

ENE0067 – Sinais e Sistemas em Tempo Contínuo

Transformada de Fourier (parte 1)

Prof. Eduardo Stockler Tognetti

Departamento de Engenharia Elétrica
Universidade de Brasília – UnB



Sumário da Aula

- 1 Revisão: Série de Fourier
- 2 Da Série à Transformada de Fourier
- 3 Definição da Transformada de Fourier
- 4 Transformadas de Algumas Funções Úteis
- 5 Existência da Transformada de Fourier
- 6 Informações Complementares

Sinal Periódico

Um sinal $x(t)$ é periódico se $x(t) = x(t + T_0)$ para todo t , onde T_0 é o período fundamental.

Série Exponencial de Fourier:

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} D_n e^{jn\omega_0 t} \quad (1)$$

onde $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$ é a frequência fundamental e

$$D_n = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} x(t) e^{-jn\omega_0 t} dt \quad (2)$$

Espectro Discreto de Sinais Periódicos

- Para sinais **periódicos**, o espectro é **discreto**
- As componentes espectrais existem apenas em frequências múltiplas de ω_0 :

$$0, \pm\omega_0, \pm2\omega_0, \pm3\omega_0, \dots$$

- Os coeficientes D_n representam a amplitude de cada componente espectral
- O espectro consiste de **linhas espectrais** com amplitudes finitas

Limitação

A Série de Fourier só se aplica a sinais **periódicos**. E quanto aos sinais **não periódicos**?

Motivação: Analisando Sinais Não Periódicos

Desafio:

- A maioria dos sinais práticos são **não periódicos**
- Exemplos: pulsos, degraus, exponenciais decrescentes
- Como representá-los em frequência?

Ideia Fundamental:

- Sinal não periódico = sinal periódico com $T_0 \rightarrow \infty$
- Quando $T_0 \rightarrow \infty$:
 - $\omega_0 \rightarrow 0$
 - Espectro discreto $\rightarrow$ espectro contínuo

A Transformada de Fourier é o limite da Série de Fourier quando $T_0 \rightarrow \infty$

Passo 1: Construindo um Sinal Periódico a partir de $x(t)$

Dado um sinal não periódico $x(t)$, construímos um sinal periódico $x_{T_0}(t)$ que:

- Repete $x(t)$ a cada T_0 segundos
- Quando $T_0 \rightarrow \infty$, $x_{T_0}(t) \rightarrow x(t)$

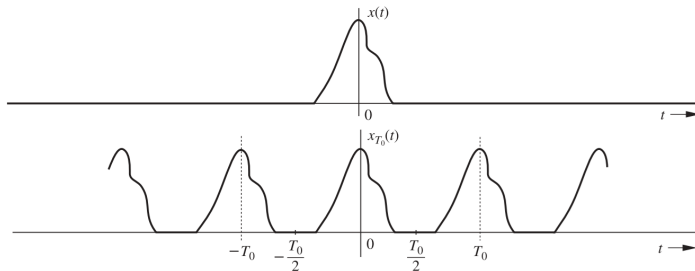


Figura: Construção de um sinal periódico pela extensão de $x(t)$. Fonte: Lathi, 2000.

$$\lim_{T_0 \rightarrow \infty} x_{T_0}(t) = x(t)$$

Passo 2: Série de Fourier de $x_{T_0}(t)$

O sinal periódico $x_{T_0}(t)$ pode ser representado pela série de Fourier:

$$x_{T_0}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} D_n e^{jn\omega_0 t} \quad (3)$$

onde os coeficientes são:

$$D_n = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x_{T_0}(t) e^{-jn\omega_0 t} dt \quad (4)$$

Observação importante: Como $x_{T_0}(t) = x(t)$ no intervalo $(-T_0/2, T_0/2)$:

$$D_n = \frac{1}{T_0} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-jn\omega_0 t} dt \quad (5)$$

Passo 3: Definindo a Função $X(\omega)$

Definimos uma função **contínua** de ω :

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t} dt \quad (6)$$

Relação com os coeficientes D_n :

Comparando com a Eq. (5), observamos que:

$$D_n = \frac{1}{T_0} X(n\omega_0) \quad (7)$$

Interpretação

Os coeficientes D_n são **amostras** de $\frac{1}{T_0} X(\omega)$ espaçadas de ω_0 !

Evolução do Espectro quando T_0 Aumenta

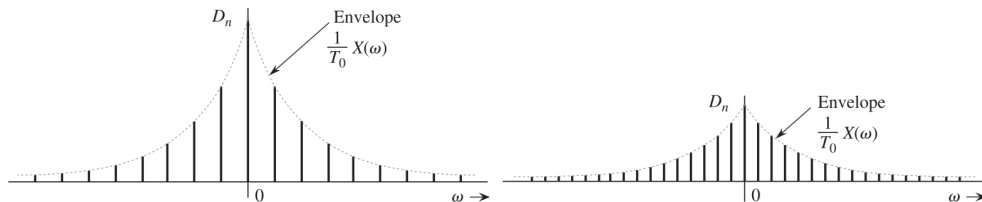


Figura: Mudança no espectro de Fourier quando o período T_0 é dobrado. Fonte: Lathi, 2000.

Quando dobramos T_0 :

- A frequência fundamental $\omega_0 = 2\pi/T_0$ é dividida pela metade
- Aparecem mais componentes espectrais (espectro mais denso)
- As amplitudes D_n diminuem (envelope $\frac{1}{T_0} X(\omega)$ diminui)
- A **forma do envelope** $X(\omega)$ permanece a mesma!

Passo 4: Substituindo D_n na Série de Fourier

Substituindo a Eq. (7) na Eq. (3):

$$x_{T_0}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T_0} X(n\omega_0) e^{jn\omega_0 t} \quad (8)$$

Lembrando que $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$, podemos escrever $\frac{1}{T_0} = \frac{\omega_0}{2\pi}$:

$$x_{T_0}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{X(n\omega_0)}{2\pi} \omega_0 e^{jn\omega_0 t} \quad (9)$$

$$x_{T_0}(t) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} X(n\omega_0) e^{jn\omega_0 t} \omega_0 \quad (10)$$

Passo 5: Introduzindo a Notação Diferencial

Quando $T_0 \rightarrow \infty$, temos $\omega_0 \rightarrow 0$ (infinitesimal).

É apropriado substituir ω_0 por uma notação diferencial $\Delta\omega$:

$$\Delta\omega = \omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} \quad (11)$$

A Eq. (10) se torna:

$$x_{T_0}(t) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} X(n\Delta\omega) e^{jn\Delta\omega t} \Delta\omega \quad (12)$$

Interpretação: A série de Fourier representa $x_{T_0}(t)$ como soma de exponenciais com frequências $0, \pm\Delta\omega, \pm2\Delta\omega, \pm3\Delta\omega, \dots$

Passo 6: Tomando o Limite $T_0 \rightarrow \infty$

No limite quando $T_0 \rightarrow \infty$:

- $\Delta\omega \rightarrow 0$ (torna-se infinitesimal)
- $x_{T_0}(t) \rightarrow x(t)$
- A soma se torna uma **integral**!

$$\lim_{T_0 \rightarrow \infty} x_{T_0}(t) = \lim_{\Delta\omega \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} X(n\Delta\omega) e^{jn\Delta\omega t} \Delta\omega \quad (13)$$

Da Soma à Integral

Como $n\Delta\omega \rightarrow \omega$ (variável contínua) e $\Delta\omega \rightarrow d\omega$:

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad (14)$$

Interpretação Geométrica da Integral

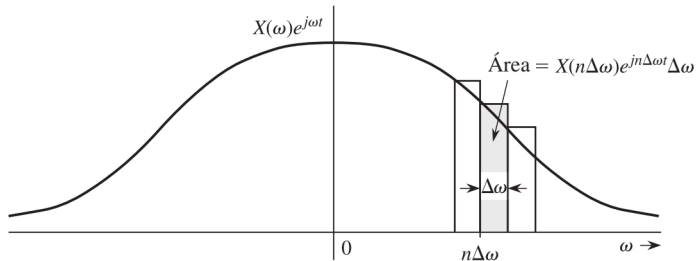


Figura: A série de Fourier se torna a integral de Fourier no limite $T_0 \rightarrow \infty$. Fonte: Lathi, 2000.

A soma torna-se a área sob a curva:

- O termo $\frac{1}{2\pi}X(\omega)e^{j\omega t}$ representa a "altura" da função
- $d\omega$ representa um elemento infinitesimal de "largura"
- A integral soma todas essas contribuições infinitesimais

Par de Transformadas de Fourier

Obtivemos com sucesso a representação de um sinal não periódico pela **Integral de Fourier**!

Transformada de Fourier Direta

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t} dt = \mathcal{F}\{x(t)\} \quad (15)$$

Transformada de Fourier Inversa

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)e^{j\omega t} d\omega = \mathcal{F}^{-1}\{X(\omega)\} \quad (16)$$

Notação: $x(t) \Longleftrightarrow X(\omega)$ ou $x(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X(\omega)$

Comparação: Série vs. Transformada de Fourier

Característica	Série de Fourier	Transformada de Fourier
Tipo de sinal	Periódico	Não periódico
Período	T_0 finito	$T_0 \rightarrow \infty$
Freq. fundamental	$\omega_0 = 2\pi/T_0$	$\omega_0 \rightarrow 0$
Espectro	Discreto (linhas)	Contínuo
Representação	Soma $\sum$	Integral $\int$
Frequências	$0, \pm\omega_0, \pm2\omega_0, \dots$	Todas as freq. ω
Coeficientes	D_n (finitos)	$X(\omega)$ (densidade)
Amplitude	Amplitude finita	Amplitude infinitesimal

Conclusão: A Transformada de Fourier é a generalização natural da Série de Fourier para sinais aperiódicos!

Série de Fourier (Sinal Periódico):

- Soma de **componentes discretas** com amplitudes **finitas** D_n
- Frequências espaçadas de ω_0

Transformada de Fourier (Sinal Não Periódico):

- Soma de **componentes contínuas** com amplitudes **infinitesimais**
- Todas as frequências presentes
- $X(\omega)$ é a **densidade espectral** por unidade de largura de banda

Conceito Fundamental

$X(\omega)$ **não** é a amplitude em ω , mas sim a **densidade espectral**. A contribuição das componentes na faixa $d\omega$ é $\frac{1}{2\pi} X(\omega) d\omega$.

O Paradoxo Aparente

Quando $T_0 \rightarrow \infty$:

- $D_n \rightarrow 0$ (amplitudes $\rightarrow$ zero)
- Mas ainda conseguimos sintetizar $x(t)$!

Como?

- Apesar de $D_n \rightarrow 0$, temos **infinitas componentes**
- A quantidade $D_n \Delta\omega = \frac{X(n\omega_0)}{2\pi}$ permanece finita
- No limite, $\frac{1}{2\pi}X(\omega)d\omega$ é a contribuição infinitesimal, mas a integral sobre todas as frequências reconstrói $x(t)$

Visualizando a Transição: Pulso Retangular

Considere um pulso retangular de duração finita.

À medida que T_0 aumenta:

- 1 $T_0 = 4\tau$: Espectro com linhas espaçadas de $\omega_0 = \pi/(2\tau)$
- 2 $T_0 = 8\tau$: Espectro com linhas espaçadas de $\omega_0 = \pi/(4\tau)$ (mais denso)
- 3 $T_0 = 16\tau$: Espectro com linhas espaçadas de $\omega_0 = \pi/(8\tau)$ (ainda mais denso)
- 4 $T_0 \rightarrow \infty$: Espectro **contínuo** (linhas infinitamente próximas)

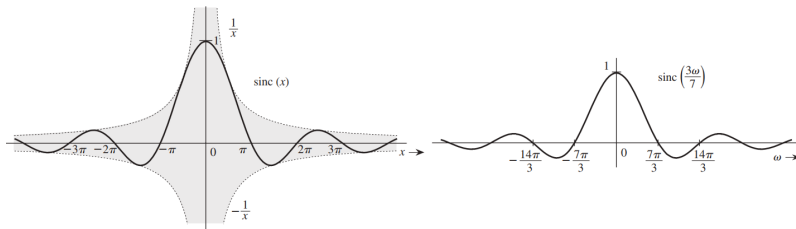


Figura: Transição do espectro discreto para contínuo. Fonte: Lathi, 2000.

Exponencial Decrescente

Determine a Transformada de Fourier de $x(t) = e^{-at}u(t)$, com $a > 0$.

Solução:

$$\begin{aligned} X(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-at}u(t)e^{-j\omega t}dt = \int_0^{\infty} e^{-at}e^{-j\omega t}dt = \int_0^{\infty} e^{-(a+j\omega)t}dt \\ &= \left[\frac{e^{-(a+j\omega)t}}{-(a+j\omega)} \right]_0^{\infty} = \frac{1}{a+j\omega} = \frac{1}{\sqrt{a^2 + \omega^2}} e^{-j \arctan(\omega/a)} \end{aligned}$$

$$\boxed{\mathcal{F}\{e^{-at}u(t)\} = \frac{1}{a+j\omega}, \quad a > 0} \quad (17)$$

Observação: Para $a < 0$ (exponencial crescente), a transformada não existe!

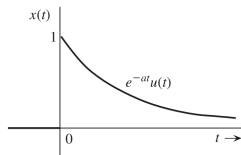
Espectros de Amplitude e Fase

Para $x(t) = e^{-at}u(t)$ com $a > 0$: $X(\omega) = \frac{1}{a+j\omega} = |X(\omega)|e^{j\angle X(\omega)}$

Espectro de Amplitude:

$$|X(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{a^2 + \omega^2}}$$

- Função **par** de ω
- Máximo em $\omega = 0$: $|X(0)| = 1/a$
- Decai com $|\omega|$



Espectro de Fase:

$$\angle X(\omega) = -\arctan\left(\frac{\omega}{a}\right)$$

- Função **ímpar** de ω
- $\angle X(0) = 0$
- Tende a $-\pi/2$ para $\omega \rightarrow \infty$

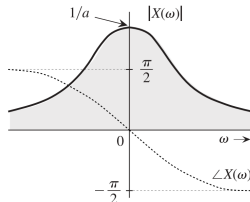


Figura: Espectro de $e^{-at}u(t)$. Fonte: Lathi, 2000.

Verificação com MATLAB/Octave

```
1 % Parâmetros
2 a = 1; % Constante de decaimento
3 t = linspace(0, 5, 1000); % Vetor de tempo
4 omega = linspace(-10, 10, 1000); % Vetor de frequências
5
6 % Sinal no tempo
7 x = exp(-a*t);
8
9 % Transformada de Fourier (analítica)
10 X = 1./(a + 1j*omega);
11
12 % Gráficos
13 figure;
14 subplot(2,2,1); plot(t, x);
15 title('x(t) = e^{-at}u(t)'); xlabel('t'); ylabel('x(t)');
16
17 subplot(2,2,2); plot(omega, abs(X));
18 title('|X(\omega)|'); xlabel('\omega'); ylabel('Espectro de Amplitude');
19
20 subplot(2,2,3); plot(omega, angle(X));
21 title('\angle X(\omega)'); xlabel('\omega'); ylabel('Espectro de Fase (rad)');
```

Listing 1: Transformada de Fourier de $\exp(-at)u(t)$.

Observação: Este código verifica a expressão analítica obtida.

Pulso Exponencial Bilateral

Determine a Transformada de Fourier de: $x(t) = e^{-a|t|}$, $a > 0$

Dica:

- Divida a integral em duas partes: $t < 0$ e $t > 0$
- Use $|t| = -t$ para $t < 0$ e $|t| = t$ para $t > 0$

Resposta esperada: $X(\omega) = \frac{2a}{a^2 + \omega^2}$

Observação: Este é um espectro real e par, pois $x(t)$ é real e par.

Cálculo:

$$\begin{aligned}X(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a|t|} e^{-j\omega t} dt \\&= \int_{-\infty}^0 e^{at} e^{-j\omega t} dt + \int_0^{\infty} e^{-at} e^{-j\omega t} dt \\&= \int_{-\infty}^0 e^{(a-j\omega)t} dt + \int_0^{\infty} e^{-(a+j\omega)t} dt \\&= \left[\frac{e^{(a-j\omega)t}}{a-j\omega} \right]_{-\infty}^0 + \left[\frac{e^{-(a+j\omega)t}}{-(a+j\omega)} \right]_0^{\infty} \\&= \frac{1}{a-j\omega} + \frac{1}{a+j\omega} \\&= \frac{(a+j\omega) + (a-j\omega)}{(a-j\omega)(a+j\omega)} \\&= \frac{2a}{a^2 + \omega^2}\end{aligned}$$

Transformada do Degrau Unitário

- Determine $\mathcal{F}\{u(t)\}$.

Abordagem: Considere $u(t) = \lim_{a \rightarrow 0} e^{-at} u(t)$

Como $e^{-at} u(t) \Leftrightarrow \frac{1}{a+j\omega}$, podemos escrever:

$$\frac{1}{a+j\omega} = \frac{a}{a^2 + \omega^2} - j \frac{\omega}{a^2 + \omega^2}$$

Quando $a \rightarrow 0$:

- $\frac{a}{a^2 + \omega^2} \rightarrow \pi \delta(\omega)$ (área = $\pi \forall a$, concentrada em $\omega = 0$)
- $\frac{\omega}{a^2 + \omega^2} \rightarrow \frac{1}{\omega}$ (função ímpar)

$$u(t) \Leftrightarrow \pi \delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}$$

Transformada do Degrau Unitário

Abordagem: Considere $u(t) = \lim_{a \rightarrow 0} e^{-at} u(t)$

Como $e^{-at} u(t) \Leftrightarrow \frac{1}{a+j\omega}$, quando $a \rightarrow 0$:

$$u(t) \Leftrightarrow \pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}$$

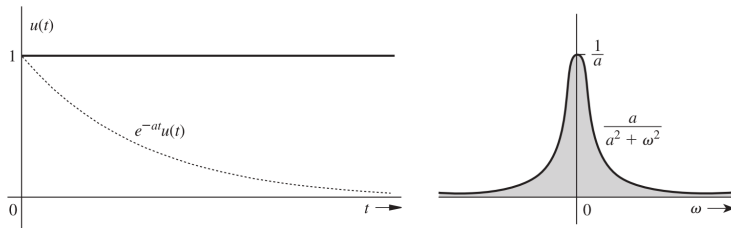
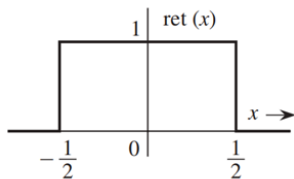


Figura: Transformada de Fourier da função degrau. Fonte: Lathi, 2006.

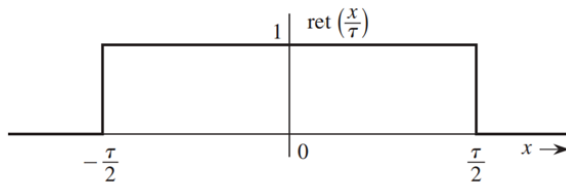
Função Pulso Retangular

- Considere a função pulso ou porta unitária (em inglês, *gate*):

$$\text{ret}(x) = \begin{cases} 0, & |x| > 1/2 \\ 1/2, & |x| = 1/2 \\ 1, & |x| < 1/2 \end{cases}$$



(a)



(b)

Figura: Função $\text{ret}(x)$ e $\text{ret}\left(\frac{x}{\tau}\right)$. Fonte: Lathi, 2000.

Pulso Retangular

Determine a Transformada de Fourier do pulso:

$$x(t) = A \operatorname{ret}\left(\frac{t}{\tau}\right)$$

Solução:

$$\begin{aligned} X(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt = \int_{-\tau/2}^{\tau/2} A e^{-j\omega t} dt \\ &= A \left[\frac{e^{-j\omega t}}{-j\omega} \right]_{-\tau/2}^{\tau/2} = A \frac{e^{-j\omega\tau/2} - e^{j\omega\tau/2}}{-j\omega} \\ &= A \frac{-2j \operatorname{sen}(\omega\tau/2)}{-j\omega} = A\tau \frac{\operatorname{sen}(\omega\tau/2)}{\omega\tau/2} \end{aligned}$$

$$X(\omega) = A\tau \operatorname{sinc}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)$$

(18)

Função Sinc

- Função sinc¹:

$$\text{sinc}(x) = \frac{\text{sen}(x)}{x}$$

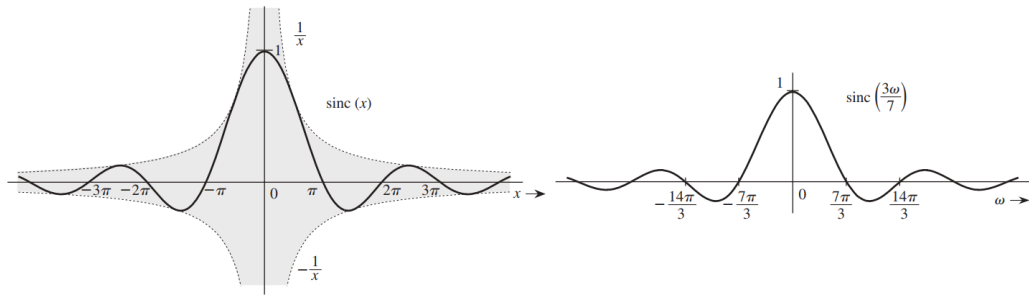


Figura: Função $\text{sinc}(x)$. Fonte: Lathi, 2000.

¹Na literatura, pode-se encontrar também $\text{sinc}(x) = \frac{\text{sen}(\pi x)}{\pi x}$

Pulso Retangular

$$X(\omega) = \tau \operatorname{sinc}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)$$

Características:

- $X(0) = \tau$ (máximo no centro)
- Primeiros zeros em $\omega = \pm \frac{2\pi}{\tau}$
- Lóbulo principal contém a maior parte da energia

↪ **largura de banda** aproximada é $2\pi/\tau$ rad/s ou $1/\tau$ Hz (considera-se apenas $\omega > 0$)

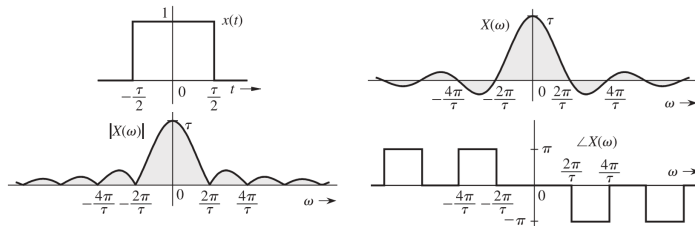


Figura: Pulso retangular e seu espectro. Fonte: Lathi, 2000.

Visualização com MATLAB/Octave

```
1  % Parâmetros
2  A = 1; tau = 2;
3  t = linspace(-3*tau, 3*tau, 1000);
4  omega = linspace(-4*pi/tau, 4*pi/tau, 1000);
5
6  % Sinal no tempo
7  x = A * (abs(t) <= tau/2);
8
9  % Transformada de Fourier
10 X = A*tau * sinc(omega*tau/(2*pi));
11
12 % Gráficos
13 figure;
14 subplot(2,1,1); plot(t, x, 'LineWidth', 2);
15 title('Pulso Retangular x(t)');
16 xlabel('t (s)'); ylabel('Amplitude');
17 grid on; axis([-3*tau 3*tau -0.2 1.2*A]);
18
19 subplot(2,1,2); plot(omega, X, 'LineWidth', 2);
20 title('Espectro X(\omega)');
21 xlabel('\omega (rad/s)'); ylabel('X(\omega)');
22 grid on;
```

Listing 2: Transformada de Fourier de $x(t)$

Quando a Transformada de Fourier Existe?

Questão: Nem todos os sinais possuem Transformada de Fourier!

Condição Suficiente: Energia Finita

Se $x(t)$ possui **energia finita**: $\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt < \infty$ então $X(\omega)$ existe e é finita.

Exemplos:

- ✓ $e^{-at}u(t)$ com $a > 0$ (exponencial decrescente)
- ✓ Pulsos de duração finita
- ✗ $e^{at}u(t)$ com $a > 0$ (exponencial crescente)
- ✗ $u(t)$ (requer tratamento especial com impulsos)

Critério alternativo para convergência:

A Transformada de Fourier $X(\omega)$ de $x(t)$ converge se:

- 1 $x(t)$ é absolutamente integrável: $\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)| dt < \infty$
- 2 $x(t)$ possui um número finito de máximos e mínimos em qualquer intervalo finito
- 3 $x(t)$ possui um número finito de descontinuidades finitas em qualquer intervalo finito

Convergência

Nos pontos de descontinuidade, a integral de Fourier converge para a **média** dos valores à esquerda e à direita.

Avaliação Física: Espectro como Densidade

Para sinais periódicos:

- Espectro discreto com componentes de amplitude finita D_n
- D_n representa a amplitude da componente em $n\omega_0$

Para sinais não periódicos:

- Espectro contínuo
- Amplitude de qualquer componente individual é **zero**!
- $X(\omega)$ é a **densidade espectral** por unidade de largura de banda
- A contribuição das componentes em $[\omega, \omega + d\omega]$ é: $\frac{1}{2\pi} X(\omega) d\omega = X(\omega) df$ onde $df = \frac{d\omega}{2\pi}$ é a largura de banda em Hz

Conclusão

$X(\omega)$ **não** é a amplitude em ω , mas sim a **densidade** de amplitude por Hz.

Exercício: Relação entre Série e Transformada

Considere um trem de pulsos periódico com período T_0 e largura de pulso τ .

Tarefas:

- 1 Determine os coeficientes da Série de Fourier D_n
- 2 Determine a Transformada de Fourier de um único pulso $x(t)$
- 3 Verifique que $D_n = \frac{1}{T_0} X(n\omega_0)$
- 4 Plote o espectro para diferentes valores de T_0 e observe a transição

Objetivo: Visualizar na prática a passagem do espectro discreto para contínuo.

Exercício: Código MATLAB/Octave

```
1 % Parâmetros
2 tau = 1; A = 1;
3 T0_values = [4*tau, 8*tau, 16*tau, 32*tau];
4
5 figure;
6 for i = 1:4
7     T0 = T0_values(i);
8     omega0 = 2*pi/T0;
9
10    % Coeficientes da série de Fourier
11    n = -20:20;
12    Dn = (A*tau/T0) * sinc(n*omega0*tau/(2*pi));
13
14    % Transformada de Fourier do pulso único
15    omega = linspace(-4*pi/tau, 4*pi/tau, 1000);
16    X = A*tau * sinc(omega*tau/(2*pi));
17
18    subplot(2,2,i);
19    plot(omega, X/T0, 'b-'); hold on;
20    stem(n*omega0, Dn, 'r', 'filled');
21    title(['T_0 = ' num2str(T0/tau) '\tau']);
22    xlabel('\omega (rad/s)'); ylabel('Espectro');
23    legend('X(\omega)/T_0', 'D_n'); grid on;
24 end
```

Listing 3: Transformada de Fourier do pulso

Aplicações da Transformada de Fourier

A Transformada de Fourier é fundamental em diversas áreas:

Processamento de Sinais:

- Análise espectral
- Filtragem
- Modulação
- Compressão de dados

Comunicações:

- Análise de canais
- Design de sistemas
- Multiplexação

Sistemas de Controle:

- Resposta em frequência
- Análise de estabilidade
- Projeto de controladores

Outras Áreas:

- Processamento de imagens
- Acústica
- Óptica
- Análise de vibrações

Conceitos-Chave para Memorizar

- 1 **Transição Fundamental:** Sinal Periódico $\xrightarrow{T_0 \rightarrow \infty}$ Sinal Não Periódico
Série de Fourier $\xrightarrow{T_0 \rightarrow \infty}$ Transformada de Fourier Espectro Discreto $\xrightarrow{T_0 \rightarrow \infty}$ Espectro Contínuo
- 2 **Relação entre coeficientes:** $D_n = \frac{1}{T_0} X(n\omega_0)$
- 3 **$X(\omega)$ é densidade espectral, não amplitude!**
- 4 **Da soma à integral:** $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \xrightarrow{\Delta\omega \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty}$

Par de Transformadas de Fourier

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt \quad (\text{Direta})$$

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad (\text{Inversa})$$

Transformadas Básicas

$$e^{-at} u(t) \Longleftrightarrow \frac{1}{a + j\omega}, \quad a > 0$$

$$e^{-a|t|} \Longleftrightarrow \frac{2a}{a^2 + \omega^2}, \quad a > 0$$

$$\text{rect}_{\tau}(t) \Longleftrightarrow \tau \text{sinc}\left(\frac{\omega\tau}{2\pi}\right)$$

Para esta aula:

- **Lathi, Capítulo 7, Seção 7.1** (páginas 599-606)
 - Representação de Sinais não Periódicos pela Integral de Fourier
 - Avaliação Física da Transformada de Fourier

Material complementar:

- **Oppenheim, Capítulo 4** - Fourier Transform (abordagem alternativa)
- **Lathi, Capítulo 6** - Revisão da Série de Fourier (se necessário)

Vídeos recomendados:

- "But what is the Fourier Transform? A visual introduction- 3Blue1Brown
- MIT OpenCourseWare - Signals and Systems (Aulas sobre Fourier)

1. Por que $X(\omega)$ tem unidade diferente de $x(t)$?

Porque $X(\omega)$ é uma **densidade**. Se $x(t)$ tem unidade [V], então $X(\omega)$ tem [V·s] ou [V/Hz].

2. Por que aparece $\frac{1}{2\pi}$ na transformada inversa?

Convenção de normalização. Alguns autores usam $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ em ambas as equações.

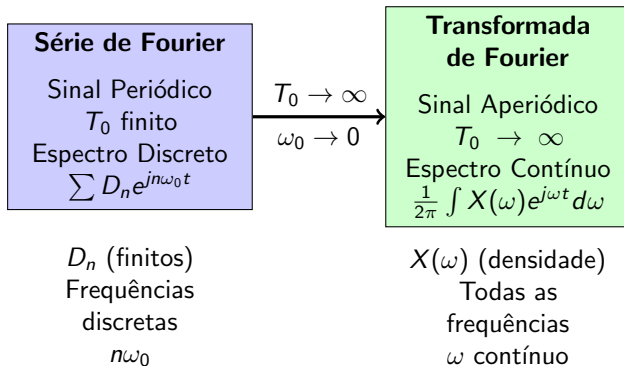
3. Quando usar Transformada de Fourier vs. Laplace?

- **Fourier:** Análise espectral, resposta em frequência, sinais de energia
- **Laplace:** Análise de sistemas, condições iniciais, sinais causais

4. O espectro de um sinal real é sempre simétrico?

Sim! Para $x(t)$ real: $X(-\omega) = X^*(\omega)$ (simetria Hermitiana).

Resumo: A Grande Transição



"A Transformada de Fourier nos permite ver sinais de uma perspectiva completamente diferente: do domínio do tempo para o domínio da frequência."

O que aprendemos hoje:

- Sinais aperiódicos podem ser decompostos em componentes de frequência
- O espectro torna-se contínuo (densidade espectral)
- A transformada é uma ferramenta poderosa para análise de sinais e sistemas
- A base matemática está na extensão natural da Série de Fourier



Lathi, B. P. (2000). *Sinais e Sistemas Lineares* (2ª ed.). Porto Alegre: Bookman. Capítulo 7, Seção 7.1, páginas 599-606.



Oppenheim, A. V., Willsky, A. S., & Nawab, S. H. (1997). *Signals & Systems* (2nd ed.). Upper Saddle River: Prentice Hall. Capítulo 4.



Haykin, S., & Van Veen, B. (2001). *Sinais e Sistemas*. Porto Alegre: Bookman.