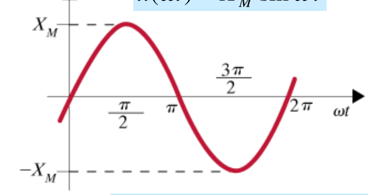
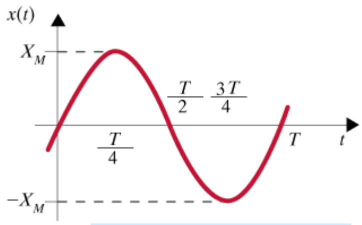
Transformadas de Clarke e Park

Sinal senoidal no tempo e representação fasorial

$x(\omega t) = X_M \sin \omega t$



Plotagem adimensional



Como função no tempo

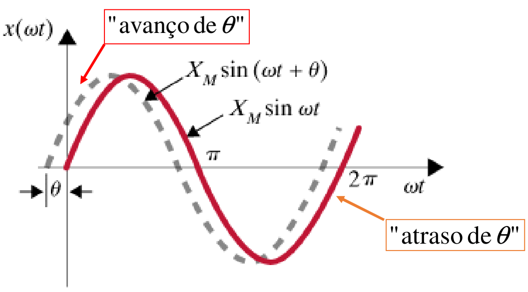
X_M = amplitude
ω = frequência angular (rad/s)
ωt = argumento (rad)

$T = \frac{2\pi}{\omega} =$ Periodo $\Rightarrow x(t) = x(t+T), \forall t$

$f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi} =$ frequência em Hertz (ciclos/s)

$\omega = 2\pi f$

Defasagem:



Sinal senoidal no tempo e representação fasorial

Identidade de Euler: $e^{j\alpha} = \cos\alpha + j\sin\alpha$

Seja:

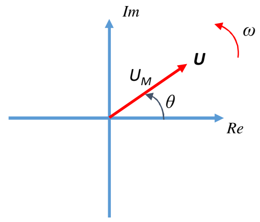
$u(t) = U_M e^{j(\omega t+\theta)} \Rightarrow u(t) = U_M\{\cos(\omega t+\theta) + j\sin(\omega t+\theta)\}$

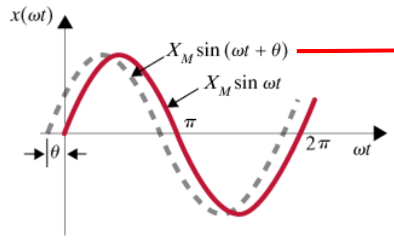
$\mathrm{Re}\{u(t)\} = \mathrm{Re}\{U_M e^{j(\omega t+\theta)}\} = U_M \cos(\omega t+\theta)$

$\mathrm{Im}\{u(t)\} = \mathrm{Im}\{U_M e^{j(\omega t+\theta)}\} = U_M \sin(\omega t+\theta)$

Fasor girante no tempo: $u(t) = U_M e^{j(\omega t+\theta)} = U_M e^{j\theta} e^{j\omega t} = U e^{j\omega t}$

Fasor: $U = U_M e^{j\theta} = U_M\angle\theta$





Fasor: $X = X_M e^{j\theta} = X_M\angle\theta$

Sinais senoidais trifásicos no tempo e representação fasorial

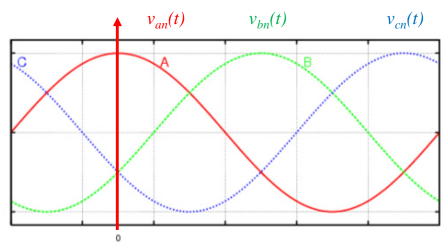
Tensões instantâneas:

$v_{an}(t) = V_m\cos(\omega t)$ (V)

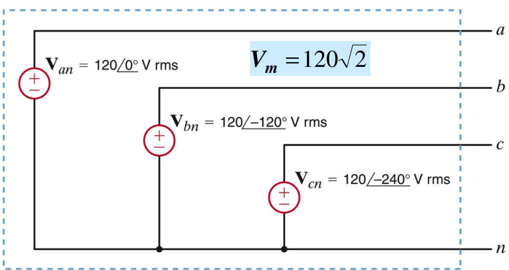
$v_{bn}(t) = V_m\cos(\omega t - 120°)$ (V)

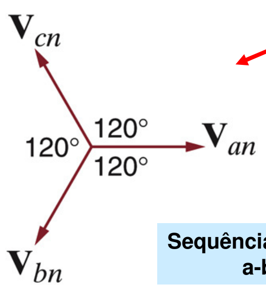
$v_{cn}(t) = V_m\cos(\omega t - 240°)$ (V)

Tensões trifásicas equilibradas



Fasores (eficazes)





Fasores de Tensões de fase

Sequência positiva: a-b-c

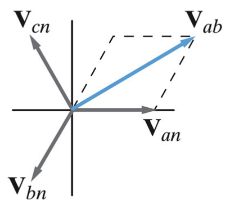
Sinais senoidais trifásicos no tempo e representação fasorial

Tensões de fase

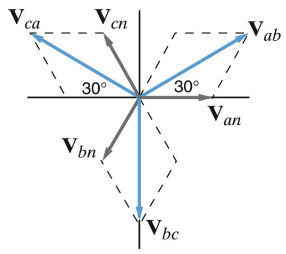
$$V_{an} = |V_p| \angle 0°$$
$$V_{bn} = |V_p| \angle -120°$$
$$V_{cn} = |V_p| \angle 120°$$

Tensões de linha:

$$\begin{aligned} V_{ab} &= V_{an} - V_{bn} \\ &= |V_p| \angle 0° - |V_p| \angle -120° \\ &= |V_p| \left(1 - (\cos(120°) - j\sin(120°))\right) \\ &= |V|_p - |V_p| \left(\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \\ &= \sqrt{3}\,|V_p| \angle 30° \end{aligned}$$



Todas as tensões de linha e tensões de fase (fasores no plano)



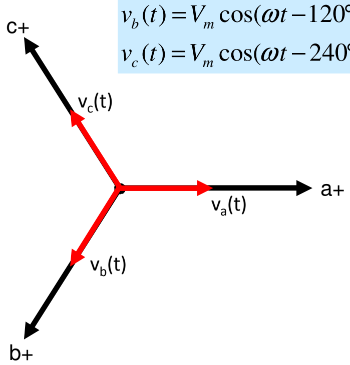
Transformação de Clarke

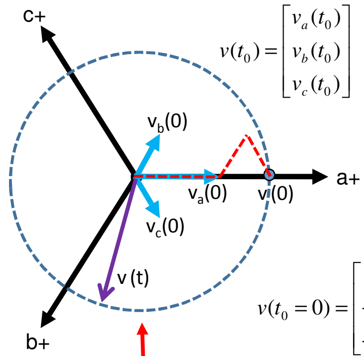
Usando o plano, como no caso fasorial, para representar as três tensões instantâneas no tempo:

Tensões instantâneas:

$$v_a(t) = V_m \cos(\omega t) \text{ (V)}$$
$$v_b(t) = V_m \cos(\omega t - 120°) \text{ (V)}$$
$$v_c(t) = V_m \cos(\omega t - 240°) \text{ (V)}$$

$$v(t) = \begin{bmatrix} v_a(t) \\ v_b(t) \\ v_c(t) \end{bmatrix}$$





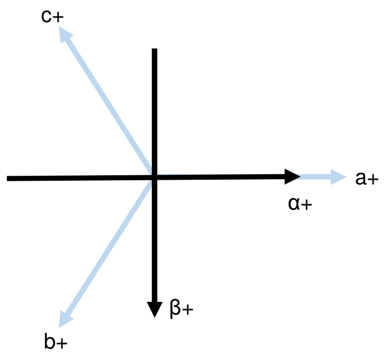
$$v(t_0) = \begin{bmatrix} v_a(t_0) \\ v_b(t_0) \\ v_c(t_0) \end{bmatrix}$$

$$v(t_0 = 0) = \begin{bmatrix} V_m \\ -0{,}5V_m \\ -0{,}5V_m \end{bmatrix}$$

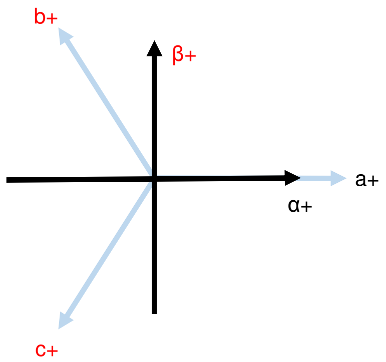
Após um período completo de oscilação, gera-se no plano um lugar geométrico tipo circunferência.

Transformação de Clarke

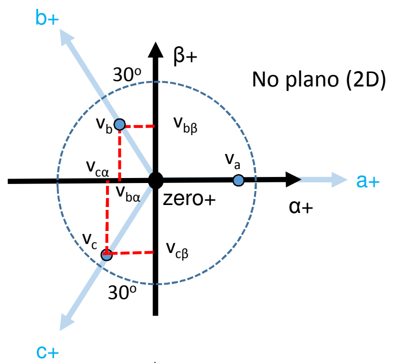
O plano é um espaço vetorial de dimensão 2. Bastam apenas dois vetores de base para representar qualquer vetor no plano → Usam-se os vetores de base α e β.

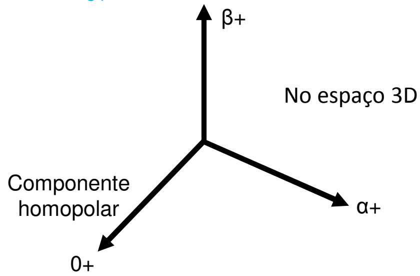


Ou



Transformação de Clarke





Dado:

$$v_{abc}(t) = \begin{bmatrix} v_a(t) \\ v_b(t) \\ v_c(t) \end{bmatrix}$$

Devemos achar:

$$v_{0\alpha\beta}(t) = \begin{bmatrix} v_0(t) \\ v_\alpha(t) \\ v_\beta(t) \end{bmatrix}$$

Para sinais trifásicos equilibrados: $v_0(t) = 0 \;\; , \forall \;\; t$

$$v_{a\alpha} = v_a$$

$$v_{a\beta} = 0$$

$$v_{b\alpha} = v_b \cos(120^o) = -\tfrac{1}{2} v_b$$

$$v_{b\beta} = v_b \sin(120^o) = \tfrac{\sqrt{3}}{2} v_b$$

$$v_{c\alpha} = v_c \cos(-120^o) = -\frac{1}{2} v_c$$

$$v_{c\beta} = v_c \sin(-120^o) = -\tfrac{\sqrt{3}}{2} v_b$$

Transformação de Clarke

Então $v_0 = v_a + v_b + v_c$

$$v_\alpha = v_{a\alpha} + v_{b\alpha} + v_{c\alpha} = 1v_a - \tfrac{1}{2}v_b - \tfrac{1}{2}v_c$$

$$v_\beta = v_{a\beta} + v_{b\beta} + v_{c\beta} = 0v_a + \tfrac{\sqrt{3}}{2}v_b - \tfrac{\sqrt{3}}{2}v_c$$

Transformação de Clarke (Edith Clarke)

$$v_{0\alpha\beta}(t) = \begin{bmatrix} v_0(t) \\ v_\alpha(t) \\ v_\beta(t) \end{bmatrix} = \frac{2}{3}\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_a(t) \\ v_b(t) \\ v_c(t) \end{bmatrix}$$

Primeira forma:
* Mantém as amplitudes invariantes.
(Amplitudes de v_a, v_b, v_c, v_α e v_β são iguais)

$$v_{0\alpha\beta}(t) = \begin{bmatrix} v_0(t) \\ v_\alpha(t) \\ v_\beta(t) \end{bmatrix} = \sqrt{\frac{2}{3}}\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_a(t) \\ v_b(t) \\ v_c(t) \end{bmatrix}$$

Segunda forma:
* Mantém as potências invariantes.
(Em circuitos iguais analisados nos dois domínios)

Transformação de Clarke

Transformação com potência invariante: $v_{0\alpha\beta}(t) = T_{0\alpha\beta}v_{abc}(t)$

Onde

$$T_{0\alpha\beta} = \sqrt{\frac{2}{3}}\begin{bmatrix} \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \\ 1 & -1/2 & -1/2 \\ 0 & \sqrt{3}/2 & -\sqrt{3}/2 \end{bmatrix}$$

No sentido inverso: $v_{abc}(t) = T_{0\alpha\beta}^{-1}v_{0\alpha\beta}(t)$

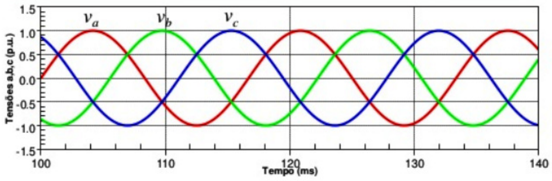
Onde

$$T_{0\alpha\beta}^{-1} = \sqrt{\frac{2}{3}}\begin{bmatrix} \sqrt{2}/2 & 1 & 0 \\ \sqrt{2}/2 & -1/2 & \sqrt{3}/2 \\ \sqrt{2}/2 & -1/2 & -\sqrt{3}/2 \end{bmatrix}$$

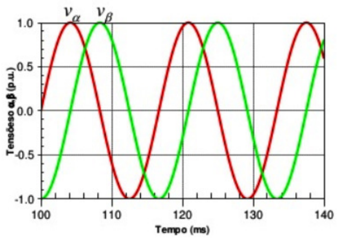
Transformação de Clarke

Demonstração da transformação

Na representação a,b,c



Na representação α, β

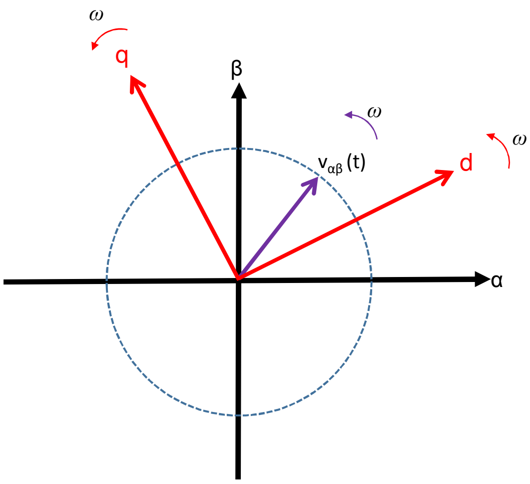


Transformação de Park

Sejam as tensões representadas por $v_\alpha(t)$ e $v_\beta(t)$

$$v_{\alpha\beta}(t) = \begin{bmatrix} v_\alpha(t) \\ v_\alpha(t) \end{bmatrix}$$

→ Gira com velocidade ω rad/s



O sistema de coordenadas αβ é estacionário.

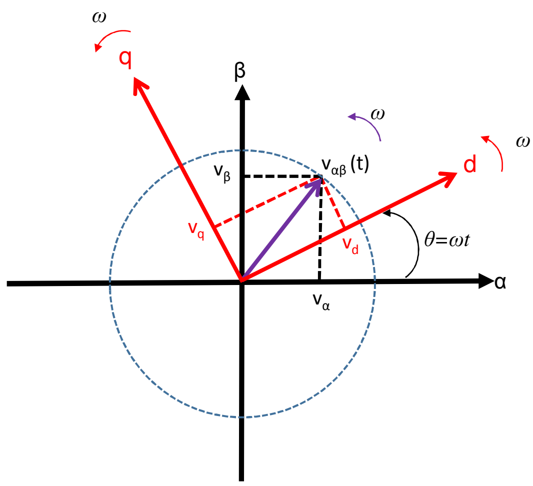
Seja um novo sistema de coordenadas dq (ortogonal), tendo a mesma origem do sistema αβ, que gira com velocidade ω rad/s.

Dadas as coordenadas de $v_{\alpha\beta}(t)$ pode-se determinar as coordenadas dessa mesma tensão no sistema de coordenadas girante dq, ou seja, $v_{dq}(t)$.

Verifica-se que $v_{dq}(t)$ será constante, ou seja,

$$v_{dq}(t) = \begin{bmatrix} v_d(t) \\ v_q(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_d \\ V_q \end{bmatrix} = cte$$

Transformação de Park



$$\begin{bmatrix} v_\alpha(t) \\ v_\beta(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_d(t) \\ v_q(t) \end{bmatrix}$$

Trasformada de Park:

$$v_{dq}(t) = \begin{bmatrix} v_d(t) \\ v_q(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_\alpha(t) \\ v_\beta(t) \end{bmatrix}$$

$$v_{dq}(t) = T_{dq} v_{\alpha\beta}(t)$$

$$T_{dq} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}$$

$$T_{dq}^{-1} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}$$

Transformação de Park

Seja $v_\alpha(t) = V\cos(\omega t + \theta_0)$

$v_\beta(t) = V\cos(\omega t + \theta_0 - \pi/2)$

$$v_d(t) = V\cos(\omega t)\cos(\omega t + \theta_0) + V\sin(\omega t)\cos(\omega t + \theta_0 - \pi/2)$$
$$v_q(t) = -V\sin(\omega t)\cos(\omega t + \theta_0) + V\cos(\omega t)\cos(\omega t + \theta_0 - \pi/2)$$

$$v_d(t) = V\cos(\theta_0) = V_d$$
$$v_q(t) = V\sin(\theta_0) = V_q$$

Se $v_\alpha(t) = V\sin(\omega t + \theta_0)$

$v_\beta(t) = V\sin(\omega t + \theta_0 - \pi/2)$

$$v_d(t) = V\cos(\theta_0 - \pi/2)$$
$$v_q(t) = V\sin(\theta_0 - \pi/2)$$

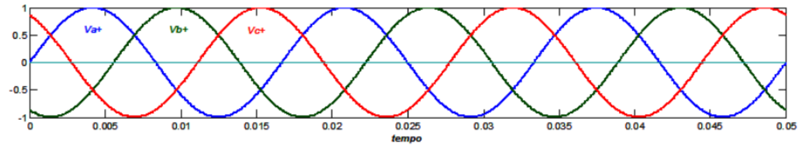
Transformação de Park

Demonstração da transformação

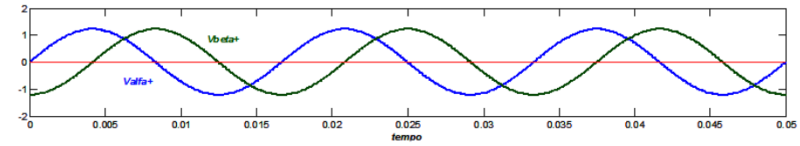
$$v_\alpha(t) = V \sin(\omega t + \theta_0)$$
$$v_\beta(t) = V \sin(\omega t + \theta_0 - \pi/2)$$

Obs: com V=1 e θ_0=0

Na representação a,b,c



Na representação α, β



Na representação d, q