

ENE0067 – Sinais e Sistemas em Tempo Contínuo

Transformada de Fourier (parte 2)

Prof. Eduardo Stockler Tognetti

Departamento de Engenharia Elétrica
Universidade de Brasília – UnB



Sumário da Aula

- 1 Revisão da Aula Anterior
- 2 Propriedades da Transformada de Fourier
- 3 Tabelas de Pares de Transformadas e Propriedades
- 4 Transmissão de Sinal
- 5 Filtros
- 6 Energia do Sinal
- 7 Conexão com a Transformada de Laplace

Revisão: Transformada de Fourier

Na aula anterior (Seção 7.1), estudamos a **representação de sinais não periódicos** pela integral de Fourier.

Par de Transformadas de Fourier:

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt \quad (\text{Transformada Direta}) \quad (1)$$

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad (\text{Transformada Inversa}) \quad (2)$$

Notação de $\mathcal{F}\{x(t)\} = X(\omega)$ e $\mathcal{F}^{-1}\{X(\omega)\} = x(t)$:

$$x(t) \Leftrightarrow X(\omega)$$

Hoje: Transformadas de funções úteis, propriedades, transmissão de sinais e filtros.

Propriedades da Transformada de Fourier

Importância das Propriedades

As propriedades da transformada de Fourier são fundamentais para:

- Determinar transformadas de funções complexas
- Simplificar cálculos
- Entender relações entre domínio do tempo e frequência
- Aplicações em processamento de sinais

Propriedades que estudaremos:

- 1 Linearidade
- 2 Escalamento
- 3 Dualidade
- 4 Deslocamento (tempo e frequência)
- 5 Diferenciação e integração
- 6 Convolução

Propriedades Básicas da Transformada de Fourier

Linearidade

Se $x_1(t) \iff X_1(\omega)$ e $x_2(t) \iff X_2(\omega)$, então:

$$ax_1(t) + bx_2(t) \iff aX_1(\omega) + bX_2(\omega)$$

Propriedade do Conjugado

$$x^*(t) \iff X^*(-\omega)$$

Simetria Hermitiana (para $x(t)$ real)

$$X(-\omega) = X^*(\omega)$$

Consequências:

- $|X(\omega)|$ é uma função **par**: $|X(-\omega)| = |X(\omega)|$
- $\angle X(\omega)$ é uma função **ímpar**: $\angle X(-\omega) = -\angle X(\omega)$

Propriedade de Escalamento

Propriedade de Escalamento no Tempo:

Se $x(t) \Leftrightarrow X(\omega)$, então:

$$x(at) \Leftrightarrow \frac{1}{|a|} X\left(\frac{\omega}{a}\right)$$

Interpretação:

- Compressão no tempo ($|a| > 1$) $\Rightarrow$ expansão na frequência
- Expansão no tempo ($|a| < 1$) $\Rightarrow$ compressão na frequência
- **Princípio fundamental:** Duração e **largura de banda** são inversamente proporcionais

Caso especial ($a = -1$):

$$x(-t) \Leftrightarrow X(-\omega)$$

Reversão temporal $\Leftrightarrow$ Reversão na frequência

Propriedade de Escalamento

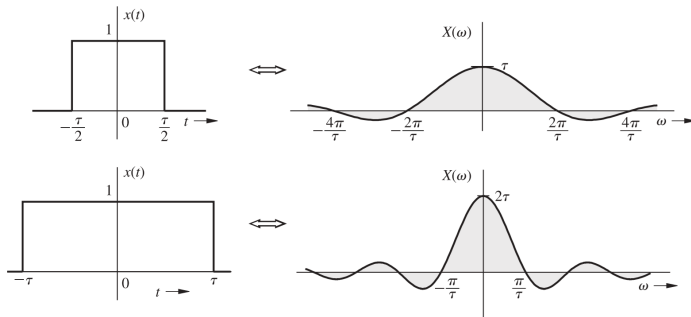


Figura: Ilustração da propriedade de escalamento no tempo. Fonte: Lathi, 2006.

Reciprocidade entre duração do sinal e largura de banda

A propriedade de escala implica que, se $x(t)$ for mais largo, seu espectro será mais estreito, e vice-versa. **Duplicar a duração do sinal reduz pela metade sua largura de banda, e vice-versa.** Isso sugere que a largura de banda de um sinal é inversamente proporcional à duração ou largura do sinal.

Dualidade Tempo-Frequência

Propriedade da Dualidade:

Se $x(t) \Leftrightarrow X(\omega)$, então:

$$X(t) \Leftrightarrow 2\pi x(-\omega)$$

Interpretação: As equações direta e inversa são quase simétricas:

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt$$
$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

Diferenças: fator 2π e sinal do expoente.

Aplicação: Se conhecemos um par, automaticamente conhecemos o dual!

Exemplo da Dualidade

- Aplicar dualidade ao pulso retangular.

Sabemos que: $\text{ret}\left(\frac{t}{\tau}\right) \Leftrightarrow \tau \text{sinc}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)$

Pela dualidade: $\tau \text{sinc}\left(\frac{t\tau}{2}\right) \Leftrightarrow 2\pi \text{ret}\left(\frac{-\omega}{\tau}\right) = 2\pi \text{ret}\left(\frac{\omega}{\tau}\right)$

$$\text{sinc}(\pi Bt) \Leftrightarrow \frac{1}{B} \text{ret}\left(\frac{\omega}{2\pi B}\right)$$

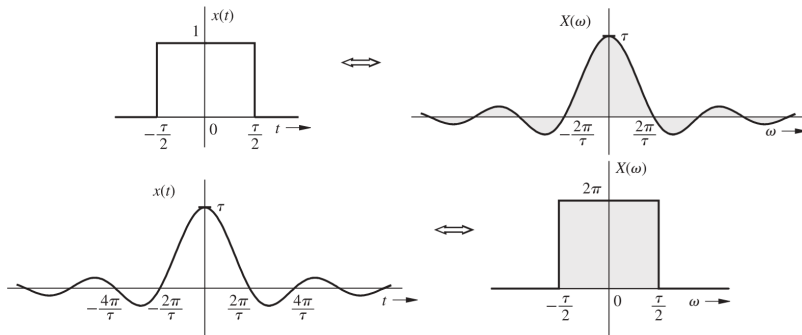


Figura: Ilustração da dualidade. Fonte: Lathi, 2006.

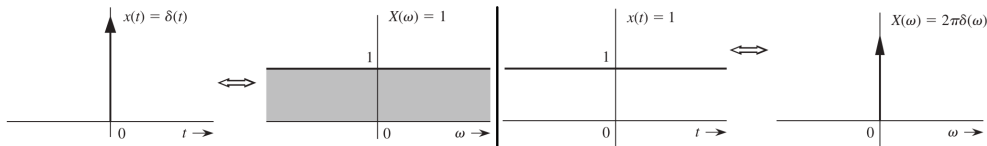
Transformada do Impulso e Constante

Impulso unitário:

$$\mathcal{F}\{\delta(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)e^{-j\omega t} dt = 1 \quad \boxed{\delta(t) \Leftrightarrow 1}$$

$$\mathcal{F}^{-1}\{\delta(\omega)\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\omega)e^{-j\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \quad \boxed{1 \Leftrightarrow 2\pi\delta(\omega)}$$

↪ pode ser obtido por meio da propriedade de dualidade.



Interpretação: Um sinal constante no tempo possui toda sua energia concentrada em $\omega = 0$ (componente DC).

Exercício: Dualidade

Exercício: Dado que a transformada de Fourier de $e^{-a|t|}$ é: $e^{-a|t|} \Leftrightarrow \frac{2a}{a^2 + \omega^2}$

Use a propriedade da dualidade para determinar a transformada de Fourier de: $x(t) = \frac{2a}{a^2 + t^2}$

Solução: Aplicando a dualidade com $x(t) = e^{-a|t|}$ e $X(\omega) = \frac{2a}{a^2 + \omega^2}$:

$$X(t) = \frac{2a}{a^2 + t^2} \Leftrightarrow 2\pi x(-\omega) = 2\pi e^{-a|-\omega|} = 2\pi e^{-a|\omega|}$$

Resposta: $\boxed{\frac{2a}{a^2 + t^2} \Leftrightarrow 2\pi e^{-a|\omega|}}$

Exemplo: Transformada da Função Sinal

- Determine $\mathcal{F}\{\text{sgn}(t)\}$, onde

$$\text{sgn}(t) = \begin{cases} 1, & t > 0 \\ 0, & t = 0 \\ -1, & t < 0 \end{cases}$$

Solução: Observe que:

- $\text{sgn}(t) = u(t) - u(-t) = 2u(t) - 1$
- Ou considere $\text{sgn}(t) = \lim_{a \rightarrow 0} [e^{-at}u(t) - e^{at}u(-t)]$

Usando propriedades da transformada:

$$\mathcal{F}\{\text{sgn}(t)\} = 2\mathcal{F}\{u(t)\} - \mathcal{F}\{1\} = 2\left(\pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}\right) - 2\pi\delta(\omega) = \frac{2}{j\omega}$$

$$\boxed{\text{sgn}(t) \Leftrightarrow \frac{2}{j\omega}}$$

Deslocamento no Tempo

Propriedade de Deslocamento no Tempo:

Se $x(t) \Leftrightarrow X(\omega)$, então:

$$x(t - t_0) \Leftrightarrow X(\omega)e^{-j\omega t_0}$$

Interpretação:

- O **espectro de amplitude** não muda: $|X(\omega)|$ permanece igual
- O **espectro de fase** ganha um termo linear: $\angle X(\omega) - \omega t_0$
- Atraso no tempo $\Rightarrow$ Deslocamento de fase linear

Significado físico: Para obter o mesmo atraso t_0 , componentes de frequência mais alta precisam de maior deslocamento de fase:

$$\text{Deslocamento de fase} = \omega t_0$$

Deslocamento na Frequência

Propriedade de Deslocamento na Frequência:

Se $x(t) \Leftrightarrow X(\omega)$, então:

$$x(t)e^{j\omega_0 t} \Leftrightarrow X(\omega - \omega_0)$$

Interpretação:

- Multiplicação por exponencial complexa no tempo desloca o espectro
- Exemplo: **Exponencial complexa:** $e^{j\omega_0 t}$

Usando a dualidade e deslocamento na frequência:

$$\mathcal{F}\{1\} = 2\pi\delta(\omega) \Rightarrow \mathcal{F}\{1 \cdot e^{j\omega_0 t}\} = 2\pi\delta(\omega - \omega_0)$$

$$e^{j\omega_0 t} \Leftrightarrow 2\pi\delta(\omega - \omega_0)$$

Transformada de Exponenciais Complexas

Senóides:

$$\cos(\omega_0 t) = \frac{e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}}{2}$$

$$\cos(\omega_0 t) \Leftrightarrow \pi[\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)]$$

$$\text{sen}(\omega_0 t) = \frac{e^{j\omega_0 t} - e^{-j\omega_0 t}}{2j}$$

$$\text{sen}(\omega_0 t) \Leftrightarrow j\pi[\delta(\omega + \omega_0) - \delta(\omega - \omega_0)]$$

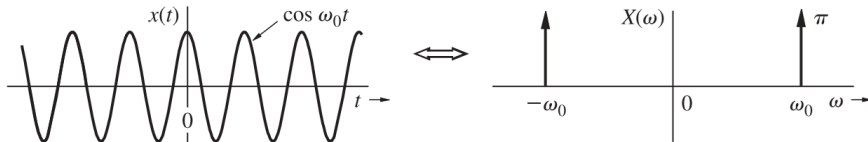


Figura: Sinal cosseno e seu espectro de Fourier. Fonte: Lathi, 2006.

Transformada e Série de Sinal Senoidal

Senóides:

$$\cos(\omega_0 t) = \frac{e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}}{2}$$

$$\cos(\omega_0 t) \Leftrightarrow \pi[\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)]$$

$$\cos(\omega_0 t) = D_1 e^{j\omega_0 t} + D_{-1} e^{-j\omega_0 t}$$

$$D_1 = D_{-1} = \frac{1}{2}$$

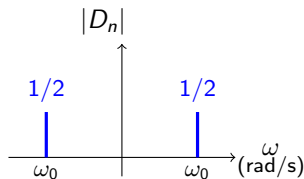
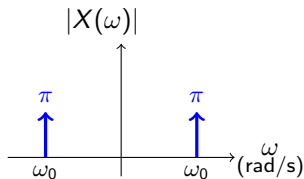


Figura: Sinal cosseno e seu espectro de Fourier dada pela transformada (esquerda) e pela série (direita) de Fourier.

Deslocamento na Frequência: modulação em amplitude

- Seja o sinal $x(t) = \cos(\omega_1 t)$ modulado da seguinte forma:

$$y(t) = x(t) \cos(\omega_0 t) = \frac{(e^{j\omega_1 t} + e^{-j\omega_1 t})}{2} \frac{(e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t})}{2}$$
$$= \frac{1}{2} \left(\frac{e^{j(\omega_0 + \omega_1)t} + e^{-j(\omega_0 + \omega_1)t}}{2} + \frac{e^{j(\omega_0 - \omega_1)t} + e^{-j(\omega_0 - \omega_1)t}}{2} \right) = \frac{1}{2} \cos((\omega_0 + \omega_1)t) + \frac{1}{2} \cos((\omega_0 - \omega_1)t)$$

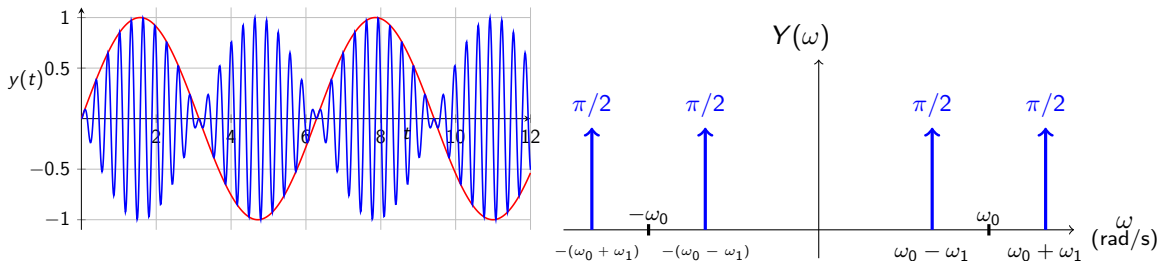


Figura: Esquerda: sinal $x(t) = \cos(\omega_1 t)$, $\omega_1 = 1$ rad/s (vermelho), e sinal modulado $y(t) = x(t) \cos(\omega_0 t)$, $\omega_0 = 20$ rad/s (azul). Direita: espectro de $y(t)$, $Y(\omega)$, como sendo o espectro de $x(t)$, $X(\omega)$, deslocado em torno de ω_0 .

Deslocamento na Frequência: modulação em amplitude

Modulação com senóide:

$$x(t) \cos(\omega_0 t) = \frac{x(t)}{2} (e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}) \Rightarrow \boxed{x(t) \cos(\omega_0 t) \Leftrightarrow \frac{1}{2}[X(\omega - \omega_0) + X(\omega + \omega_0)]}$$

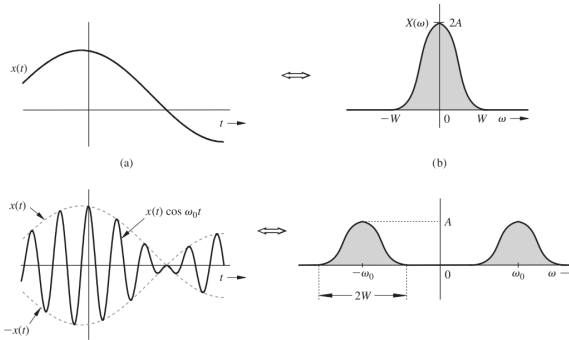


Figura: A modulação em amplitude de um sinal resulta no deslocamento espectral. O espectro é deslocado para $\pm\omega_0$. Fonte: Lathi, 2006.

Deslocamento na Frequência

Determine e trace a transformada de Fourier do sinal modulado $x(t) \cos 10t$ no qual $x(t)$ é um pulso de porta $\text{ret}(t/4)$.

Como $\text{ret}\left(\frac{t}{\tau}\right) \Leftrightarrow \tau \text{sinc}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)$,

$$x(t) \cos(10t) \Leftrightarrow \frac{1}{2} (X(\omega + 10) + X(\omega - 10)) \Rightarrow x(t) \cos(10t) \Leftrightarrow 2\text{sinc}(\omega + 10) + 2\text{sinc}(\omega - 10)$$

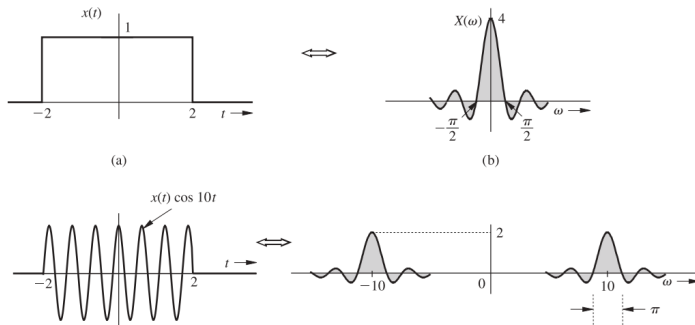


Figura: Um exemplo de deslocamento espectral usando modulação em amplitude. Fonte: Lathi, 2006.

Propriedade de Diferenciação no Tempo

Diferenciação no Tempo:

Se $x(t) \Leftrightarrow X(\omega)$, então:

$$\frac{dx(t)}{dt} \Leftrightarrow j\omega X(\omega)$$

Generalizando para n -ésima derivada:

$$\frac{d^n x(t)}{dt^n} \Leftrightarrow (j\omega)^n X(\omega)$$

Interpretação:

- Derivação no tempo $\Leftrightarrow$ Multiplicação por $j\omega$ na frequência
- Componentes de alta frequência são amplificadas
- Útil para sinais definidos por partes

Dual - Diferenciação na Frequência:

$$(-jt)^n x(t) \Leftrightarrow \frac{d^n X(\omega)}{d\omega^n}$$

Propriedade de Convolução

Convolução no Tempo:

Se $x_1(t) \Leftrightarrow X_1(\omega)$ e $x_2(t) \Leftrightarrow X_2(\omega)$, então:

$$x_1(t) * x_2(t) \Leftrightarrow X_1(\omega)X_2(\omega)$$

Convolução na Frequência:

$$x_1(t)x_2(t) \Leftrightarrow \frac{1}{2\pi}X_1(\omega) * X_2(\omega)$$

Interpretação:

- Convolução no tempo $\Leftrightarrow$ Multiplicação na frequência
- Multiplicação no tempo $\Leftrightarrow$ Convolução na frequência
- Base da análise de sistemas LIT

Propriedade de Integração no Tempo

- Integrar é convoluir com o degrau

$$x(t) * u(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)u(t-\tau)d\tau = \int_{-\infty}^t x(\tau)d\tau$$

Integração no Tempo:

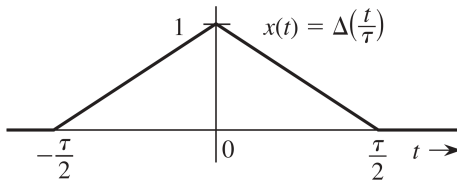
Da propriedade de convolução no tempo:

$$x(t) * u(t) = \int_{-\infty}^t x(\tau)d\tau \iff X(\omega) \left[\frac{1}{j\omega} + \pi\delta(\omega) \right] = \frac{X(\omega)}{j\omega} + \pi X(0)\delta(\omega)$$

Exercício 1. Utilize a propriedade de convolução no tempo para mostrar que

$$e^{-at} u(t) * e^{-bt} u(t) = \frac{1}{b-a} [e^{-at} - e^{-bt}] u(t)$$

Exercício 2. Utilize a propriedade de diferenciação no tempo para obter a transformada de Fourier do pulso triangular $\Delta(t/\tau)$.



Exercício 2.

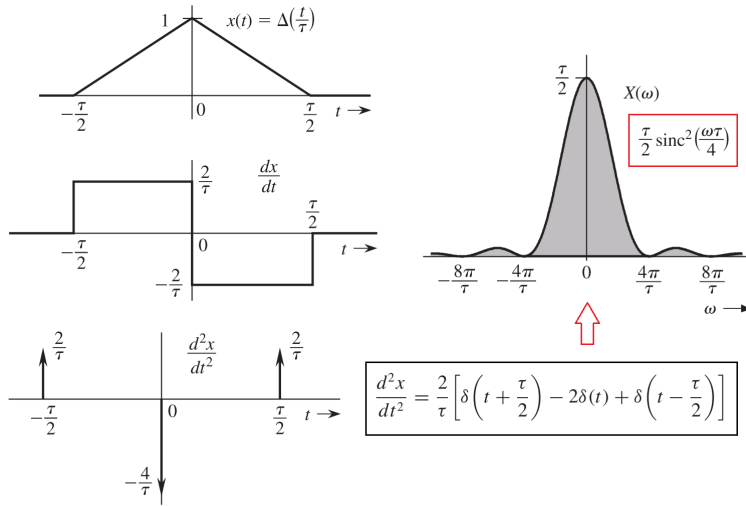


Figura: Uso da propriedade da diferenciação para resolver o Exercício 2.

Exercício 2.

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{2}{\tau} \left[\delta\left(t + \frac{\tau}{2}\right) - 2\delta(t) + \delta\left(t - \frac{\tau}{2}\right) \right]$$

- Propriedade de diferenciação no tempo:

$$\frac{d^2x}{dt^2} \iff (j\omega)^2 X(\omega) = -\omega^2 X(\omega)$$

- Propriedade de deslocamento no tempo:

$$\delta(t - t_0) \iff e^{-j\omega t_0}$$

- Obtendo a transformada de Fourier:

$$-\omega^2 X(\omega) = \frac{2}{\tau} \left[e^{j(\omega\tau/2)} - 2 + e^{-j(\omega\tau/2)} \right] = \frac{4}{\tau} \left(\cos \frac{\omega\tau}{2} - 1 \right) = -\frac{8}{\tau} \text{sen}^2 \left(\frac{\omega\tau}{4} \right)$$

e, portanto,

$$\mathcal{F} \{ \Delta(t/\tau) \} = X(\omega) = \frac{8}{\omega^2 \tau} \text{sen}^2 \left(\frac{\omega\tau}{4} \right) = \frac{\tau}{2} \left[\frac{\text{sen}(\omega\tau/4)}{\omega\tau/4} \right]^2 = \frac{\tau}{2} \text{sinc}^2 \left(\frac{\omega\tau}{4} \right)$$

Pares de Transformadas de Fourier

No.	$x(t)$	$X(\omega)$	
1	$e^{-at}u(t)$	$\frac{1}{a + j\omega}$	$a > 0$
2	$e^{at}u(-t)$	$\frac{1}{a - j\omega}$	$a > 0$
3	$e^{-a t }$	$\frac{2a}{a^2 + \omega^2}$	$a > 0$
4	$te^{-at}u(t)$	$\frac{1}{(a + j\omega)^2}$	$a > 0$
5	$t^n e^{-at}u(t)$	$\frac{n!}{(a + j\omega)^{n+1}}$	$a > 0$
6	$\delta(t)$	1	
7	1	$2\pi\delta(\omega)$	
8	$e^{j\omega_0 t}$	$2\pi\delta(\omega - \omega_0)$	
9	$\cos \omega_0 t$	$\pi[\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)]$	
10	$\text{sen } \omega_0 t$	$j\pi[\delta(\omega + \omega_0) - \delta(\omega - \omega_0)]$	
11	$u(t)$	$\pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}$	

Tabela de Propriedades

Propriedade	Par de Transformadas
Linearidade	$a_1x_1(t) + a_2x_2(t) \Leftrightarrow a_1X_1(\omega) + a_2X_2(\omega)$
Dualidade	$X(t) \Leftrightarrow 2\pi x(-\omega)$
Escalamento	$x(at) \Leftrightarrow \frac{1}{ a } X(\omega/a)$
Deslocamento tempo	$x(t - t_0) \Leftrightarrow X(\omega)e^{-j\omega t_0}$
Deslocamento freq.	$x(t)e^{j\omega_0 t} \Leftrightarrow X(\omega - \omega_0)$
Diferenciação tempo	$\frac{d^n x}{dt^n} \Leftrightarrow (j\omega)^n X(\omega)$
Integração tempo	$\int_{-\infty}^t x(u)du \Leftrightarrow \frac{X(\omega)}{j\omega} + \pi X(0)\delta(\omega)$
Convolução tempo	$x_1(t) * x_2(t) \Leftrightarrow X_1(\omega)X_2(\omega)$
Convolução frequência	$x_1(t)x_2(t) \Leftrightarrow \frac{1}{2\pi} X_1(\omega) * X_2(\omega)$

Transmissão de Sinais através de sistemas LCIT

Para um sistema LCIT com resposta ao impulso $h(t)$:

$$y(t) = x(t) * h(t)$$

Aplicando a transformada de Fourier e a propriedade de convolução:

$$\boxed{Y(\omega) = X(\omega)H(\omega)} \Rightarrow y(t) = \mathcal{F}^{-1}\{X(\omega)H(\omega)\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)H(\omega)e^{j\omega t} d\omega$$

onde $H(\omega) = \mathcal{F}\{h(t)\}$ é a **resposta em frequência** do sistema.

- Essa relação não é válida se o sistema for **assintoticamente instável**, pois $h(t)$ não possui transformada de Fourier
- Se aplica a sistemas **BIBO estáveis** e boa parte dos sistemas **marginalmente estáveis**
- $\mathcal{F}\{x(t)\}$ deve existir (exclui exponenciais crescentes)
- Transformada de Fourier restritivo para análise de sistemas $\rightsquigarrow$ transformada de Laplace mais adequada

Resposta em frequência de sistemas LCIT

- Assumindo que a RDC de $H(s)$ contém o eixo $j\omega$, tem-se $H(\omega) = H(j\omega)$
- Resposta em frequência** do sistema: $H(\omega) = \mathcal{F}\{h(t)\}$

$$H(\omega) = \frac{Y(\omega)}{X(\omega)} = |H(\omega)|e^{j\theta_H(\omega)}, \quad \theta_H(\omega) = \angle H(\omega)$$

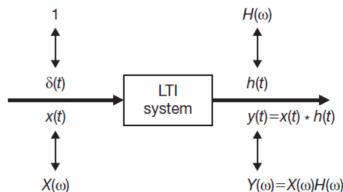


Figura: Relação entre entradas e saídas num sistema LCIT.

$$|Y(\omega)|e^{j\angle Y(\omega)} = |X(\omega)||H(\omega)|e^{j(\angle X(\omega) + \angle H(\omega))} \Rightarrow \begin{cases} |Y(\omega)| = |X(\omega)||H(\omega)| \\ \angle Y(\omega) = \angle X(\omega) + \angle H(\omega) \end{cases}$$

Resposta em frequência de sistemas LCIT

- Exemplo: entrada de sistema LCTI $x(t) = e^{j\omega_0 t}$

$$X(\omega) = \mathcal{F}\{1 \cdot e^{j\omega_0 t}\} = 2\pi\delta(\omega - \omega_0)$$

- Resposta do sistema LCIT:

$$Y(\omega) = H(\omega)X(\omega) = H(\omega)2\pi\delta(\omega - \omega_0) = 2\pi H(\omega_0)\delta(\omega - \omega_0)$$

- Saída no domínio do tempo à entrada $e^{j\omega_0 t}$:

$$y(t) = H(\omega_0)e^{j\omega_0 t}$$

$e^{j\omega_0 t}$ *autofunção* e $H(\omega_0)$ *autovalor* do sistema LCIT.

- Resposta em frequência de sistemas LCIT:

$$\begin{cases} \text{Sinais periódicos:} & x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jk\omega_0 t} \Rightarrow y(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k H(k\omega_0) e^{jk\omega_0 t} \\ \text{Sinais não periódicos:} & x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) e^{j\omega t} d\omega \Rightarrow y(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) H(\omega) e^{j\omega t} d\omega \end{cases}$$

Transmissão sem distorção

● A transmissão é dita ser sem distorção se a entrada e a saída possuírem formas de onda idênticas, diferenciando por uma constante multiplicativa. Uma saída atrasada que mantém a forma de onda da entrada também é considerada como sem distorção.

Condições para transmissão sem distorção:

$$|H(\omega)| = K \quad \text{e} \quad \angle H(\omega) = -\omega t_g \quad (\text{ganho constante e fase linear})$$

Resultado:

$$Y(\omega) = X(\omega)H(\omega) = KX(\omega)e^{-j\omega t_g} \Leftrightarrow y(t) = Kx(t - t_g)$$

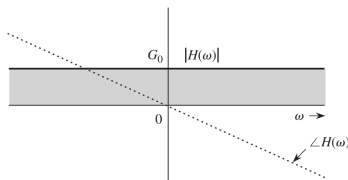


Figura: Resposta em freqüência de um sistema LCIT **ideal** para a transmissão sem distorção em que $G_0 = K$.

● Mesmo se ganho for constante, fase não linear ($t_g(\omega) = -d/d\omega \angle H(\omega)$ não constante) distorce o sinal.

Transmissão sem distorção - fase linear generalizada

● As condições de transmissão sem distorção podem ser um pouco relaxadas para sistemas passa-faixa. Para sistemas passa-baixas, as características de fase devem ser não apenas lineares dentro da faixa de interesse, mas também devem cruzar a origem. Para sistemas passa-faixa, as características de fase devem ser lineares dentro da faixa de interesse, mas não precisam passar na origem.

● Dentro da faixa de interesse: $H(\omega) = Ke^{j(\phi_0 - \omega t_g)}$

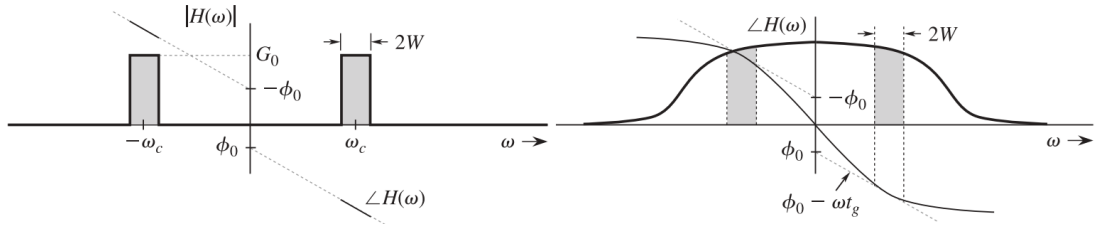


Figura: (Esquerda) Resposta em frequência de um sistema passa-faixa de largura de banda $2W$ ($x(t)$ tem largura W). (Direita) Características generalizadas de fase linear na faixa de interesse. Considera-se $G_0 = K$.

Transmissão sem distorção - fase linear generalizada

- Considere $z(t) = x(t)e^{j\omega_c t} \rightsquigarrow Z(\omega) = X(\omega - \omega_c)$

- Na faixa de interesse

$$H(\omega) = Ke^{j(\phi_0 - \omega t_g)} \quad (3)$$

↪ Resposta do sistema $H(\omega)$ dentro da faixa de ganho contante $|H(\omega)| = K$ e fase linear $\angle H(\omega) = \phi_0 - \omega t_g$:

$$Y(\omega) = H(\omega)X(\omega - \omega_c) = Ke^{j\phi_0}X(\omega - \omega_c)e^{-j\omega t_g} \Leftrightarrow y(t) = Kx(t - t_g)e^{j(\omega_c(t - t_g) + \phi_0)}$$

- Se $z(t) = x(t)\cos(\omega_c t)$, então $y(t) = Kx(t - t_g)\cos(\omega_c(t - t_g) + \phi_0)$

Conclusões:

- Saída é basicamente a entrada $z(t)$ atrasada de t_g
- Portadora ganha fase extra ϕ_0
- Envelope de saída $x(t - t_g)$ não é afetado pela fase extra ϕ_0 (informação sem distorção)
- Sistema de fase linear generalizada: precisa atender (3) apenas na frequência de interesse

Transmissão sem distorção - fase linear generalizada

- Exemplo: $z(t) = x(t) \cos(\omega_c t)$, $\omega_c = 2000\pi$ rad/s (1000 kHz).

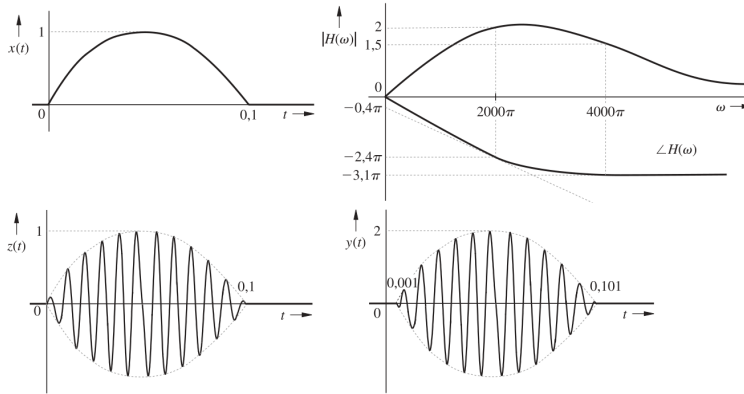


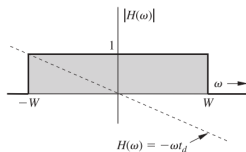
Figura: Sinais $x(t)$ de duração 0,1 s (largura de faixa ≈ 10 Hz) e $z(t)$, filtro $H(\omega)$ e sinal de saída $y(t) = 2x(t - t_g) \cos(\omega_c(t - t_g) - 0,4\pi)$, com $t_g = \frac{2,4\pi - 0,4\pi}{2000\pi} = 0,001$ s.

Filtros Ideais

Filtro passa-baixas ideal:

$$H(\omega) = \text{ret}\left(\frac{\omega}{2W}\right) e^{-j\omega t_d} \rightsquigarrow y(t) = x(t - t_d)$$

(assumindo espectro de x dentro de $[-W, W]$)



Resposta ao impulso:

$$h(t) = \mathcal{F}^{-1}\{H(\omega)\} = \frac{W}{\pi} \text{sinc}[W(t - t_d)]$$

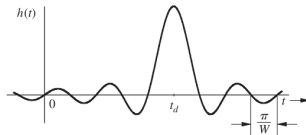


Figura: Filtro passa-baixas ideal: resposta em frequência e resposta ao impulso.

Problema

$h(t)$ é não-causal ($h(t) \neq 0, t < 0$)! Filtros ideais são fisicamente irrealizáveis.

Critério de Paley-Wiener: Filtros causais não podem ter ganho zero em faixas finitas.

Solução: $\hat{h}(t) = h(t)u(t) \rightsquigarrow$ boa aproximação do filtro ideal se t_d for suficientemente grande.

Filtros Ideais

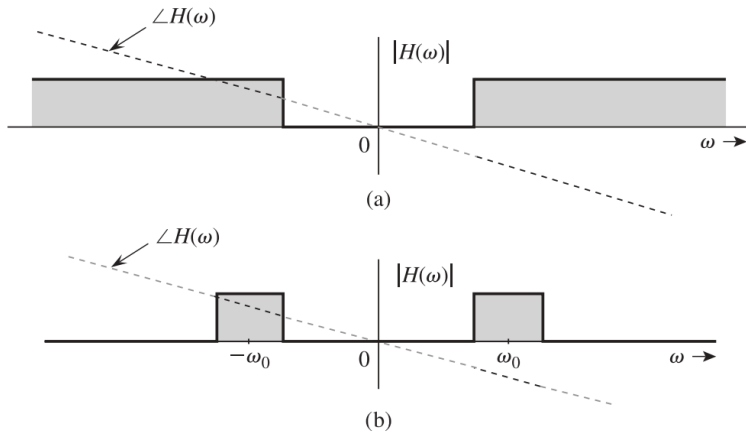


Figura: Respostas de um filtro ideal (a) passa-altas e (b) passa-faixa.

Energia do Sinal

● Energia de um sinal

$$E_x = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)x^*(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X^*(\omega)e^{-j\omega t} d\omega \right] dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)X^*(\omega) d\omega$$

Teorema de Parseval:

$$E_x = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |X(\omega)|^2 d\omega$$

Densidade espectral de energia:

$$\psi_x(\omega) = |X(\omega)|^2$$

A energia é conservada entre domínios do tempo e frequência!

Energia do Sinal

- Densidade espectral de energia de um sinal: $\Psi_x(\omega) = |X(\omega)|^2$

- Para sinais reais: $X^*(\omega) = X(-\omega)$ implica

$$E_x = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} |X(\omega)|^2 d\omega$$

- A energia contribuída pelas componentes espectrais de frequências entre ω_1 e ω_2 :

$$\Delta E_x = \frac{1}{\pi} \int_{\omega_1}^{\omega_2} |X(\omega)|^2 d\omega$$

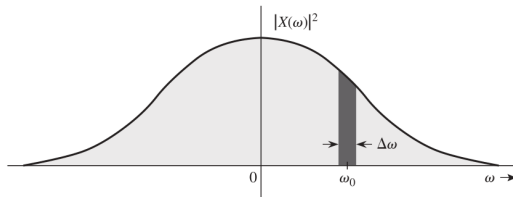


Figura: Interpretação da densidade espectral de energia de um sinal.

Energia do Sinal

- Exemplo: $x(t) = e^{-at}u(t) \rightsquigarrow X(\omega) = \frac{1}{a + j\omega}$

- Cálculo da energia

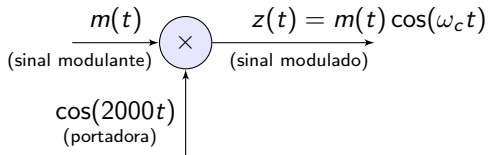
$$E_x = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)^2 dt = \frac{1}{2a}$$

$$E_x = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} |X(\omega)|^2 d\omega = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{d\omega}{\omega^2 + a^2} = \frac{1}{a\pi} \tan^{-1} \frac{\omega}{a} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{2a}$$

- Faixa $\omega \in [0, W]$ que contém 95% da energia do sinal

$$\frac{0.95}{2a} = \frac{1}{\pi} \int_0^W \frac{d\omega}{\omega^2 + a^2} = \frac{1}{\pi a} \tan^{-1} \left(\frac{\omega}{a} \right) \Big|_0^W = \frac{1}{\pi a} \tan^{-1} \left(\frac{W}{a} \right) \Rightarrow W = 12,706a \text{ rad/s}$$

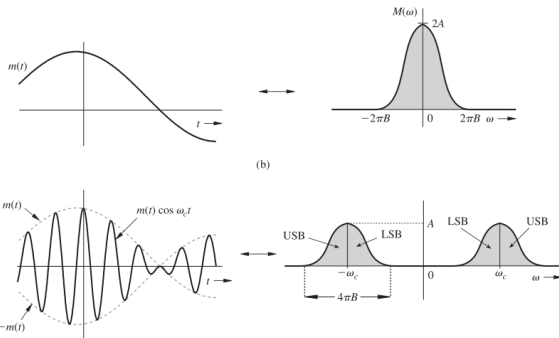
Modulação em amplitude



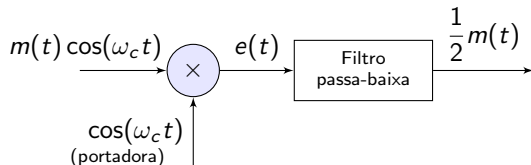
$$m(t) \Leftrightarrow M(\omega)$$

$$m(t) \cos(\omega_c t) \Leftrightarrow \frac{1}{2} [M(\omega + \omega_c) + M(\omega - \omega_c)]$$

Figura: Modulação em amplitude.



Demodulação



$$\begin{aligned} e(t) &= m(t) \cos^2(\omega_c t) \\ &= \frac{1}{2}[m(t) + m(t) \cos(2\omega_c t)] \end{aligned}$$

Figura: Esquema de demodulação.

$$e(t) \Leftrightarrow E(\omega) = \frac{1}{2}M(\omega) + \frac{1}{4}[M(\omega + 2\omega_c) + M(\omega - 2\omega_c)]$$

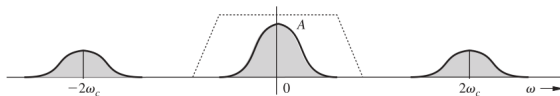


Figura: Espectro de $E(\omega)$ e do filtro passa-baixa (linha pontilhada).

- Saída do filtro passa-baixa

$$Y(\omega) = \frac{1}{2}M(\omega) \Leftrightarrow y(t) = \frac{1}{2}m(t)$$

Conexão com a Transformada de Laplace

Transformada de Laplace bilateral:

$$X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-st} dt$$

Fazendo $s = j\omega$:

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t} dt = X(\omega)$$

Condição Importante

$X(j\omega) = X(\omega)$ **somente** se a Região de Convergência (RDC) de $X(s)$ **incluir o eixo** $j\omega$.

Exemplos:

- $e^{-at}u(t)$: RDC é $\text{Re}(s) > -a$. Se $a > 0$, eixo $j\omega$ está na RDC.
- $e^{at}u(t)$ ($a > 0$): RDC é $\text{Re}(s) > a$. Eixo $j\omega$ **não** está na RDC!

Quando $X(j\omega) \neq X(\omega)$

Exemplo: $u(t)$

Transformada de Laplace:

$$\mathcal{L}\{u(t)\} = \frac{1}{s}$$

Substituindo $s = j\omega$:

$$\left. \frac{1}{s} \right|_{s=j\omega} = \frac{1}{j\omega}$$

Mas a transformada de Fourier é:

$$\mathcal{F}\{u(t)\} = \pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}$$

Por quê? A RDC de $\mathcal{L}\{u(t)\}$ é $\text{Re}(s) > 0$, que **exclui** o eixo $j\omega$ ($\text{Re}(j\omega) = 0$).

O termo $\pi\delta(\omega)$ surge da natureza da convergência na borda da RDC.

Conceitos principais:

- 1 Propriedades fundamentais: dualidade, escalamento, deslocamentos
- 2 Transmissão sem distorção: ganho constante e fase linear
- 3 Filtros ideais são irrealizáveis (não-causais)
- 4 Teorema de Parseval: conservação de energia
- 5 Transformadas de funções úteis e conexão com Laplace

Referências Bibliográficas

Livro-texto principal:

- Lathi, B. *Sinais e Sistemas Lineares*. 2ª Ed. Bookman, 2006.
Capítulo 7, Seções 7.2 a 7.6, páginas 604-642.

Referência complementar:

- Oppenheim, A. V.; Willsky, A. S.; Nawab, S. H. *Signals & Systems*. 2nd Edition. Upper Saddle River: Prentice Hall, 1997.

Recursos online:

- MIT OpenCourseWare - Signals and Systems (6.003)
- MATLAB/Octave: Documentação de Signal Processing Toolbox
- Wolfram MathWorld: Fourier Transform

Software:

- MATLAB ou Octave
- Python: NumPy, SciPy, Matplotlib