

# L'odométrie du robot Omni

Geovany Araújo Borges

January 19, 2001

## Abstract

Ce rapport décrit l'odométrie du robot Omni. L'odométrie permet d'estimer le déplacement du robot à partir de mesures de variables propres du modèle cinématique. Étant l'odométrie une méthode de localisation imprécise, nous ajoutons une estimation de l'incertitude sur la position du robot donnée par une matrice de covariance. Pour cela, nous assumons que l'erreur de positionnement suit une distribution Gaussienne. Nous finissons ce rapport avec des évaluations expérimentales qui nous permettent de déterminer le degré de validité de telle approche.

## 1 Introduction

Ce rapport décrit l'odométrie du robot Omni. L'odométrie permet de d'estimer le déplacement du robot à partir de mesures de variables propres du modèle cinématique. Néanmoins, cette estimation n'est pas précise et elle se dégrade avec le déplacement du robot. Cela nous a motivé à rajouter une étape de mise à jour d'une estimation de l'incertitude associée au déplacement calculé par odométrie. Nous assumons que l'erreur du déplacement estimé par odométrie suit une distribution Gaussienne. Ainsi, l'incertitude est représentée par une matrice de covariance qui est estimée à partir des incertitudes associées aux paramètres du modèle cinématique du robot.

Ce rapport est organisé en N section.

## 2 Le modèle cinématique du robot Omni

Les Figures 1(a) et 1(b) présentent les variables de positionnement et du modèle cinématique du robot Omni. Les axes  $XY$  représentent le repère absolu, tandis que les axes  $X'Y'$  représentent le repère robot. Le robot Omni a trois roues non centrées. Pour l' $i$ -ème roue nous avons les paramètres géométriques suivants :

- $r_i$ : son rayon;
- $e_i$ : la distance entre l'axe d'orientation du support de la roue (point  $A_i$  dans le repère  $X'Y'$ ) et son centre de rotation. L'axe d'orientation passe par le point de contact du support de la roue et la structure du robot;
- $x_{a_i}$  et  $y_{a_i}$ : les coordonnées du point  $A_i$  de l'axe d'orientation du support de la roue dans le repère robot.

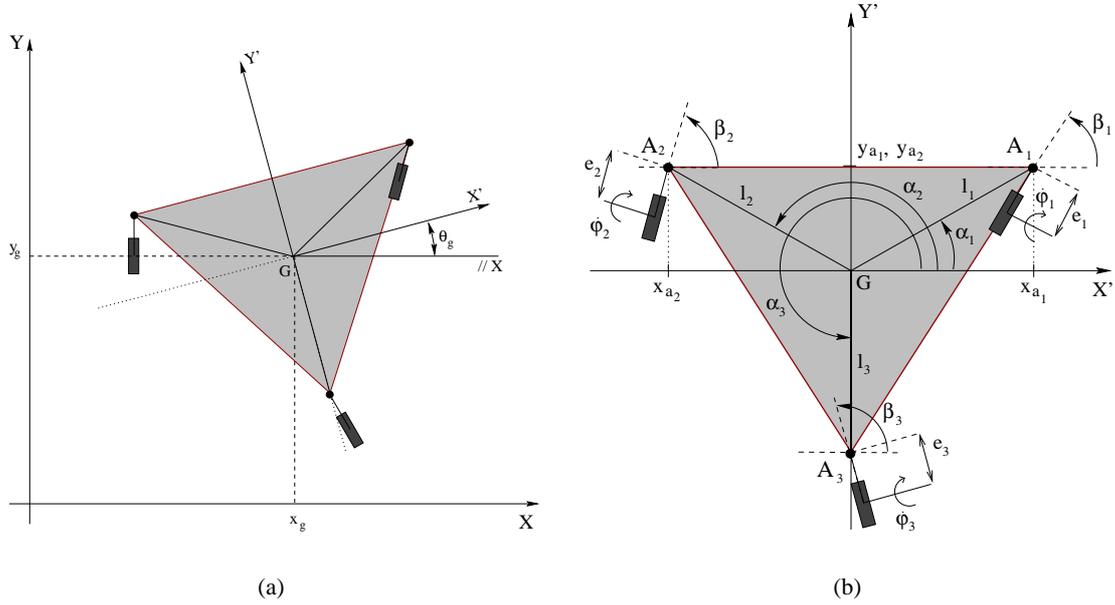


Figure 1: Variables de (a) position absolue et (b) du modèle cinématique du robot Omni.

- $(l_i, \alpha_i)$ : les coordonnées polaires du point  $A_i$  dans le repère  $X'Y'$ , avec  $\alpha_1 = \pi/6$  rad,  $\alpha_2 = 5\pi/6$  rad et  $\alpha_3 = 9\pi/6$  rad. Nous avons ainsi les relations suivantes:

$$x_{a_i} = l_i \cos(\alpha_i), \quad (1)$$

$$y_{a_i} = l_i \sin(\alpha_i). \quad (2)$$

La position absolue du robot est donnée par le vecteur  $\xi = (x, y, \theta)^T$ , dans lequel  $x$  et  $y$  sont les coordonnées du centre géométrique  $G$  du support des roues du robot dans le repère absolu, et  $\theta$  est l'angle entre les axes  $X'$  et  $X$ . Les variables du modèle cinématique de ce robot sont représentées par le vecteur :

$$\mathbf{q} = \left( \beta_1 \quad \beta_2 \quad \beta_3 \quad \varphi_1 \quad \varphi_2 \quad \varphi_3 \right)^T, \quad (3)$$

tel que  $\beta_i$  est l'angle de direction de l' $i$ -ème roue et  $\varphi_i$  sa position angulaire.  $\dot{\varphi}_i$  est la vitesse angulaire de l' $i$ -ème roue. La vitesse angulaire et l'angle de direction de chaque roue sont commandés indépendamment par des moteurs à courant continu.

Campion *et al.* [CBDN96] présentent les équations des modèles cinématiques et dynamiques généralisés pour différents classes de robots mobiles. Ainsi, les contraintes cinématiques pour l' $i$ -ème roue motrice et directrice sont données par les équations suivantes :

$$\begin{pmatrix} -\sin(\alpha_i + \beta'_i) & \cos(\alpha_i + \beta'_i) & l_i \cos(\beta'_i) \end{pmatrix} R(\theta)\dot{\xi} + r_i\dot{\varphi}'_i = 0, \quad (4)$$

$$\begin{pmatrix} \cos(\alpha_i + \beta'_i) & \sin(\alpha_i + \beta'_i) & e_i + l_i \sin(\beta'_i) \end{pmatrix} R(\theta)\dot{\xi} + e_i\dot{\beta}'_i = 0, \quad (5)$$

avec

$$\mathbf{R}(\theta) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) & 0 \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Nous remarquons que  $\mathbf{R}(\theta)$  est carrée et orthogonale:  $\mathbf{R}^T(\theta) = \mathbf{R}^{-1}(\theta)$ .

Les équations (4) et (5) utilisent les notations définies dans [CBDN96], où les angles  $\beta'_i$  et  $\varphi'_i$  ont une référence différente de celle là utilisé dans le robot Omni. Pour le cas du robot Omni, les angles  $\beta'_i$  et  $\varphi'_i$  se relationnent avec les angles  $\beta_i$  et  $\varphi_i$  de la façon suivante :

$$\beta_i = (\beta'_i + \alpha_i) + \frac{\pi}{2}, \quad (6)$$

$$\varphi_i = -\varphi'_i. \quad (7)$$

Ce changement de représentation par rapport aux travaux de Campion *et al.* est dû à une contrainte de projet mécanique. Néanmoins, en prenant en compte cette nouvelle représentation, nous avons pour l' $i$ -ième roue les contraintes suivantes :

$$\begin{pmatrix} \cos(\beta_i) & \sin(\beta_i) & l_i \sin(\beta_i - \alpha_i) \end{pmatrix} R(\theta)\dot{\xi} - r_i\dot{\varphi}_i = 0, \quad (8)$$

$$\begin{pmatrix} \sin(\beta_i) & -\cos(\beta_i) & e_i - l_i \cos(\beta_i - \alpha_i) \end{pmatrix} R(\theta)\dot{\xi} + e_i\dot{\beta}_i = 0. \quad (9)$$

Pour obtenir ces équations, nous avons aussi utilisé  $\dot{\beta}_i = \dot{\beta}'_i$  et  $\dot{\varphi}_i = -\dot{\varphi}'_i$ .

Ainsi, pour le robot Omni qui est composé de trois roues directrices et motrices non-centrées, le modèle cinématique inverse est donnée par :

$$\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{J}(\mathbf{q}, \theta) \cdot \dot{\xi}, \quad (10)$$

Dans l'équation (10),  $\mathbf{J}(\mathbf{q}, \theta)$  est la matrice Jacobienne de dimension  $6 \times 3$  donnée par :

$$\mathbf{J}(\mathbf{q}, \theta) = \mathbf{S}(\mathbf{q})\mathbf{R}(\theta), \quad (11)$$

avec

$$\mathbf{S}(\mathbf{q}) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{e} \begin{pmatrix} \sin(\beta_1) & -\cos(\beta_1) & e - l \cos(\beta_1 - \alpha_1) \\ \sin(\beta_2) & -\cos(\beta_2) & e - l \cos(\beta_2 - \alpha_2) \\ \sin(\beta_3) & -\cos(\beta_3) & e - l \cos(\beta_3 - \alpha_3) \end{pmatrix} \\ \frac{1}{r} \begin{pmatrix} \cos(\beta_1) & \sin(\beta_1) & l \sin(\beta_1 - \alpha_1) \\ \cos(\beta_2) & \sin(\beta_2) & l \sin(\beta_2 - \alpha_2) \\ \cos(\beta_3) & \sin(\beta_3) & l \sin(\beta_3 - \alpha_3) \end{pmatrix} \end{pmatrix}, \quad (12)$$

Ces équations assument que  $e_i = e$ ,  $r_i = r$  et  $l_i = l$  pour  $i = 1, 2$  ou  $3$ . En utilisant les relations données par les équations (1) et (2), nous avons aussi :

$$e - l \cos(\beta_i - \alpha_i) = e - x_{a_i} \cos(\beta_i) - y_{a_i} \sin(\beta_i), \quad (13)$$

$$l \sin(\beta_i - \alpha_i) = x_{a_i} \sin(\beta_i) - y_{a_i} \cos(\beta_i). \quad (14)$$

Le modèle cinématique direct nous donne la variation de position du robot en fonction des variables cinématiques. Ce modèle est obtenu à partir de l'équation (10), c'est-à-dire :

$$\dot{\xi} = \mathbf{J}^\dagger(\mathbf{q}, \theta)\dot{\mathbf{q}}, \quad (15)$$

dans lequel  $\mathbf{J}^\dagger(\mathbf{q}, \theta)$  est la pseudo-inverse de Moore-Penrose de  $\mathbf{J}(\mathbf{q}, \theta)$ , définie par

$$\mathbf{J}^\dagger(\mathbf{q}, \theta) = (\mathbf{J}^T(\mathbf{q}, \theta) \cdot \mathbf{J}(\mathbf{q}, \theta))^{-1} \cdot \mathbf{J}^T(\mathbf{q}, \theta). \quad (16)$$

Pour simplifier la notation dans le développement qui suit, sauf quand nécessaire,  $\mathbf{J}(\mathbf{q}, \theta)$  et  $\mathbf{J}^\dagger(\mathbf{q}, \theta)$  seront exprimés par  $\mathbf{J}$  et  $\mathbf{J}^\dagger$ .

### 3 Propriétés du modèle cinématique

#### 3.1 L'application de la théorie de solution de systèmes d'équations

Comme donnée par l'équation (15), nous pouvons calculer à chaque instant  $t$  la dérivé de la position absolue  $\dot{\xi}$  du robot à partir de sa configuration courante  $\mathbf{q}$  et  $\dot{\mathbf{q}}$  et de  $\theta$ . Cela est effectué en réalisant une transformation de l'espace de  $\dot{\mathbf{q}}$  de dimension 6 vers l'espace de  $\dot{\xi}$  de dimension 3. Ainsi,  $\dot{\xi}$  est la solution au sens de moindres-carrés d'un système de 6 équations et 3 inconnues donné par le modèle cinématique inverse (éq. (10)). Cette solution est calculée à partir de la pseudo-inverse  $\mathbf{J}^\dagger$  de la matrice jacobienne donnée par l'équation (16) et qui satisfait les propriétés de Penrose pour la pseudo-inverse forte [?]:

$$\begin{aligned} \mathbf{J} \cdot \mathbf{J}^\dagger \cdot \mathbf{J} &= \mathbf{J} & \mathbf{J}^\dagger \cdot \mathbf{J} \cdot \mathbf{J}^\dagger &= \mathbf{J}^\dagger \\ \mathbf{J} \cdot \mathbf{J}^\dagger &= (\mathbf{J}^\dagger)^T \cdot (\mathbf{J})^T & \mathbf{J}^\dagger \cdot \mathbf{J} &= (\mathbf{J})^T \cdot (\mathbf{J}^\dagger)^T \end{aligned}$$

Pour que  $\mathbf{J}^\dagger$  soit calculable par l'équation (16), il faut que  $\mathbf{J}^T \cdot \mathbf{J}$  soit non-singulière. Comme démontré par Campion *et al.* [CBDN96], le rang de  $\mathbf{J}$  est toujours 3 pour un robot omnidirectionnel. Pour vérifier la calculabilité de  $\mathbf{J}^\dagger$ , nous nous basons dans le corollaire suivant :

**Corollaire 1 ([Kai80])** *Si  $\mathbf{J}$  est une matrice  $m \times n$ , avec  $m > n$ , et de rang complet  $n$ , alors  $\mathbf{J}^T \mathbf{J}$  est non-singulière.*

Ainsi, étant  $\mathbf{J}$  de rang complet, la matrice  $\mathbf{J}^T \cdot \mathbf{J}$  est non-singulière et  $\mathbf{J}^\dagger$  est toujours calculable. Maintenant, nous définissons la norme suivante :

$$V = \|\dot{\mathbf{q}} - \mathbf{J}(\mathbf{q}, \theta) \cdot \dot{\xi}\|^2,$$

si nous regardons le calcul du modèle cinématique direct donné par l'équation (15),

Nous savons que

est une mesure des résidus des solutions du système (??).

**Corollaire 2 ([?])**  *$\mathbf{z}_0 = \mathbf{A}^\dagger \mathbf{b}$  est l'unique solution approximative de  $\mathbf{A} \mathbf{z} = \mathbf{b}$  dans le sens de moindres carrés, c'est-à-dire, la solution  $\mathbf{z} = \mathbf{z}_0$  qui minimise  $V$ . Si  $\mathbf{A} \mathbf{z} = \mathbf{b}$  a une solution exacte,  $\mathbf{z}_0$  est la solution de norme minimale.*

La solution  $\mathbf{z}_0$  existe si  $\mathbf{A}^T \mathbf{A}$  est non singulière, c'est-à-dire, si  $\text{rang}(\mathbf{A}^T \mathbf{A}) = n$ .

De cette façon, l'existence d'une solution pour le système d'équations (??) dépend du rang de la matrice  $\mathbf{A}$ . La possibilité d'existence des autres solutions pour (??), est donnée par le corollaire suivant :

**Corollaire 3 ([Nas76], page 121) Solutions de Systèmes d'Équations Lineaires:**

1. Si il existe une solution pour (??) (e.g. si  $\mathbf{A}^\dagger$  existe),  $\mathbf{z}_0$  est la solution;
2. Si  $\mathbf{z}_1$  est une autre solution, alors

$$\|\mathbf{z}_1\|^2 = \|\mathbf{z}_0\|^2 + \|(\mathbf{I} - \mathbf{A}^\dagger \mathbf{A})\mathbf{z}_0\|^2. \quad (17)$$

### 3.2 Application à la cinématique du robot Omni

Dans la section ??, nous avons montré que si  $\mathbf{A}$  est une matrice de rang complet ( $rang = n$ ), la solution de norme minimale du système  $\mathbf{A}\mathbf{z} = \mathbf{b}$  existe et est donnée par  $\mathbf{z}_0 = (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{b}$ . C'est-à-dire, la loi d'odométrie du véhicule donnée par

$$\Delta \xi_{k+1} = \mathbf{R}^T(\theta_k) \mathbf{S}^\dagger(\mathbf{q}_k) \Delta \mathbf{q}_{k+1},$$

est la solution que minimise  $\|\mathbf{S}(\mathbf{q}_k) \mathbf{R}(\theta_k) \Delta \xi_{k+1} - \Delta \mathbf{q}_{k+1}\|$ . Cette solution existe seulement si  $\mathbf{S}(\mathbf{q}_k)$  est non singulière. Mais, à partir de l'équation (??), c'est également vrai si  $\mathbf{Q}$  est non singulière.

## 4 Estimation de position à partir du modèle cinématique

### 4.1 Odométrie

Dans le robot Omni, le modèle cinématique est employé sous forme discretisée pour actualiser la position du véhicule en fonction de la variation des variables de commande des roues dans une période d'échantillonnage. Cela est fait en discrétisant l'équation (15) et en utilisant l'approximation d'Euler au premier ordre:

$$\xi(k+1) = \xi(k) + \Delta \xi(k+1), \quad (18)$$

$$\Delta \xi(k+1) = \mathbf{J}^\dagger(\mathbf{q}(k), \theta(k)) \Delta \mathbf{q}(k+1), \quad (19)$$

$$\Delta \mathbf{q}(k+1) = \mathbf{q}(k+1) - \mathbf{q}(k).$$

Ces équations indiquent comment estimer la nouvelle position du robot à l'instant discret  $k$  à partir de son état à l'instant  $k-1$  et des lectures codeurs entre  $k-1$  et  $k$ . Nous remarquons que l'estimation de déplacement du robot entre  $k-1$  et  $k$  a été obtenue par une approximation au premier ordre, et que les termes d'ordre supérieur ont été négligés. Encore plus, nous nous basons sur les hypothèses suivantes :

1. La configuration géométrique du robot est exactement la quelle montrée à la Figure 1.
2. Les paramètres géométriques du modèle cinématique sont exactement connus et la contrainte suivante a été imposée  $e_i = e$ ,  $r_i = r$  et  $l_i = l$  pour  $i = 1, 2$  ou  $3$  ;
3. La résolution des codeurs n'a pas été prise en compte ;
4. Les roues ne glissent pas pendant le déplacement du robot ;

5. Le contact de chaque roue au sol est donnée par un point ;
6. Le sol est parfaitement plat.

Néanmoins, tous ces hypothèses ne sont pas vérifiées en pratique. Et même si nous pouvions bien établir le modèle cinématique du robot Omni et utiliser des codeurs de haute résolution pour réduire leur influence dans les erreurs d'estimation de position, les hypothèses les deux dernières hypothèses de 4 à 6 ne sont pas vérifiées dans un environnement réel. Pourtant, c'est pour cela que l'estimation de position basé sur odométrie n'est pas fiable et se dégrade avec le déplacement du robot.

## 4.2 Odométrie et gyromètre laser

La section précédente nous à mis la lumière sur un des faits de l'odométrie: l'estimation de position d'un robot mobile en utilisant seulement l'odométrie se dégrade avec le temps de déplacement du robot. Borenstein *et al.* [?] a proposé une méthodologie d'amélioration de l'odométrie pour des robots différentiels. Néanmoins, la même méthodologie n'est pas valable pour des robot omnidirectionnels, comme c'est le cas du robot Omni.

Nous pouvons vérifier à partir de l'équation (11) que la matrice Jacobienne du modèle cinématique dépend fortement de la valeur courante de  $\theta$ . Cela implique que des erreurs sur  $\theta$  se propagent directement sur  $x$  et  $y$ . Ainsi, une bonne estimation de  $\theta$  devrait permettre une réduction des erreurs de position par odométrie. Par contre, une mauvaise estimation  $\theta$  pourrait aussi la dégrader encore plus. Parmi les capteurs proprioceptifs utilisés en robotique, les gyromètres laser sont les plus fiables pour estimer  $\theta$ . Néanmoins, ces capteurs on une dérive en fonction du temps. Cela implique que même si un gyromètre laser est utilisé pour estimer  $\theta$ , cette estimation n'est pas fiable pour toujours. Mais, nous pouvons augmenter la certitude sur l'odométrie pour encore plus de temps que la solution sans un gyromètre laser.

Pour le développement qui suit, nous admettons qu'un gyromètre laser peut nous fournir  $\dot{\theta}$ . Ainsi, nous pouvons re-écrire le modèle cinématique inverse comme :

$$\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{J}(\mathbf{q}, \theta) \cdot \dot{\boldsymbol{\xi}}, \quad (20)$$

$$= \mathbf{S}(\mathbf{q})\mathbf{R}(\theta) \cdot \dot{\boldsymbol{\xi}}, \quad (21)$$

$$= \begin{pmatrix} \mathbf{S}_{\xi_2}(\mathbf{q}) & \mathbf{S}_{\theta}(\mathbf{q}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{R}_{\xi_2}(\theta) \cdot \dot{\boldsymbol{\xi}}_2 \\ \dot{\theta} \end{pmatrix} \quad (22)$$

$$= \mathbf{S}_{\xi_2}(\mathbf{q})\mathbf{R}_{\xi_2}(\theta) \cdot \dot{\boldsymbol{\xi}}_2 + \mathbf{S}_{\theta}(\mathbf{q}) \cdot \dot{\theta} \quad (23)$$

avec

$$\mathbf{S}_{\xi_2}(\mathbf{q}) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{e} \begin{pmatrix} \sin(\beta_1) & -\cos(\beta_1) \\ \sin(\beta_2) & -\cos(\beta_2) \\ \sin(\beta_3) & -\cos(\beta_3) \end{pmatrix} \\ \frac{1}{r} \begin{pmatrix} \cos(\beta_1) & \sin(\beta_1) \\ \cos(\beta_2) & \sin(\beta_2) \\ \cos(\beta_3) & \sin(\beta_3) \end{pmatrix} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{S}_{\theta}(\mathbf{q}) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{e} \begin{pmatrix} e - l \cos(\beta_1 - \alpha_1) \\ e - l \cos(\beta_2 - \alpha_2) \\ e - l \cos(\beta_3 - \alpha_3) \end{pmatrix} \\ \frac{1}{r} \begin{pmatrix} l \sin(\beta_1 - \alpha_1) \\ l \sin(\beta_2 - \alpha_2) \\ l \sin(\beta_3 - \alpha_3) \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{R}_{\xi_2}(\theta) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \dot{\boldsymbol{\xi}}_2 = \begin{pmatrix} \dot{x} & \dot{y} \end{pmatrix}^T.$$

Ainsi, nous obtenons :

$$\dot{\boldsymbol{\xi}}_2 = \mathbf{J}_{\xi_2}^\dagger(\mathbf{q}, \theta) \left( \dot{\mathbf{q}} - \mathbf{S}_\theta(\mathbf{q}) \cdot \dot{\theta} \right), \quad (24)$$

avec

$$\mathbf{J}_{\xi_2} = \mathbf{S}_{\xi_2}(\mathbf{q}) \mathbf{R}_{\xi_2}(\theta). \quad (25)$$

En discrétisant l'équation (24), nous obtenons les équations d'actualisation de la position du robot par odométrie et gyromètre laser :

$$\boldsymbol{\xi}_2(k+1) = \boldsymbol{\xi}_2(k) + \Delta \boldsymbol{\xi}_2(k+1), \quad (26)$$

$$\theta(k+1) = \theta(k) + \Delta \theta(k+1), \quad (27)$$

$$\Delta \boldsymbol{\xi}_2(k+1) = \mathbf{J}_{\xi_2}^\dagger(\mathbf{q}(k), \theta(k)) \cdot (\Delta \mathbf{q}(k+1) - \mathbf{S}_\theta(\mathbf{q}(k-1)) \cdot \Delta \theta(k+1)), \quad (28)$$

$$\Delta \mathbf{q}(k+1) = \mathbf{q}(k+1) - \mathbf{q}(k), \quad (29)$$

avec  $\Delta \theta(k+1)$  fournit par le gyromètre.

## 5 Modélisation de l'incertitude de l'odométrie

Pour modéliser l'incertitude associé à l'estimation de position du robot Omni par odométrie, nous supposons que toutes les erreurs suivent une distribution multivariable Gaussienne avec moyenne nulle et une matrice de covariance associée. Ainsi, l'estimée de position à l'instant discret  $k$  suit  $\mathcal{N}(\boldsymbol{\xi}(k), \mathbf{C}_\xi(k))$ , et l'incertitude est représentée par la matrice  $\mathbf{C}_\xi(k)$  comme

$$\mathbf{C}_\xi = \begin{pmatrix} \sigma_x^2 & \sigma_{xy} & \sigma_{x\theta} \\ \sigma_{yx} & \sigma_y^2 & \sigma_{y\theta} \\ \sigma_{\theta x} & \sigma_{\theta y} & \sigma_\theta^2 \end{pmatrix}. \quad (30)$$

Comme nous avons abordé auparavant, l'erreur de positionnement par odométrie augmente avec le déplacement du robot. Cela se traduit par une augmentation de la norme de la matrice  $\mathbf{C}_\xi$ . Pour modéliser telle augmentation, nous supposons aussi que d'autres variables du modèle odométrique du robot ont aussi une incertitude associée, ce qui est vrai notamment pour les variables  $r$ ,  $e$  et  $l$  du modèle cinématique. Associé à ces variables nous avons des variances  $\sigma_r^2$ ,  $\sigma_e^2$  et  $\sigma_l^2$ , respectivement. Nous notons aussi que la matrice Jacobienne  $\mathbf{J}(\mathbf{q}, \theta)$  de l'équation (11) dépend de  $\theta$ , qui a une incertitude donnée par la valeur courante de  $\sigma_\theta^2$ .

Ainsi, l'actualisation de la matrice de covariance  $\mathbf{C}_\xi(k)$  est obtenue par propagation de covariances du modèle linéarisé :

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_\xi(k+1) &= \mathbf{C}_\xi(k) + \left( \frac{\partial \mathbf{J}^\dagger}{\partial \theta(k)} \Delta \mathbf{q}(k+1) \right) \sigma_\theta^2 \left( \frac{\partial \mathbf{J}^\dagger}{\partial \theta(k)} \Delta \mathbf{q}(k+1) \right)^T \\ &\quad + \left( \frac{\partial \mathbf{J}^\dagger}{\partial r} \Delta \mathbf{q}(k+1) \right) \sigma_r^2 \left( \frac{\partial \mathbf{J}^\dagger}{\partial r} \Delta \mathbf{q}(k+1) \right)^T \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left( \frac{\partial \mathbf{J}^\dagger}{\partial e} \Delta \mathbf{q}(k+1) \right) \sigma_e^2 \left( \frac{\partial \mathbf{J}^\dagger}{\partial e} \Delta \mathbf{q}(k+1) \right)^T \\
& + \left( \frac{\partial \mathbf{J}^\dagger}{\partial l} \Delta \mathbf{q}(k+1) \right) \sigma_l^2 \left( \frac{\partial \mathbf{J}^\dagger}{\partial l} \Delta \mathbf{q}(k+1) \right)^T.
\end{aligned} \tag{31}$$

Pour obtenir  $\partial \mathbf{J}^\dagger / \partial p$ , où  $p$  est une variable symbolique qui peut être  $\theta(k)$ ,  $r$ ,  $e$  ou  $l$ , nous le faisons à partir de la propriété suivante des pseudo-inverses ??:

$$\mathbf{J}^\dagger \mathbf{J} = I_3$$

Ainsi, en dérivant les deux cotés de cette équation par rapport au paramètre symbolique  $p$ , nous avons

$$\mathbf{0}_3 = \left( \frac{\partial \mathbf{J}^\dagger}{\partial p} \right) \mathbf{J} + \mathbf{J}^\dagger \left( \frac{\partial \mathbf{J}}{\partial p} \right),$$

et par conséquent

$$\left( \frac{\partial \mathbf{J}^\dagger}{\partial p} \right) = -\mathbf{J}^\dagger \left( \frac{\partial \mathbf{J}}{\partial p} \right) \mathbf{J}^\dagger.$$

Ainsi, il nous faut calculer  $\partial \mathbf{J} / \partial p$  pour les paramètres  $\theta(k)$ ,  $r$ ,  $e$  et  $l$ . Cela résulte en :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathbf{J}}{\partial \theta(k)} &= \mathbf{S}(\mathbf{q}) \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \theta(k)}, & \frac{\partial \mathbf{J}}{\partial r} &= \frac{\partial \mathbf{S}(\mathbf{q})}{\partial r} \mathbf{R}(\theta(k)), \\
\frac{\partial \mathbf{J}}{\partial e} &= \frac{\partial \mathbf{S}(\mathbf{q})}{\partial e} \mathbf{R}(\theta(k)), & \frac{\partial \mathbf{J}}{\partial p} &= \frac{\partial \mathbf{S}(\mathbf{q})}{\partial p} \mathbf{R}(\theta(k)),
\end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \theta(k)} &= \begin{pmatrix} -\sin(\theta(k)) & \cos(\theta(k)) & 0 \\ -\cos(\theta(k)) & -\sin(\theta(k)) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\
\frac{\partial \mathbf{S}(\mathbf{q})}{\partial r} &= \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ -\frac{1}{r^2} \begin{pmatrix} \cos(\beta_1) & \sin(\beta_1) & l \sin(\beta_1 - \alpha_1) \\ \cos(\beta_2) & \sin(\beta_2) & l \sin(\beta_2 - \alpha_2) \\ \cos(\beta_3) & \sin(\beta_3) & l \sin(\beta_3 - \alpha_3) \end{pmatrix} \end{pmatrix}, \\
\frac{\partial \mathbf{S}(\mathbf{q})}{\partial e} &= \begin{pmatrix} \frac{1}{e^2} \begin{pmatrix} \sin(\beta_1) & -\cos(\beta_1) & e - l \cos(\beta_1 - \alpha_1) \\ \sin(\beta_2) & -\cos(\beta_2) & e - l \cos(\beta_2 - \alpha_2) \\ \sin(\beta_3) & -\cos(\beta_3) & e - l \cos(\beta_3 - \alpha_3) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{e} \\ 0 & 0 & \frac{1}{e} \\ 0 & 0 & \frac{1}{e} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix},
\end{aligned}$$

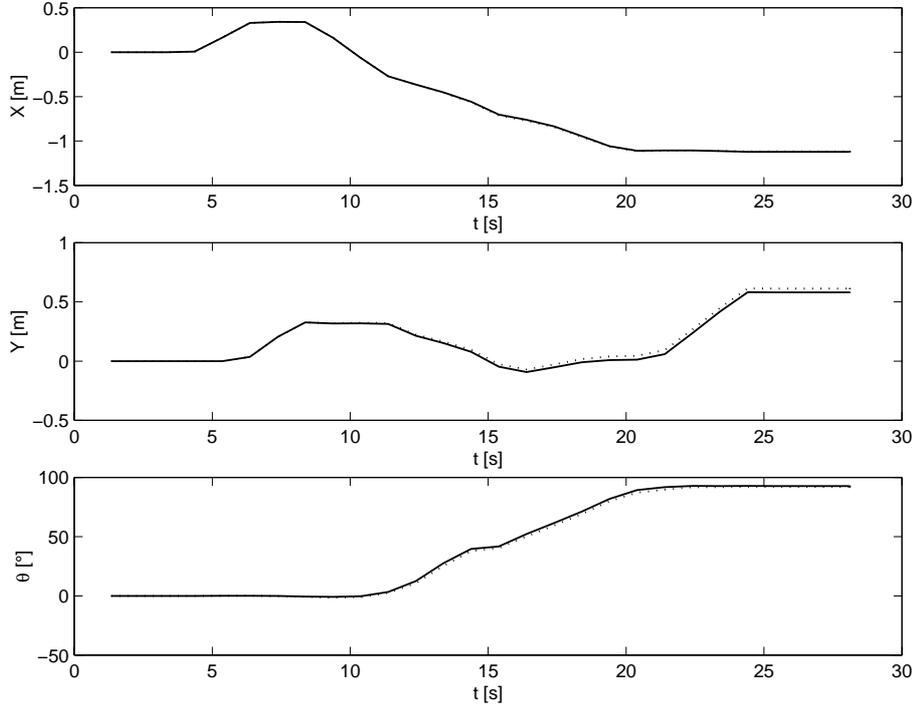


Figure 2: Expérience de petit déplacement: variables de position estimées par odométrie (courbes continues) et celles estimées pour l'odométrie et le gyromètre laser (courbes pointillées)

$$\frac{\partial \mathbf{S}(\mathbf{q})}{\partial l} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{e} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\cos(\beta_1 - \alpha_1) \\ 0 & 0 & -\cos(\beta_2 - \alpha_2) \\ 0 & 0 & -\cos(\beta_3 - \alpha_3) \end{pmatrix} \\ \frac{1}{r} \begin{pmatrix} 0 & 0 & \sin(\beta_1 - \alpha_1) \\ 0 & 0 & \sin(\beta_2 - \alpha_2) \\ 0 & 0 & \sin(\beta_3 - \alpha_3) \end{pmatrix} \end{pmatrix}.$$

## 6 Validation expérimentale

Nous avons réalisé deux expériences avec le robot Omni pour évaluer l'estimation de position de ce robot par odométrie. Cette méthode est comparé à celle décrite dans la section 4.2 qui utilise le gyromètre laser.

La première expérience a consisté d'une petit déplacement du robot. Cela doit nous permettre de vérifier si l'estimation de position par odométrie est consistante pour de courts intervalles de temps de déplacement.

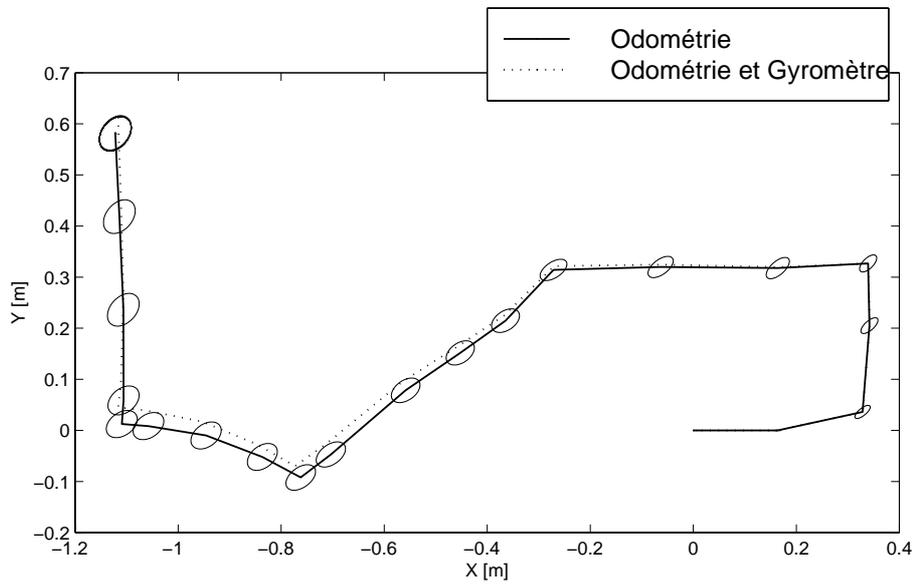


Figure 3: Expérience de petit déplacement: position dans le plan XY estimé par odométrie avec les ellipses d'incertitude (courbes continues) et par odométrie + gyromètre laser (courbes pointillées).

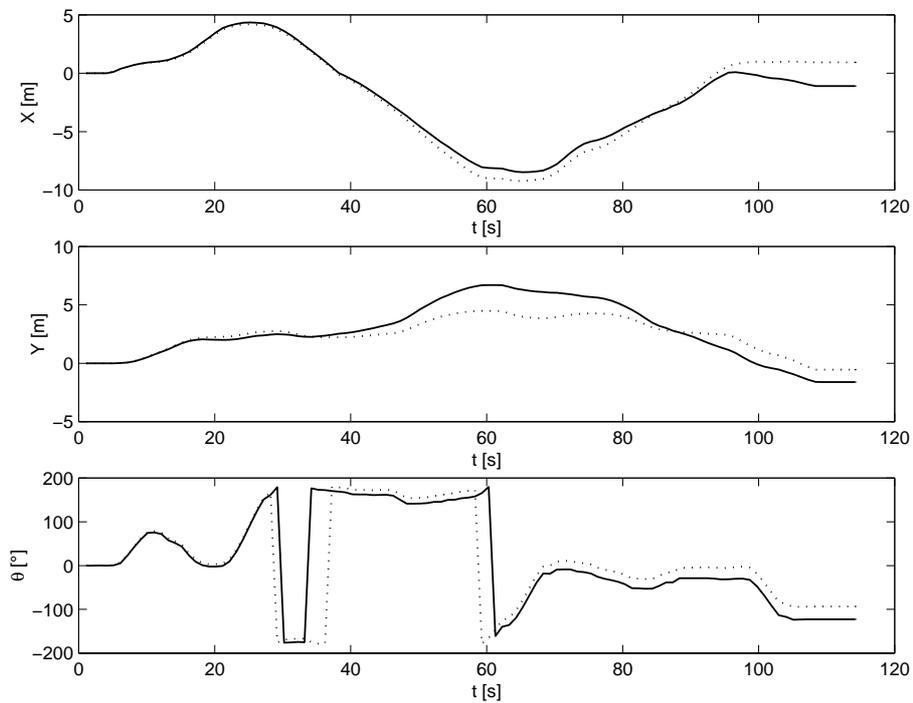


Figure 4: Expérience de long déplacement: variables de position estimées par odométrie (courbes continues) et celles estimées para l'odométrie et le gyromètre laser (courbes pointillées)

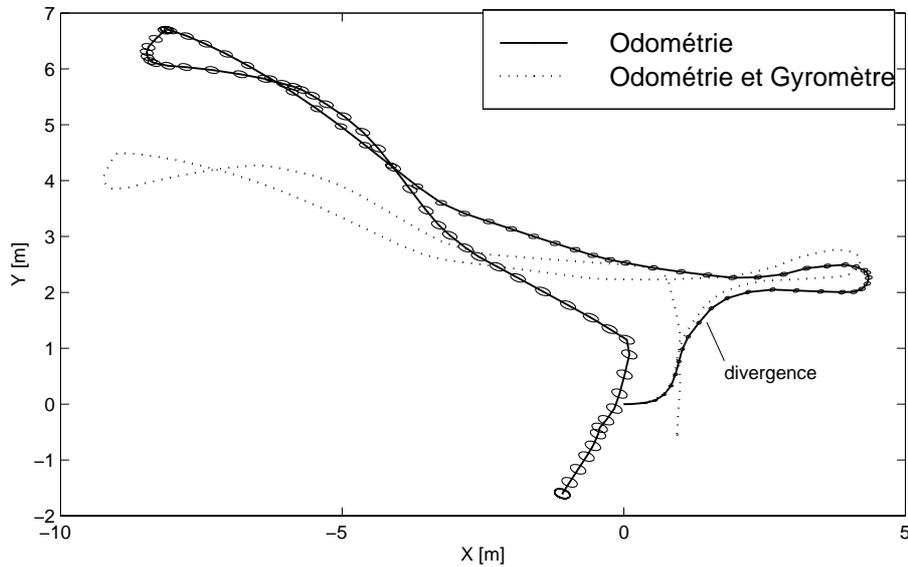


Figure 5: Expérience de long déplacement: position dans le plan XY estimé par odométrie avec les ellipsoïdes d'incertitude (courbes continues) et par odométrie + gyromètre laser (courbes pointillées).

## References

- [CBDN96] Guy Campion, Georges Bastin, and Brigitte D'Andréa-Novel. Structural properties and classification of kinematic and dynamic models of wheeled mobile robots. *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, 12(1):47–62, February 1996.
- [Kai80] Thomas Kailath. *Linear Systems*. Prentice-Hall, 1980.
- [Nas76] M. Zuhair Nashed, editor. *Generalized Inverses and Applications*. Academic Press, 1976.