Sinais e Sistemas em Tempo Contínuo

Capítulo 1

Adaptação do material do Prof. João Luiz – 2019/2

Capítulo 1: Sinais e Sistemas

- 1.1 - Energia e potência do Sinal
- 1.2 - Operações com sinais
- 1.3 - Classificação de sinais
- 1.4 - Modelos de sinais
    - Degrau unitário
    - Impulso unitário
    - Exponencial complexa
- 1.5 - Simetria
    - Funções pares e funções ímpares
    - Componente par e componente ímpar de um sinal

Capítulo 1: Sinais e Sistemas

- Sinal:
  - É um conjunto de dados ou informação
  - Grandeza que varia em função de uma váriavel independente qualquer
    - Ex's: tensão elétrica em função do tempo, $v(t)$,
    - Ex: carga elétrica em função da posição espacial, $q(r)$
  - Falaremos sempre em "tempo", mas a discussão se aplica a qualquer outro tipo de variável independente
- Sistemas:
  - Processa (modifica ou extrai) informações do sinal
  - Tem um sinal de entrada e um sinal de saída (também várias entradas e várias saídas)
  - Pode ser um circuito elétrico, um sistema mecânico ou hidráulico, ou mesmo um algoritmo implementado em *software*
  - Ex: sistema que calcula a posição futura de um alvo a partir de um sinal de radar

1.1 - Energia e potência do sinal

Seja um sinal $x(t)$

- Energia: $E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt$
  - É uma medida influenciada pela amplitude do sinal e por sua duração
  - O operador módulo é necessário pois $x(t)$ pode ser um sinal complexo
- Potência: $P_x = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} |x(t)|^2 dt$
  - É a média da energia por unidade de tempo
  - É chamado de valor médio quadrático
- Valor eficaz (ou valor rms): é a raiz quadrada de P_x

Considerações

$$E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt \qquad\qquad P_x = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} |x(t)|^2 dt$$

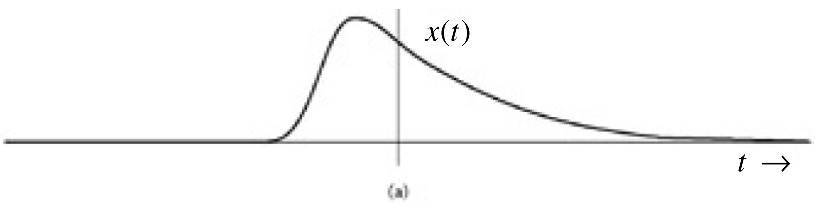
- Se a amplitude do sinal zerar com |t|→ ∞, então a energia é finita
  - Neste caso, a potência é nula
- Se a amplitude do sinal não zerar com |t|→ ∞, então a energia é infinita
  - Neste caso, a potência é não nula
- Alguns sinais tem energia e potência infinita
  - Ex: $x(t) = t$
- Se $x(t)$ é periódico, a energia é infinita e a potência será o valor médio de $|x(t)|^2$ para um período T_0:

$$P_x = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} |x(t)|^2 dt$$ (potência de um sinal periódico)

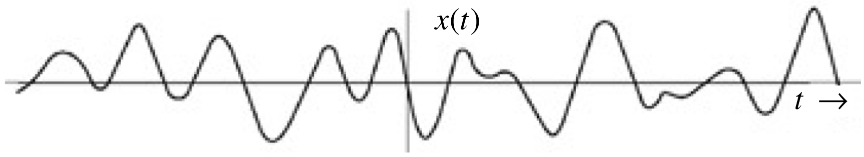
integral ao longo de um período qualquer

Exemplos

Sinal com energia finita e potência nula



Sinal com energia infinita e potência finita

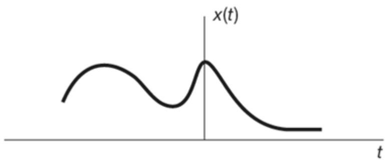


1.2 - Operações com sinais

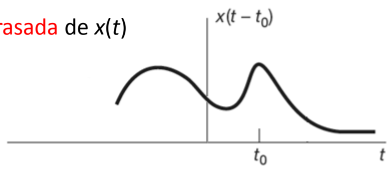
Nesta seção discutiremos algumas operações úteis com sinais. São as transformações da variável independente:

- Deslocamento temporal: $x(t-t_0)$
- Escalonamento temporal: $x(at)$
- Reversão temporal: $x(-t)$
- Operações combinadas: $x(at-b)$

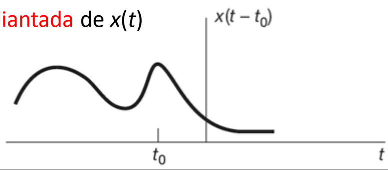
Deslocamento temporal: $x(t-t_0)$



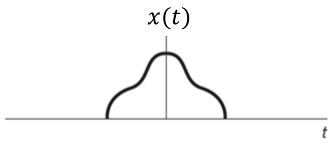
Se $t_0 > 0$: versão atrasada de $x(t)$

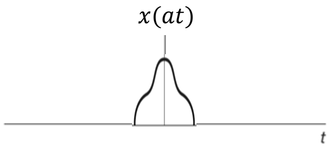


Se $t_0 < 0$: versão adiantada de $x(t)$



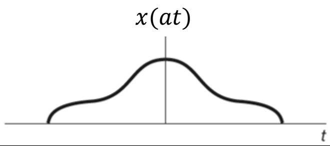
Escalonamento temporal: $x(at)$





$|a| > 1$ → versão linearmente comprimida de $x(at)$

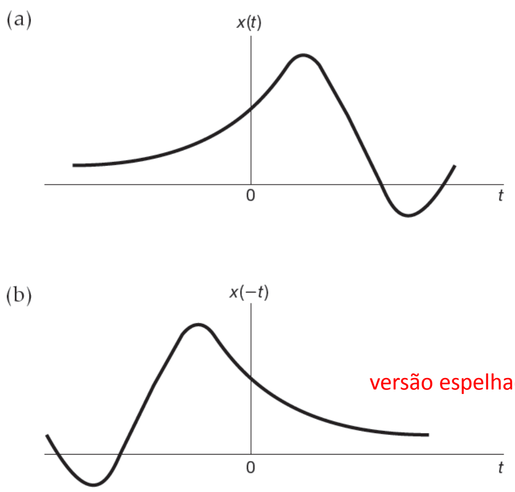
Exemplo: com a = 2, um sinal de áudio é reproduzido com o dobro da velocidade



$|a| < 1$ → versão linearmente estendida de $x(at)$

Exemplo: com a = 1/2, um sinal de áudio é reproduzido com metade da velocidade

Reversão temporal: $x(-t)$



versão espelhada de $x(t)$

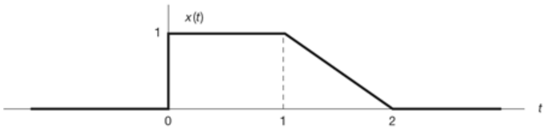
Figura 1.11 (a) Sinal de tempo contínuo $x(t)$; (b) sua reflexão $x(-t)$ em relação a $t = 0$.

Combinações: $x(at-b)$

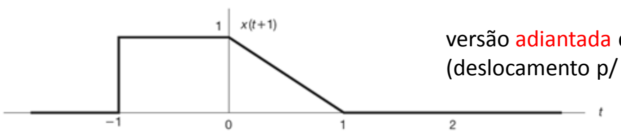
- Se $|a| > 1$: sinal é linearmente comprimido
- Se $|a| < 1$: sinal é linearmente estendido
- Se $a < 0$: sinal é refletido no tempo
- Se $b \neq 0$: sinal é deslocado no tempo
  - A direção do deslocamento depende não só do sinal de b, mas também do sinal de a

Exemplo

$x(t)$

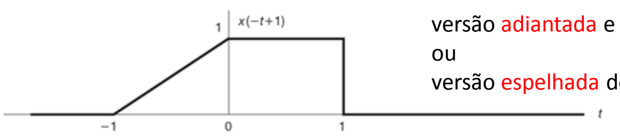


$x(t+1)$



versão adiantada de $x(t)$
(deslocamento p/ esquerda)

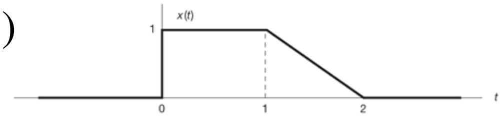
$x(-t+1)$



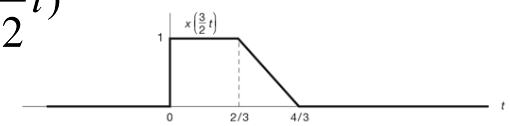
versão adiantada e espelhada de $x(t)$
ou
versão espelhada de $x(t+1)$

Exemplo

$x(t)$

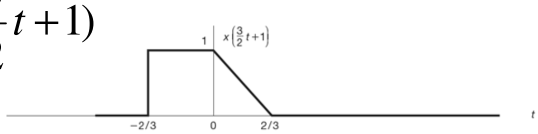


$x(\frac{3}{2}t)$



versão comprimida de $x(t)$, pois $|a| > 1$

$x(\frac{3}{2}t+1)$



versão comprida e adiantada de $x(t)$
ou
versão adiantada de $x(3t/2)$

1.3 - Classificação de sinais

- Tempo contínuo vs. tempo discreto
- Sinal analógico vs. sinal digital
- Sinal periódico vs. sinal aperiódico
- Sinal causal vs. sinal anti-causal vs. sinal não causal
- Sinal de energia vs. sinal de potência
- Sinal determinístico vs. sinal estocástico

Sinais de tempo contínuo vs. sinais de tempo discreto

- Sinais de tempo contínuo: definidos em um conjunto contínuo de valores da variável independente
  - Ex: velocidade do vento em função da altitude
- Sinais de tempo discreto: definidos somente em um conjunto discreto de valores da variável independente
  - Ex: índice semanal Down-Jones da bolsa de NY

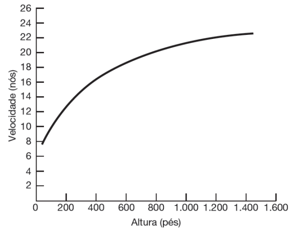


Figura 1.5 Média anual típica do perfil do vento vertical. (Adaptado de Crawford e Hudson. *National Severe Storms Laboratory Report.* ESSA ERLTM-NSSL 48, ago. 1970.)

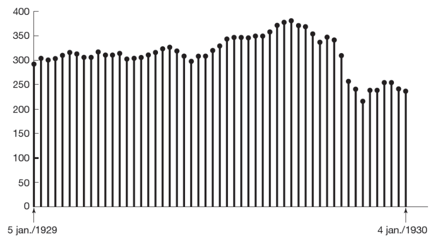
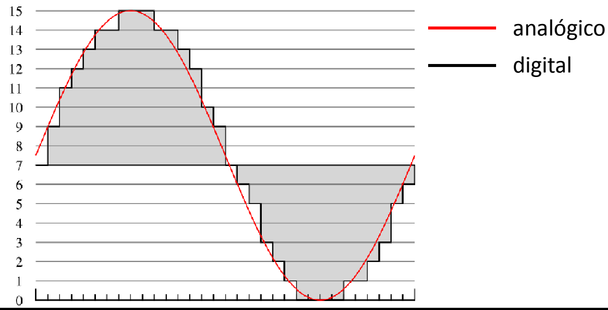


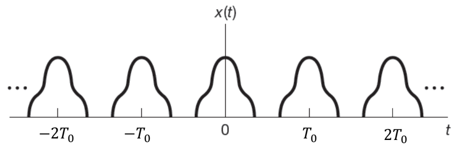
Figura 1.6 Exemplo de sinal de tempo discreto: índice semanal Dow-Jones da Bolsa de Valores de Nova York, de 5 de janeiro de 1929 a 4 de janeiro de 1930.

Analógico vs. digital

- Sinais analógicos
  - Podem assumir um número incontável de valores possíveis dentro de uma faixa dinâmica (ou de excursão)
- Sinais digitais
  - Podem assumir somente um número contável de possíveis valores dentro de uma faixa dinâmica



Sinais periódicos



- O sinal é dito "periódico" se existe um valor positivo T_0 para o qual

$$x(t) = x(t+T_0)$$

para todos os valores de t

- T_0 é o período do sinal
- Deslocar no tempo por múltiplos de T_0 não tem efeito
- Se não existe um T_0 para o qual a equação acima é verdadeira, então o sinal é dito "aperiódico"

Sinais periódicos (continuação)

- Se o sinal é periódico, $x(t) = x(t + mT_0)$ para todo t e para qualquer número inteiro m
- Assim, $x(t)$ também é periódico com período $2T_0$, $3T_0$, $4T_0$, etc.
- Período fundamental: menor valor positivo de T_0 que satisfaz a condição do *slide* anterior

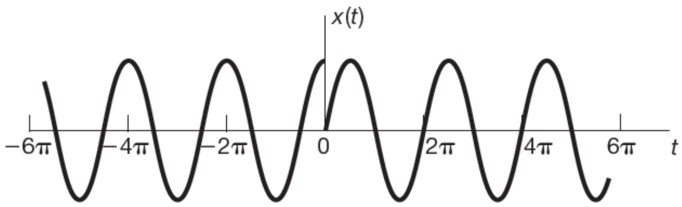
  – Exceção: $x(t)$ constante
    - Neste caso, $x(t)$ é periódico para qualquer valor de T_0
    - Portanto, o período fundamental é indefinido

Exemplo

$$x(t) = \begin{cases} \cos(t) & \text{if } t < 0 \\ \sin(t) & \text{if } t \geq 0 \end{cases}$$

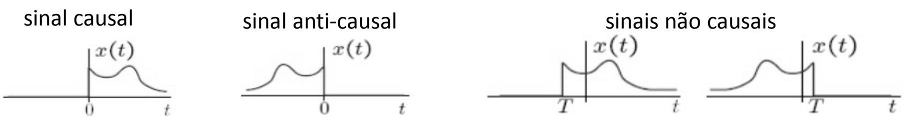
- $x(t)$ é um sinal periódico?

Embora cos(t) e sen(t) sejam ambos periódicos com período $T_0 = 2\pi$ (segundos), $x(t)$ não é periódico, pois a descontinuidade em $t = 0$ não se repete.



Sinal causal, anti-causal e não-causal

- Sinal causal: $x(t) = 0$ para todo $t < 0$
- Sinal anti-causal: $x(t) = 0$ para todo $t > 0$
- Sinal não causal: $x(t) \neq 0$ para algum $t < 0$
  - "Anti-causal" e "não causal" são coisas diferentes!
- Observação:
  - Todo sinal periódico é não causal
  - Todo sinal causal ou anti-causal é aperiódico



Sinais de energia e sinais de potência

- Sinal de energia: tem energia finita
  - Consequentemente, tem potência nula
- Sinal de potência: tem potência finita e não nula
  - Consequentemente, tem energia infinita
  - Todo sinal de potência tem duração infinita
  - Em geral, os sinais periódicos são sinais de potência
- Se for de energia, não pode ser de potência, e vice-versa
- Alguns sinais não são nem de energia, nem de potência
  - Ex: $x(t) = t$ tem energia infinita e potência infinita

Sinais determinísticos vs. sinais estocásticos

- Sinais determinísticos:
  - Descrição física completamente conhecida, seja na forma matemática ou na forma gráfica.
  - Ex: $x(t) = e^{-3t}$
- Sinais estocásticos (ou aleatórios):
  - Conhecidos apenas em termos de uma descrição probabilística (valor médio, valor eficaz, etc.)
  - Ex: sinal aleatório cuja amplitude segue uma função de densidade de probabilidade Gaussiana com $\mu = 0$ e $\sigma = 1$

1.4 - Sinais úteis

- Degrau unitário
- Impulso unitário
- Senoides reais
- Exponenciais reais
- Exponenciais complexas

Funções impulso unitário e degrau unitário

- Função degrau unitário: $u(t)=\begin{cases}1, & t\geq 0\\ 0, & t<0\end{cases}$
  - É descontínua em t = 0.
- Função impulso unitário (ou função delta de Dirac): $\delta(t)=\dfrac{du(t)}{dt}$
- Relação entre as duas:

$$u(t)=\int_{-\infty}^{t}\delta(\tau)d\tau$$

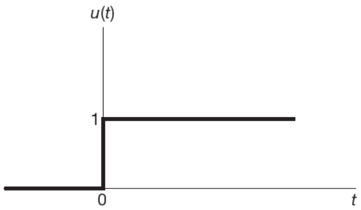


Figura 1.32 Função degrau unitário de tempo contínuo.

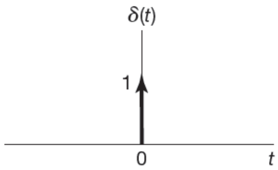


Figura 1.35 Impulso unitário de tempo contínuo.

Entendendo a função impulso unitário

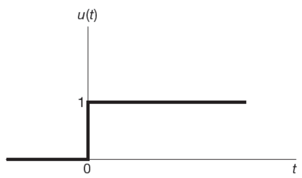


Figura 1.32 Função degrau unitário de tempo contínuo.

suavizando a transição →

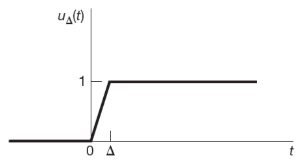


Figura 1.33 Aproximação contínua do degrau unitário, $u_\Delta(t)$.

derivando:

$$\delta_\Delta(t) = \frac{du_\Delta(t)}{dt}$$

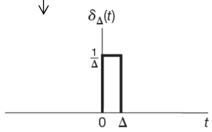


Figura 1.34 Derivada de $u_\Delta(t)$.

fazendo Δ infinitamente pequeno:

$$\delta(t) = \lim_{\Delta \to 0} \delta_\Delta(t)$$

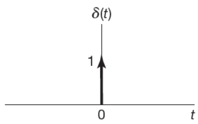


Figura 1.35 Impulso unitário de tempo contínuo.

integrando:

$$u(t) = \int_{-\infty}^{t} \delta(\tau)\, d\tau$$

Área da função impulso unitário

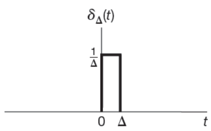


Figura 1.34 Derivada de $u_\Delta(t)$.

fazendo Δ infinitamente pequeno:

$$\delta(t) = \lim_{\Delta \to 0} \delta_\Delta(t)$$

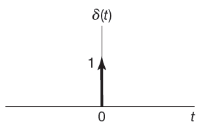


Figura 1.35 Impulso unitário de tempo contínuo.

- Note que $\delta_\Delta(t)$ tem área igual a 1: $\int_{-\infty}^{\infty} \delta_\Delta(t)dt = \Delta \times \frac{1}{\Delta} = 1$
  - Diminuindo a largura (Δ), aumenta-se a altura (1/Δ)
- No limite: $\delta(t) = \lim_{\Delta \to 0} \delta_\Delta(t)$
  - A largura se torna infinitamente pequena
  - A altura se torna infinitamente grande
  - A área continua sendo Δ × (1/ Δ) = 1
- Portanto, a função impulso unitário tem área igual a 1:

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)dt = 1}$$

Impulso com área *k*

a altura da seta e o número indicam a área do impulso

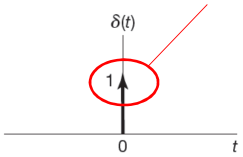


Figura 1.35 Impulso unitário de tempo contínuo.

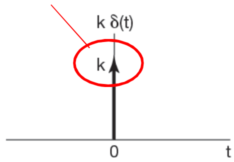
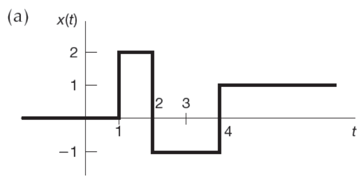


Figura 1.36 Impulso com área *k*.

- A função $k\,\delta(t)$ é um impulso com área k, pois:

$$\int_{-\infty}^{\infty} k\delta(t)dt = k\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)dt = k \cdot 1 = k$$

Exemplo



- Calcule e represente graficamente a derivada de $x(t)$.
- Resposta:

$$\frac{d}{dt}x(t) = 2\delta(t-1) - 3\delta(t-2) + 2\delta(t-4)$$

- A área do impulso é igual ao tamanho da descontinuidade.

- A integração de $x'(t)$ produz $x(t)$.

Exemplo

- Calcule e represente graficamente a derivada de $x(t)$.
- Resposta:

$$\frac{d}{dt}x(t) = 2\delta(t-1) - 3\delta(t-2) + 2\delta(t-4)$$

- A área do impulso é igual ao tamanho da descontinuidade.

- A integração de $x'(t)$ produz $x(t)$.

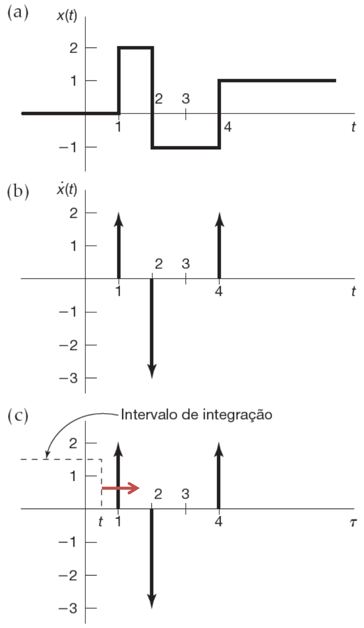


Figura 1.40 (a) Sinal descontínuo $x(t)$ analisado no Exemplo 1.7; (b) sua derivada $\dot{x}(t)$; (c) representação da reconstrução de $x(t)$ como integral de $\dot{x}(t)$, ilustrada para um valor de t entre 0 e 1.

Propriedade de amostragem

- Considere: $x_1(t) = x(t)\delta_\Delta(t)$
  - $x_1(t)$ é igual a $x(t)/\Delta$ no intervalo de 0 a Δ
  - Igual a zero para os demais valores de t

- Se Δ é suficientemente pequeno, $x(t)$ é aproximadamente constante no intervalo de 0 a Δ, de modo que:

$$x(t)\delta_\Delta(t) \approx x(0)\delta_\Delta(t)$$

- O mesmo vale para o limite de $\delta_\Delta(t)$ com $\Delta \to 0$:

$$x(t)\delta(t) = x(0)\delta(t)$$

- E, se deslocarmos $\delta(t)$ no tempo, temos:

$$\boxed{x(t)\delta(t-t_0) = x(t_0)\delta(t-t_0)}$$

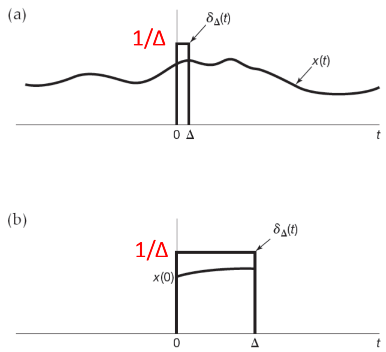
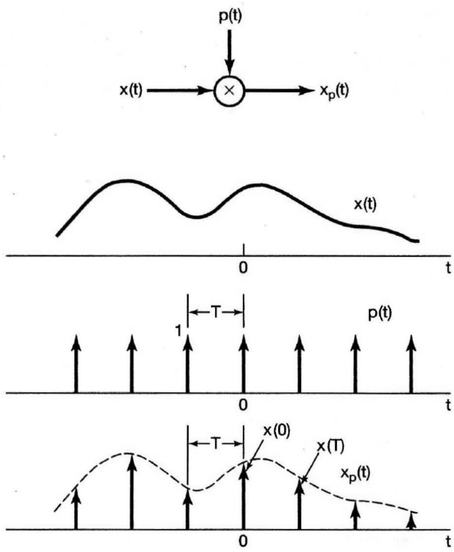


Figura 1.39 O produto $x(t)\,\delta_\Delta(t)$: (a) gráficos das duas funções; (b) visão ampliada da porção diferente de zero de seu produto.

Amostragem de sinais com trem de impulsos

- A multiplicação de um sinal $x(t)$ por um trem de impulsos $p(t)$ produz um sinal amostrado, $x_p(t)$.

- A amostragem de sinais será estudada em "Sinais e Sistemas em Tempo Discreto".

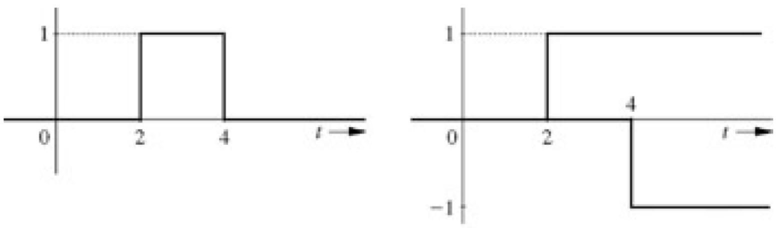


Construindo pulsos retangulares com funções degrau unitário

- É só fazer: $x(t) = u(t - t_1) - u(t - t_2)$

Exemplo:

$$x(t) = u(t-2) - u(t-4)$$



Sinais senoidais (capítulo B.2)

- Sinal senoidal: $x(t) = A\cos(\omega_0 t + \phi)$

fase [rad]

tempo [s]

frequência angular [rad/s]

amplitude

$\omega_0 = 2\,\pi\, f_0$

frequência [Hz]

Periódico com período fundamental:

$$T_0 = \frac{2\pi}{|\omega_0|}$$

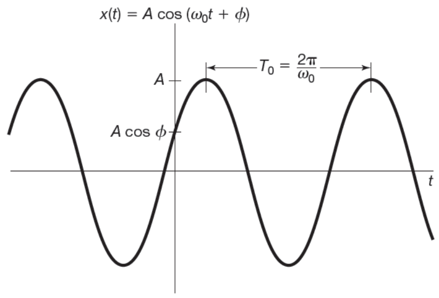


Figura 1.20 Sinal senoidal de tempo contínuo.

Frequência fundamental e período fundamental

- Aumentando o período fundamental, diminui a frequência fundamental:

$$T_0 = \frac{2\pi}{|\omega_0|}$$

- Sinal constante:
  - Frequência fundamental nula
  - Período fundamental indefinido

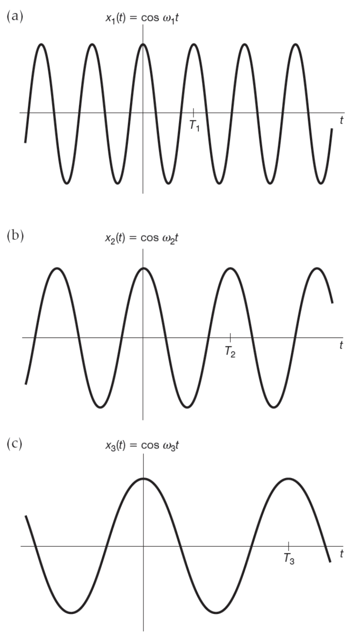


Figura 1.21 Relação entre a frequência fundamental e o período dos sinais senoidais de tempo contínuo; aqui, $\omega_1 > \omega_2 > \omega_3$, que implica $T_1 < T_2 < T_3$.

Soma de senoides de mesma frequência

$$a\cos\omega_0 t + b\,\mathrm{sen}\,\omega_0 t = C\cos(\omega_0 t + \theta)$$

em que:

$$C = \sqrt{a^2 + b^2}$$

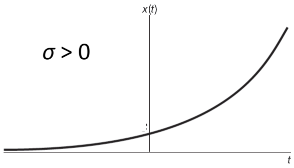
$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{-b}{a}\right)$$

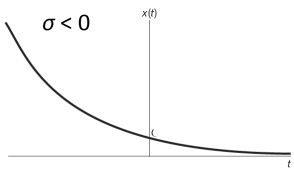
Lembrando: $\mathrm{sen}\,\omega_0 t = \cos(\omega_0 t - \pi/2)$

$\cos\omega_0 t = \mathrm{sen}(\omega_0 t + \pi/2)$

Sinais exponenciais reais (capítulo B.3)

- Se k e σ são números reais, então $x(t) = k\,e^{\sigma t}$ é chamado de exponencial real.
- Neste caso, há dois tipos de comportamento:
  - $\sigma > 0 \rightarrow$ exponencial crescente
  - $\sigma < 0 \rightarrow$ exponencial decrescente
  - Para $\sigma = 0$, $x(t)$ é constante.





Números complexos (capítulo. B.1)

$j^2 = -1 \qquad j = \pm\sqrt{-1}$

Forma cartesiana: $\boldsymbol{Z} = X + jY$

Forma polar: $\boldsymbol{Z} = Ze^{j\theta}$

Módulo: $Z = |\boldsymbol{Z}| = \sqrt{X^2 + Y^2}$

Ângulo: $\theta = \sphericalangle\boldsymbol{Z} = \text{atan}(Y/X)$
(atenção c/ quadrante)

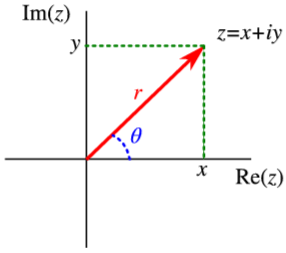
Parte real: $X = Z\cos\theta$

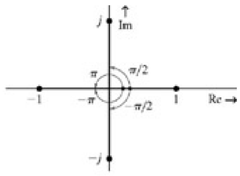
Parte imaginária: $Y = Z\,\text{sen}\,\theta$

Conjugado: $\boldsymbol{Z}^* = X - jY = Ze^{-j\theta}$

Note que: $\boldsymbol{Z} + \boldsymbol{Z}^* = 2X$

$\boldsymbol{Z}\cdot\boldsymbol{Z}^* = |\boldsymbol{Z}|^2 = X^2 + Y^2$





Identidades importantes:

$e^{\pm jk2\pi} = 1 \qquad e^{\pm j\pi} = -1 \qquad e^{\pm jk\pi} = (-1)^k$

$j = e^{j\pi/2} \qquad -j = e^{-j\pi/2} \qquad \frac{1}{j} = -j$

- Parte real e parte imaginária de um sinal:

$$\Re\mathfrak{e}\{x(t)\} = \frac{x(t) + x^*(t)}{2} \qquad \Im\mathfrak{m}\{x(t)\} = \frac{x(t) - x^*(t)}{2j}$$

Relação de Euler

$$e^{j\theta} = \cos\theta + j\,\text{sen}\,\theta$$

$$e^{-j\theta} = \cos\theta - j\,\text{sen}\,\theta$$

$$\cos\theta = \frac{e^{j\theta} + e^{-j\theta}}{2} \qquad \text{sen}\,\theta = \frac{e^{j\theta} - e^{-j\theta}}{2j}$$

Função exponencial complexa e^{st}

- Seja s um número complexo qualquer:

$$s = \sigma + j\omega$$

- Logo: $\begin{aligned} e^{st} &= e^{(\sigma+j\omega)t} \\ &= e^{\sigma t} e^{j\omega t} \\ &= e^{\sigma t}(\cos \omega t + j \operatorname{sen} \omega t) \end{aligned}$

- Por isso, s é chamado de "frequência complexa"

Casos especiais da exponencial complexa

- Seja $x(t) = ke^{st} = ke^{\sigma t}e^{j\omega t}$
- Casos especiais:
  - Se $s = 0$, então $x(t) = k$ (uma constante)
  - Se $\omega = 0$, então $x(t) = ke^{\sigma t}$ (exponencial real)
  - Se $\sigma = 0$, então $x(t) = ke^{j\omega t}$ (senoide complexa)
- Senoides podem ser escritas em termos de exponencias complexas:

$$A\cos(\omega_0 t + \phi) = \frac{A}{2}e^{j\phi}e^{j\omega_0 t} + \frac{A}{2}e^{-j\phi}e^{-j\omega_0 t}$$

Senoide complexa

- Seja $x(t) = ke^{st} = ke^{\sigma t}e^{j\omega t}$
- Com $\sigma = 0$, temos: $x(t) = ke^{j\omega t}$
- Reescrevendo: $x(t) = k(\cos \omega t + j \operatorname{sen} \omega\, t)$
  - Parte real: $k \cdot \cos(\omega t)$
  - Parte imaginária: $k \cdot \operatorname{sen}(\omega t)$
- É um sinal periódico com frequência ω
  - O período é $2\pi/\omega$
- Também conhecida como:
  - Exponencial complexa periódica
  - Senoide complexa
- O módulo (ou amplitude) é $|k|$

Caso geral: sinais exponenciais complexos não periódicos

- Até agora, trabalhamos com exponenciais complexas da forma ke^{st} em que
  - k era um número real; e
  - s era um número real (exponencial real) ou um número puramente imaginário (exponencial complexa periódica)
- Caso geral: k e s são números complexos quaisquer
- Considere: $k = |k|e^{j\theta}$ e $s = \sigma + j\omega$
- Podemos então escrever:

$$ke^{st} = |k|e^{j\theta}e^{(\sigma+j\omega)t} = |k|e^{\sigma t}e^{j(\omega t+\theta)}$$

Sinais exponenciais complexos (caso geral)

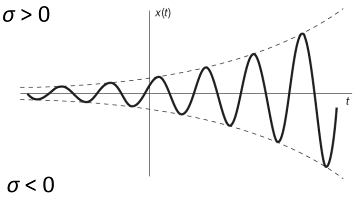
$$ke^{st} = |k|e^{\sigma t}e^{j(\omega t+\theta)}$$

- Usando a relação de Euler:

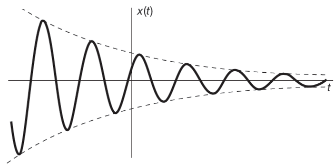
$$ke^{st} = |k|e^{\sigma t}\cos(\omega t+\theta) + j|k|e^{\sigma t}\,\mathrm{sen}(\omega t+\theta)$$

- As partes real e imaginária da exponencial complexa são:
  - para $\sigma = 0 \rightarrow$ senoides com amplitude constante
  - para $\sigma > 0 \rightarrow$ senoides com amplitude crescendo exponencialmente
  - para $\sigma < 0 \rightarrow$ senoides com amplitude decrescendo exponencialmente

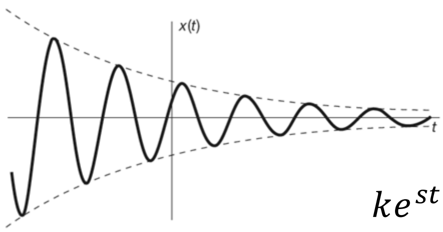
$\sigma > 0$



$\sigma < 0$



Envoltória (ou envelope) da oscilação

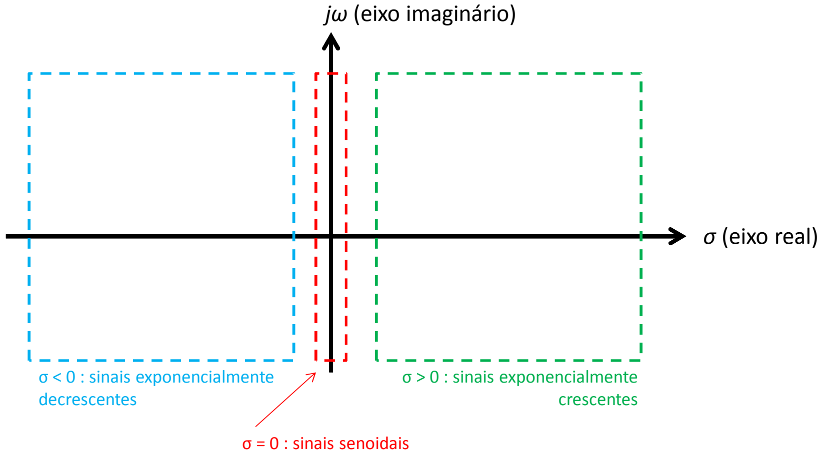


$$ke^{st} = |k|e^{\sigma t}e^{j(\omega t+\theta)}$$

- As linhas pontilhadas correspondem às funções $\pm|k|e^{\sigma t}$
  - Este é o módulo da exponencial complexa ke^{st}
  - Chamado de envoltória (ou envelope) da oscilação

Plano da frequência complexa *s*

$s = \sigma + j\omega$ $\quad\quad$ $e^{st} = e^{\sigma t}(\cos \omega t + j \operatorname{sen} \omega t)$



Obs: com *s* no eixo real (ω = 0), sinal não tem oscilação; com *s* na origem (*s* = 0), sinal é constante

1.5 - Sinais com simetria par e com simetria ímpar

Simetrias com relação à reflexão no tempo

- Simetria par:
  - O sinal é idêntico ao seu equivalente espelhado
  - Isto é: $x(-t) = x(t)$
- Simetria ímpar:
  - O sinal é o negativo do seu equivalente espelhado
  - Isto é: $x(-t) = -x(t)$
  - Um sinal ímpar deve nulo ser em $t = 0$, para que $x(0) = -x(0)$.

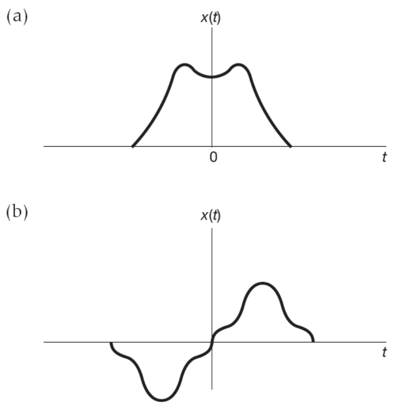


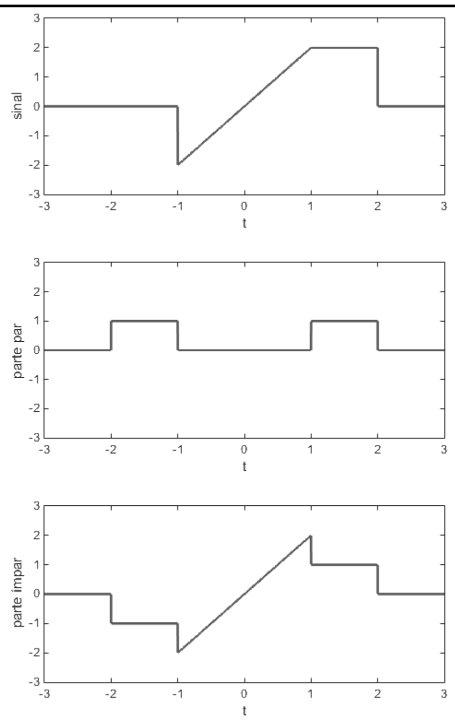
Figura 1.17 (a) Sinal de tempo contínuo com simetria par; (b) sinal de tempo contínuo com simetria ímpar.

Parte par e parte ímpar de um sinal

- Qualquer sinal pode ser decomposto em uma soma de dois sinais: um com simetria par e um com simetria ímpar
- Podemos escrever $x(t) = x_e(t) + x_o(t)$, de modo que:

$$x_e(t) = \frac{1}{2}[x(t) + x(-t)]$$

$$x_o(t) = \frac{1}{2}[x(t) - x(-t)]$$



Propriedades de sinais pares e ímpares

- Multiplicação de sinais:
  sinal par × sinal ímpar = sinal ímpar
  sinal ímpar × sinal ímpar = sinal par
  sinal par × sinal par = sinal par

- Área de $-a$ a $+a$:
  - Sinal par: $\int_{-a}^{+a} x_e(t)dt = 2\int_{0}^{+a} x_e(t)dt$
  - Sinal ímpar: $\int_{-a}^{+a} x_o(t)dt = 0$

Exercício

Usando estas definições:

$$x_e(t) = \frac{1}{2}[x(t) + x(-t)]$$

$$x_o(t) = \frac{1}{2}[x(t) - x(-t)]$$

- mostre que $x_e(t)$ é par
- mostre que $x_o(t)$ é ímpar
- mostre que $x(t) = x_e(t) + x_o(t)$