Fourier truncada.*

Características:

- Overshoot de aproximadamente 9% do salto
- Não diminui com o aumento do número de termos
- As oscilações se concentram próximo à descontinuidade
- A energia do erro tende a zero (convergência na média)

Implicações Práticas

- Importante em processamento de sinais digitais
- Consideração no projeto de filtros
- Uso de funções de janelamento para mitigar o efeito

Código MATLAB: Demonstração do Fenômeno de Gibbs

```
1 % Parâmetros para demonstrar o Fenômeno de Gibbs
2 T0 = 2*pi;
3 t = linspace(-pi, pi, 2000);
4 N_terms = [5, 10, 50, 100];
5 % Sinal original (pulso quadrado)
6 x_original = (t >= -pi/2 & t <= pi/2);
7 figure;
8 for k = 1:length(N_terms)
9     N = N_terms(k);
10    % Síntese com N termos
11    x_synth = 0.5 * ones(size(t));
12    for n = 1:2:N % Apenas harmônicos ímpares
13        coeff = 2/(n*pi);
14        x_synth = x_synth + coeff * cos(n*t);
15    end
16    subplot(2, 2, k); plot(t, x_original, 'r—', 'LineWidth', 2);
17    hold on; plot(t, x_synth, 'b-', 'LineWidth', 1);
18    title(['N = ', num2str(N), ' harmônicos']);
19    xlabel('t'); ylabel('Amplitude');
20    legend('Original', 'Síntese', 'Location', 'best');
21    grid on; axis([-pi pi -0.2 1.2]);
22    % Destaque próximo a descontinuidade
23    xlim([-pi/2-0.5, pi/2+0.5]);
24    end
```

Listing 2: Visualização do Fenômeno de Gibbs

Exemplo: Onda Quadrada como Tom Musical

Uma onda quadrada de 440 Hz (Lá central) pode ser sintetizada usando:

$$x(t) = \frac{4}{\pi} \left[\sin(2\pi \cdot 440 \cdot t) + \frac{1}{3} \sin(2\pi \cdot 1320 \cdot t) + \frac{1}{5} \sin(2\pi \cdot 2200 \cdot t) + \dots \right] \quad (10)$$

Características espectrais:

- Fundamental: 440 Hz
- Harmônicos: 1320 Hz, 2200 Hz, 3080 Hz, ...
- Som "rico" devido aos harmônicos
- Diferente de uma senoide pura (som "limpo")

Implicações:

- Instrumentos musicais têm conteúdo harmônico característico
- Equalização ajusta diferentes bandas de frequência
- Compressão de áudio pode explorar redundância espectral

Papel do Espectro na Forma de Onda

Síntese de sinal: Somar progressivamente as harmônicas

Para a onda quadrada:

$$x(t) = \frac{1}{2} + \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{2}{n\pi} \operatorname{sen} \frac{n\pi}{2} \cos n\omega_0 t$$

Aproximações sucessivas:

- $N = 1$: apenas a fundamental
- $N = 3$: fundamental + 3ª harmônica
- $N = 5, 7, 9, \dots$: melhora progressiva

Figura: Síntese da onda quadrada com N harmônicas. Fonte: Lathi, 2000.

Fenômeno de Gibbs

Observação importante: Nas descontinuidades, há uma oscilação persistente!

- O **sobressinal** (overshoot) é aproximadamente 9% da descontinuidade
- Este overshoot **não desaparece** com o aumento de N
- A largura da oscilação diminui com N , mas a amplitude do pico permanece

Fenômeno de Gibbs: Comportamento oscilatório próximo a descontinuidades

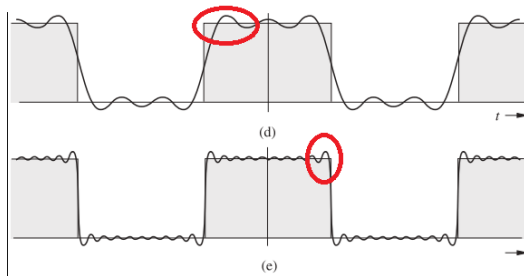


Figura: Fenômeno de Gibbs em descontinuidade. Síntese de Fourier de um sinal contínuo usando as primeiras 5 e 19 harmônicas. Fonte: Lathi, 2000.

Exemplo MATLAB: Fenômeno de Gibbs

Código para observar o fenômeno de Gibbs:

```
1  % Série de Fourier da onda quadrada
2  T0 = 2*pi; w0 = 2*pi/T0;
3  t = linspace(-pi, pi, 1000);
4
5  for N = [1, 5, 15, 50]
6  x_N = 0.5 * ones(size(t));
7  for n = 1:2:N
8  x_N = x_N + (2/(n*pi)) * sin(n*pi/2) * cos(n*w0*t);
9  end
10
11 figure; plot(t, x_N, 'LineWidth', 2);
12 title(['Aproximacao com N = ', num2str(N)]);
13 xlabel('t'); ylabel('x_N(t)');
14 grid on;
15 end
```

Analogia fundamental: Sinais são como vetores!

Para vetores:

- Um vetor pode ser representado em diferentes sistemas de coordenadas
- Base ortonormal: vetores mutuamente perpendiculares
- Componente: projeção do vetor na direção da base

Para sinais:

- Um sinal pode ser representado por diferentes conjuntos de funções
- Base ortogonal: funções mutuamente ortogonais
- Coeficiente: "projeção" do sinal na direção da função base

Componente de um Vetor

Vetor 3D: $\mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + x_3\mathbf{e}_3$

onde $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ são vetores unitários ortogonais.

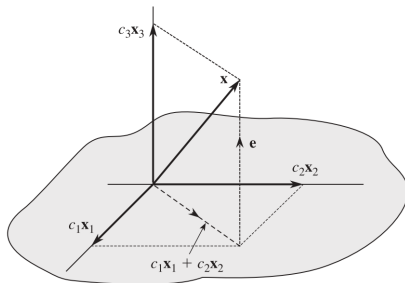


Figura: Representação de um vetor em um espaço tridimensional. Fonte: Lathi, 2000.

Componente de $\mathbf{x}$ na direção de $\mathbf{e}_i$:

$$x_i = \mathbf{x} \cdot \mathbf{e}_i$$

Analogia: Sinal como Vetor

Produto interno de sinais:

$$\langle x, y \rangle = \int_{t_1}^{t_2} x(t) y^*(t) dt$$

Norma (energia) de um sinal:

$$\|x\|^2 = \langle x, x \rangle = \int_{t_1}^{t_2} |x(t)|^2 dt$$

Ortogonalidade: Sinais $x(t)$ e $y(t)$ são ortogonais se $\langle x, y \rangle = 0$

Ortonormalidade: $\langle \phi_n, \phi_m \rangle = \delta_{nm}$ (delta de Kronecker)

Componente de um Sinal

Aproximação de $x(t)$ por $cy(t)$:

Minimizar a energia do erro:

$$E_e = \int_{t_1}^{t_2} |x(t) - cy(t)|^2 dt$$

Solução ótima:

$$c = \frac{\langle x, y \rangle}{\langle y, y \rangle} = \frac{\int_{t_1}^{t_2} x(t)y^*(t) dt}{\int_{t_1}^{t_2} |y(t)|^2 dt}$$

Se $y(t)$ for normalizado ($\|y\| = 1$), então:

$$c = \langle x, y \rangle$$

Exemplo: Aproximação por Senóide

Sinal: Onda quadrada no intervalo $(0, 2\pi)$

Aproximação: $y(t) = \text{sent}$

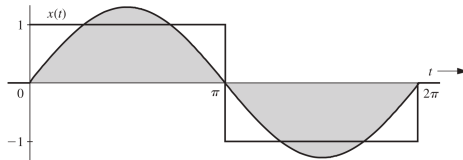


Figura: Aproximação de onda quadrada por $c \text{ sen} t$. Fonte: Lathi, 2000.

Cálculo:

$$c = \frac{\int_0^{2\pi} x(t) \text{sen} t \, dt}{\int_0^{2\pi} \text{sen}^2 t \, dt} = \frac{4}{\pi}$$

Melhor aproximação: $x(t) \approx \frac{4}{\pi} \text{sen} t$

Extensão para Sinais Complexos

Para sinais complexos $x(t)$:

Produto interno:

$$\langle x, y \rangle = \int_{t_1}^{t_2} x(t) y^*(t) dt$$

Energia:

$$E_x = \int_{t_1}^{t_2} |x(t)|^2 dt = \int_{t_1}^{t_2} x(t) x^*(t) dt$$

Ortogonalidade:

$$\langle \phi_m, \phi_n \rangle = \int_{t_1}^{t_2} \phi_m(t) \phi_n^*(t) dt = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ K_n, & m = n \end{cases}$$

Representação por Conjunto Ortogonal

Conjunto ortogonal: $\{\phi_1(t), \phi_2(t), \dots, \phi_N(t)\}$

Aproximação de $x(t)$:

$$\hat{x}(t) = \sum_{n=1}^N c_n \phi_n(t)$$

Coeficientes ótimos:

$$c_n = \frac{\langle x, \phi_n \rangle}{\langle \phi_n, \phi_n \rangle} = \frac{\int_{t_1}^{t_2} x(t) \phi_n^*(t) dt}{\int_{t_1}^{t_2} |\phi_n(t)|^2 dt}$$

Energia do erro:

$$E_e = E_x - \sum_{n=1}^N |c_n|^2 K_n$$

onde $K_n = \langle \phi_n, \phi_n \rangle$

Convergência na Média

Se o conjunto $\{\phi_n(t)\}$ for **completo**:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} E_e = 0$$

ou seja:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_{t_1}^{t_2} \left| x(t) - \sum_{n=1}^N c_n \phi_n(t) \right|^2 dt = 0$$

Relação de Parseval:

$$E_x = \sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2 K_n$$

Para conjunto ortonormal ($K_n = 1$):

$$E_x = \sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2$$

Série de Fourier como Caso Especial

Conjunto exponencial: $\{e^{jn\omega_0 t}\}_{n=-\infty}^{\infty}$

Ortogonalidade:

$$\langle e^{jm\omega_0 t}, e^{jn\omega_0 t} \rangle = \int_{T_0} e^{j(m-n)\omega_0 t} dt = T_0 \delta_{mn}$$

Coeficientes:

$$D_n = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} x(t) e^{-jn\omega_0 t} dt$$

Série:

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} D_n e^{jn\omega_0 t}$$

A série trigonométrica/exponencial de Fourier é um caso especial da série de Fourier generalizada!

Conjunto Trigonométrico

Base trigonométrica: $\{1, \cos n\omega_0 t, \text{sen} n\omega_0 t\}$

Ortogonalidade:

$$\int_{T_0} \cos m\omega_0 t \cdot \cos n\omega_0 t \, dt = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ T_0/2, & m = n \neq 0 \end{cases}$$

$$\int_{T_0} \text{sen} m\omega_0 t \cdot \text{sen} n\omega_0 t \, dt = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ T_0/2, & m = n \neq 0 \end{cases}$$

$$\int_{T_0} \cos m\omega_0 t \cdot \text{sen} n\omega_0 t \, dt = 0 \text{ para todo } m, n$$

Conjunto completo: Pode representar qualquer sinal periódico com energia finita!

Exemplo: Polinômios de Legendre

Outro conjunto ortogonal no intervalo $(-1, 1)$:

$$\phi_0(t) = 1$$

$$\phi_1(t) = t$$

$$\phi_2(t) = \frac{1}{2}(3t^2 - 1)$$

$$\phi_3(t) = \frac{1}{2}(5t^3 - 3t)$$

$\vdots$

Ortogonalidade:

$$\int_{-1}^1 \phi_m(t) \phi_n(t) dt = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ \frac{2}{2n+1}, & m = n \end{cases}$$

Qualquer sinal pode ser representado por polinômios de Legendre!

Determinação Numérica

Problema: Calcular D_n a partir de amostras de $x(t)$

Definição:

$$D_n = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} x(t) e^{-jn\omega_0 t} dt$$

Aproximação numérica: Usar soma de Riemann com $N_0 = T_0/T$ amostras:

$$D_n \approx \frac{1}{T_0} \sum_{k=0}^{N_0-1} x(kT) e^{-jn\omega_0 kT} \cdot T$$

Simplificando:

$$D_n \approx \frac{1}{N_0} \sum_{k=0}^{N_0-1} x(kT) e^{-j2\pi nk/N_0}$$

Transformada Discreta de Fourier (DFT):

$$X[n] = \sum_{k=0}^{N_0-1} x[k] e^{-j2\pi nk/N_0}$$

Relação:

$$D_n \approx \frac{X[n]}{N_0}$$

Erro:

- Proporcional ao intervalo de amostragem T
- Diminui com $T \rightarrow 0$ (mais amostras)
- Inerente ao cálculo numérico de integrais

Prático: Use FFT para cálculo eficiente!

Exemplo MATLAB: Cálculo Numérico de D_n

```
1 % Sinal periódico (exemplo: onda triangular)
2 T0 = 2; w0 = 2*pi/T0;
3 Ts = 0.01; % Período de amostragem
4 N0 = round(T0/Ts); % Número de amostras por período
5
6 % Gerar um período do sinal
7 t = (0:N0-1)*Ts;
8 x = 1 - abs(2*t/T0 - 1); % Onda triangular
9
10 % DFT (usando FFT)
11 X = fft(x);
12 Dn = X / N0; % Coeficientes de Fourier
13
14 % Plotar espectro
15 n = 0:N0-1;
16 freq = n * w0;
17 figure;
18 stem(freq(1:N0/2), abs(Dn(1:N0/2)), 'filled');
19 xlabel('\omega (rad/s)');
20 ylabel('|D_n|');
21 title('Espectro calculado numericamente');
22 grid on;
```

Principais resultados:

- **Condições de Dirichlet:** Garantem convergência pontual
 - Integrabilidade absoluta
 - Número finito de discontinuidades e extremos
- **Convergência na média:** Garantida se $x(t)$ tem energia finita
- **Descontinuidades:** Série converge para a média dos valores laterais
- **Fenômeno de Gibbs:** Overshoot de 9% próximo a discontinuidades

Resumo: Série Exponencial

Forma compacta:

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} D_n e^{jn\omega_0 t}, \quad D_n = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} x(t) e^{-jn\omega_0 t} dt$$

Propriedades para $x(t)$ real:

- $D_{-n} = D_n^*$ (conjugados)
- $|D_n|$ é par em ω
- $\angle D_n$ é ímpar em ω

Teorema de Parseval:

$$P_x = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |D_n|^2$$

Resposta a entrada periódica:

- 1 Entrada: $x(t) = \sum D_n e^{jn\omega_0 t}$
- 2 Saída: $y(t) = \sum D_n H(jn\omega_0) e^{jn\omega_0 t}$
- 3 Cada harmônica é multiplicada por $H(jn\omega_0)$

Interpretação física:

- Sistema modifica amplitude e fase de cada harmônica
- Filtros atenuam/amplificam seletivamente frequências
- Distorção ocorre se $|H(j\omega)|$ ou $\angle H(j\omega)$ não forem ideais

Conceito fundamental: Sinais como vetores em espaço de Hilbert

Qualquer conjunto ortogonal completo $\{\phi_n(t)\}$:

$$x(t) = \sum_n c_n \phi_n(t), \quad c_n = \frac{\langle x, \phi_n \rangle}{\langle \phi_n, \phi_n \rangle}$$

Fourier é caso especial:

- Exponenciais $\{e^{jn\omega_0 t}\}$ são ortogonais
- Conjunto completo para sinais periódicos
- Autofunções de sistemas LIT (razão da escolha!)

1. Análise espectral:

- Identificar componentes de frequência
- Determinar largura de faixa
- Análise de distorção harmônica

2. Projeto de filtros:

- Especificar resposta em frequência
- Análise de resposta a sinais periódicos

3. Processamento de sinais:

- Compressão de dados
- Equalização
- Modulação/demodulação

4. Comunicações:

- Análise de sinais modulados
- Multiplexação FDM
- Análise de ruído

5. Controle:

- Análise de resposta em frequência
- Estabilidade de sistemas
- Compensação de distúrbios periódicos

6. Instrumentação:

- Analisadores de espectro
- Medição de distorção harmônica total (THD)

Exercício Prático: Análise Completa

Problema: Analisar onda quadrada através de filtro RC

```
1  % Parâmetros
2  T0 = 2*pi; w0 = 2*pi/T0; RC = 1;
3  t = linspace(0, 2*T0, 1000);
4  % Entrada: onda quadrada (séries até N=20)
5  x = 0.5 * ones(size(t));
6  Dn_in = [];
7  for n = 1:2:20
8      coef = (2/(n*pi)) * sin(n*pi/2);
9      x = x + coef * cos(n*w0*t);
10     Dn_in = [Dn_in; n, abs(coef), angle(coef)];
11 end
12 % Saída do filtro
13 y = 0.5 * ones(size(t));
14 for n = 1:2:20
15     H = 1/(1 + 1j*n*w0*RC);
16     coef = (2/(n*pi)) * sin(n*pi/2);
17     y = y + abs(coef*H) * cos(n*w0*t + angle(coef*H));
18 end
19 % Plotar
20 figure; subplot(2,1,1); plot(t, x, 'b', 'LineWidth', 2);
21 title('Entrada'); grid on;
22 subplot(2,1,2); plot(t, y, 'r', 'LineWidth', 2); title('Saída'); grid on;
```

Exercícios Propostos

1. Determine a série exponencial de Fourier de:
 - Trem de pulsos retangulares
 - Onda triangular
 - Onda dente de serra
2. Verifique o Teorema de Parseval para os sinais acima
3. Para um filtro passa-baixas $H(j\omega) = \frac{10}{1+j\omega/100}$:
 - Determine a saída para entrada senoidal retificada
 - Calcule a distorção harmônica
4. Aproxime $x(t) = e^t$ no intervalo $(-1, 1)$ usando:
 - Série de Fourier trigonométrica
 - Polinômios de Legendre

Compare as energias de erro.

Exercícios Propostos (continuação)

5. Implemente em MATLAB:

- Cálculo numérico de coeficientes D_n via FFT
- Visualização do fenômeno de Gibbs
- Análise espectral de sinais periódicos compostos

6. Demonstre que:

- Um deslocamento temporal muda apenas a fase do espectro
- Compressão no tempo expande o espectro
- A derivada de $x(t)$ multiplica D_n por $j n \omega_0$

7. Para um amplificador com característica de ceifamento, determine:

- Os coeficientes de distorção harmônica
- A distorção harmônica total (THD)

Referências



Lathi, B. P.

Sinais e Sistemas Lineares.

2ª edição, Bookman, 2006.

Capítulo 6, páginas 545–585.



Oppenheim, A. V.; Willsky, A. S.; Nawab, S. H.

Signals & Systems.

2nd edition, Prentice Hall, 1997.



Haykin, S.; Van Veen, B.

Sinais e Sistemas.

Bookman, 2001.