Sinais e Sistemas em Tempo Contínuo

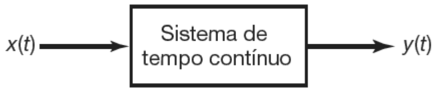
Capítulo 1 – Seções 1.6 a 1.10

Adaptação do material do Prof. João Luiz – 2019/2

Capítulo 1: Sinais e Sistemas

- 1.6 - Sistemas
- 1.7 - Classificação de sistemas
- 1.8 - Descrição entrada-saída
- 1.9 - Descrição interna e externa de um sistema
- 1.10 - Descrição em espaço de estado

1.6 Sistemas



- Sistema: processo que produz uma saída a partir de determinada transformação do sinal de entrada
  - Equalizador de áudio
  - Filtro de imagem do Instagram
  - Corrente em um resistor em resposta à tensão de uma fonte no circuito
  - Velocidade do carro em resposta a pisar no acelerador
  - Som do violão em resposta a uma força aplicada nas cordas
  - Integral ou derivada de uma variável
- Relação de entrada e saída: $x(t) \rightarrow y(t)$

Exemplo

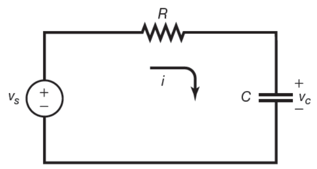


Figura 1.1 Circuito *RC* simples sendo v_s a tensão da fonte e v_c a tensão no capacitor.

- Considere $v_s(t)$ como sinal de entrada e $v_c(t)$ como sinal de saída: $v_s(t) \rightarrow v_c(t)$
- Resolvendo o circuito, encontramos uma equação que relaciona o sinal de saída ao sinal de entrada: $\frac{dv_c(t)}{dt} + \frac{1}{RC}v_c(t) = \frac{1}{RC}v_s(t)$
- A resolução de circuitos será tratada em outra disciplina.

1.7 Classificação de sistemas

- Sistemas lineares ou não lineares
- Sistemas variantes no tempo ou invariantes no tempo
- Sistemas instantâneos (sem memória) ou dinâmicos (com memória)
- Sistemas causais ou não causais
- Sistemas de tempo contínuo ou de tempo discreto
- Sistemas analógicos ou digitais
- Sistemas invertíveis ou não invertíveis
- Sistemas estáveis ou instáveis

1.7-1 Linearidade

- Sistema linear: se a entrada é a soma ponderada de diversos sinais, a saída deve ser a soma ponderada das saídas individuais de cada sinal
- Considere a e b duas constantes complexas quaisquer e que $x_1(t) \rightarrow y_1(t)$ e $x_2(t) \rightarrow y_2(t)$
- Deve satisfazer duas propriedades:
  - Aditividade: $x_1(t) + x_2(t) \rightarrow y_1(t) + y_2(t)$
  - Homogeneidade: $a\, x_1(t) \rightarrow a\, y_1(t)$
- Condição necessária e suficiente: $a\, x_1(t) + b\, x_2(t) \rightarrow a\, y_1(t) + b\, y_2(t)$

Superposição

- Sistemas lineares têm a propriedade da superposição:
  - Seja $y_k(t)$ a resposta ao sinal $x_k(t)$
  - Se a entrada é:

$$x(t) = \sum_k a_k x_k(t) = a_1 x_1(t) + a_2 x_2(t) + a_3 x_3(t) + \cdots$$

  - Então a saída será:

$$y(t) = \sum_k a_k y_k(t) = a_1 y_1(t) + a_2 y_2(t) + a_3 y_3(t) + \cdots$$

Entrada nula, saída nula

- Em um sistema linear, se a entrada $x(t)$ é igual a zero, então a saída $y(t)$ também é igual a zero
- É uma consequência da homogeneidade:
  - Se a resposta à entrada $x_1(t)$ é o sinal $y_1(t)$, então, pela homogeneidade: $a\, x_1(t) \rightarrow a\, y_1(t)$
  - Mas, se $a = 0$, então $0 \cdot x_1(t) \rightarrow 0 \cdot y_1(t)$.
  - Portanto: $0 \rightarrow 0$
- Note que sistemas como $y(t) = x(t)+3$ são não lineares, pois $0 \rightarrow 3$.

Exemplo

- Considere o seguinte sistema *S*: $y(t) = tx(t)$
- Para determinar se *S* é linear, usaremos duas entradas arbitrárias, $x_1(t)$ e $x_2(t)$: $x_1(t) \rightarrow y_1(t) = tx_1(t)$

$$x_2(t) \rightarrow y_2(t) = tx_2(t)$$

- Seja $x_3(t)$ uma combinação linear de $x_1(t)$ e $x_2(t)$, em que *a* e *b* são constantes arbitrárias: $x_3(t) = ax_1(t) + bx_2(t)$
- Se a entrada é $x_3(t)$, então a saída será:

$$\begin{aligned} y_3(t) &= tx_3(t) \\ &= t(ax_1(t) + bx_2(t)) \\ &= atx_1(t) + btx_2(t) \\ &= ay_1(t) + by_2(t) \end{aligned}$$

- Portanto, o sistema é linear!

Exemplo

- Considere o seguinte sistema *S*: $y(t) = x^2(t)$
- Para determinar se *S* é linear, usaremos duas entradas arbitrárias, $x_1(t)$ e $x_2(t)$: $x_1(t) \rightarrow y_1(t) = x_1^2(t)$

$$x_2(t) \rightarrow y_2(t) = x_2^2(t)$$

- Seja $x_3(t)$ uma combinação linear de $x_1(t)$ e $x_2(t)$, em que *a* e *b* são constantes arbitrárias: $x_3(t) = ax_1(t) + bx_2(t)$
- Se a entrada é $x_3(t)$, então a saída será:

$$\begin{aligned} x_3(t) \rightarrow y_3(t) &= x_3^2(t) \\ &= (ax_1(t) + bx_2(t))^2 \\ &= a^2x_1^2(t) + b^2x_2^2(t) + 2abx_1(t)x_2(t) \\ &= a^2y_1(t) + b^2y_2(t) + 2abx_1(t)x_2(t) \end{aligned}$$

- Como $y_3(t) \neq a\, y_1(t) + b\, y_2(t)$, o sistema é não linear!

Exemplo

- Considere o sistema: $y(t) = \mathcal{Re}\{x(t)\}$
- Seja $x_1(t) = r(t) + j\, s(t)$, em que r(t) e s(t) são sinais reais
- Então: $y_1(t) = \mathcal{Re}\{x_1(t)\} = r(t)$
- Seja $x_2(t) = a \cdot x_1(t)$
  - Se fosse linear, então $a \cdot x_1(t) \rightarrow a \cdot y_1(t)$ para qualquer escalar complexo a
  - Então, $y_2(t) = \mathcal{Re}\{x_2(t)\}$ deve ser igual a: $a \cdot y_1(t)$
- Mas, por exemplo, para $a = j$, temos que:

$$x_2(t) = jx_1(t) = jr(t) - s(t)$$

$$y_2(t) = \mathcal{Re}\{x_2(t)\} = \mathcal{Re}\{jr(t) - s(t)\} = -s(t)$$

- Entretanto, $a \cdot y_1(t) = j \cdot r(t)$
- Como $y_2(t) \neq a \cdot y_1(t)$ para pelo menos este exemplo, então o sistema é <u>não linear</u>.

Exemplo

- Considere o sistema: $y(t) = 2x(t) + 3$
- Considere a e b duas constantes complexas quaisquer e que $x_1(t) \rightarrow y_1(t)$, $x_2(t) \rightarrow y_2(t)$, $x_3(t) \rightarrow y_3(t)$ e $x_4(t) \rightarrow y_4(t)$
  - Temos que $y_1(t) = 2x_1(t) + 3$ e $y_2(t) = 2x_2(t) + 3$
- Deve satisfazer <u>as duas</u> propriedades:
  - Aditividade: $x_1(t) + x_2(t) \rightarrow y_1(t) + y_2(t)$
  - Homogeneidade: $a\, x_1(t) \rightarrow a\, y_1(t)$
- Aditividade: se $x_3(t) = x_1(t) + x_2(t)$
  - Então: $y_3(t) = 2x_3(t) + 3 = 2[x_1(t) + x_2(t)] + 3$
  - Assim: $y_3(t) = 2x_1(t) + 2x_2(t) + 3$
  - Mas: $y_1(t) + y_2(t) = [2x_1(t) + 3]+[2x_2(t) + 3] = 2x_1(t) + 2x_2(t) + 6$
  - Portanto, $y_3(t) \neq y_1(t) + y_2(t)$, e o sistema é <u>não linear</u>
- Homogeneidade: se $x_4(t) = a\, x_1(t)$
  - Então: $y_4(t) = 2x_4(t) + 3 = 2[a\, x_1(t)] + 3$
  - Assim: $y_4(t) = 2\, a\, x_1(t) + 3$
  - Mas: $a\, y_1(t) = a\, [2x_1(t) + 3] = 2\, a\, x_1(t) + 3\, a$
  - Portanto, $y_4(t) \neq a\, y_1(t)$, e o sistema é <u>não linear</u>

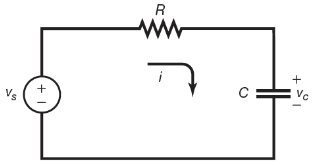
Condições iniciais de um sistema linear

- Resposta nula:
  - Saída quando a entrada é nula
  - Depende somente das condições iniciais do sistema
    - Ex: circuito com capacitor inicialmente carregado
- Resposta em estado nulo
  - Saída quando as condições iniciais do sistema são nulas
  - Depende somente da entrada
    - Ex: circuito com capacitores e indutores inicialmente descarregados
- Saída do sistema linear com condições iniciais não nulas:

  saída = resposta nula + resposta em estado nulo

1.7-2 Invariância no tempo

- <u>Sistema invariante no tempo</u>: seu comportamento é fixo ao longo do tempo
- Exemplo: circuito elétrico
  - Os valores de R e C não variam ao longo do tempo
  - A resposta a um sinal amanhã será exatamente igual à resposta a esse mesmo sinal hoje



$$\frac{dv_c(t)}{dt} + \frac{1}{RC}v_c(t) = \frac{1}{RC}v_s(t)$$

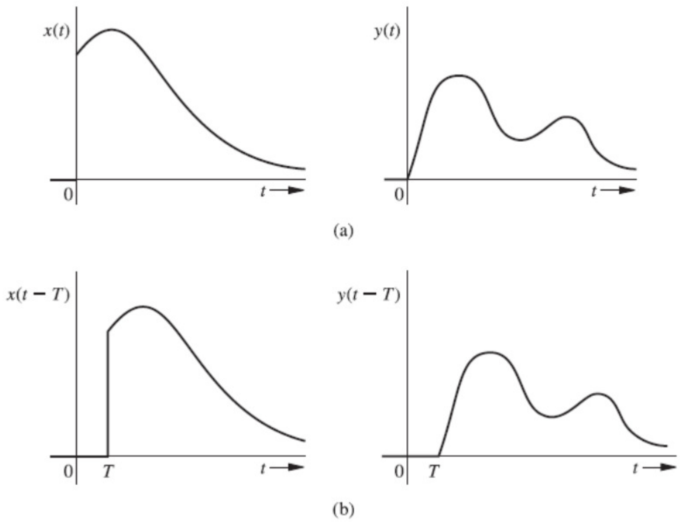
Figura 1.1 Circuito *RC* simples sendo v_s a tensão da fonte e v_c a tensão no capacitor.

Invariância no tempo (continuação)

- Sistema invariante no tempo:
  - Um deslocamento no tempo do sinal de entrada resulta em um deslocamento idêntico no sinal de saída
  - Se a saída para $x(t)$ é $y(t)$, então a saída para o sinal atrasado $x(t-t_0)$ é $y(t-t_0)$.
- Exemplos de sistemas variantes no tempo:
  - $y(t) = t\,x(t)$
  - $y(t) = x(2t)$

Invariância no tempo (continuação)

Sistema invariante



Exemplo

- Sistema: $y(t) = \text{sen}[x(t)]$
- Para verificar invariância, esta deve ser válida para qualquer deslocamento t_0
- Entrada: $x_1(t)$; saída: $y_1(t) = \text{sen}[x_1(t)]$
- Entrada deslocada: $x_2(t) = x_1(t-t_0)$
  - Saída resultante: $y_2(t) = \text{sen}[x_2(t)] = \text{sen}[x_1(t-t_0)]$
- Para ser invariante no tempo, $y_2(t)$ deve ser igual a $y_1(t-t_0)$
  - Aplicando o deslocamento em $y_1(t)$, temos $y_1(t-t_0) = \text{sen}[x_1(t-t_0)]$
- Como $y_2(t)$ é igual a $y_1(t-t_0)$, o sistema é invariante no tempo

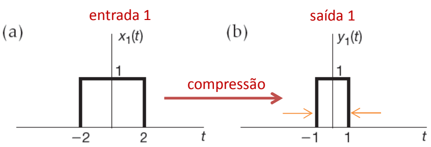
Exemplo

- Sistema: $y(t) = t\,x(t)$
- Para verificar invariância, esta deve ser válida para qualquer deslocamento t_0
- Entrada: $x_1(t)$; saída: $y_1(t) = t\,x_1(t)$
- Entrada deslocada: $x_2(t) = x_1(t-t_0)$
  - Saída resultante: $y_2(t) = t\,x_2(t) = t\,x_1(t-t_0)$
- Para ser invariante no tempo, $y_2(t)$ deve ser igual a $y_1(t-t_0)$
  - Aplicando o deslocamento em $y_1(t)$, temos $y_1(t-t_0) = (t-t_0)\,x_1(t-t_0)$
- Como $y_2(t)$ é diferente de $y_1(t-t_0)$, o sistema é variante no tempo

(continuação)

- Para provar invariância, bastaria encontrar um sinal que viola a invariância
- Mesmo sistema: $y(t) = t\, x(t)$
- Exemplo 1:
  - Entrada: $x_1(t) = 1$; saída: $y_1(t) = t\, x_1(t) = t$
  - Entrada deslocada: $x_2(t) = x_1(t{-}t_0) = 1$
    - Saída resultante: $y_2(t) = t\, x_2(t) = t$
  - Para ser invariante no tempo, $y_2(t)$ deve ser igual a $y_1(t{-}t_0)$
    - Aplicando o deslocamento em $y_1(t)$, temos $y_1(t{-}t_0) = t{-}t_0$
  - Como $y_2(t)$ é diferente de $y_1(t{-}t_0)$, o sistema é <u>variante</u> no tempo
- Exemplo 2:
  - Entrada: $x_1(t) = \delta(t)$; saída: $y_1(t) = t\, \delta(t) = 0$ p/ qualquer t
  - Entrada deslocada: $x_2(t) = x_1(t{-}1) = \delta(t{-}1)$
    - Saída resultante: $y_2(t) = t\, x_2(t) = t\, \delta(t{-}1) = \delta(t{-}1) \neq 0$
  - Como $y_2(t) \neq 0$ e $y_1(t{-}t_0) = 0$, o sistema é <u>variante</u> no tempo

Exemplo



- Sistema: $y(t) = x(2t)$
  - Compressão no tempo por um fator de 2
- O deslocamento também será comprimido!
  - Sistema <u>variante</u> no tempo!

Exemplo

- Sistema: $y(t) = x(2t)$
  - Compressão no tempo por um fator de 2
- O deslocamento também será comprimido!
  - Sistema <u>variante</u> no tempo!

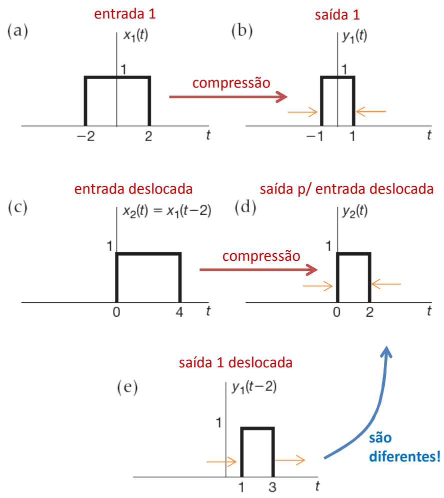


Figura 1.47 (a) Entrada $x_1(t)$ para o sistema do Exemplo 1.16; (b) saída $y_1(t)$ correspondente a $x_1(t)$; (c) entrada deslocada $x_2(t) = x_1(t-2)$; (d) saída $y_2(t)$ correspondente a $x_2(t)$; (e) sinal deslocado $y_1(t-2)$. Note-se que $y_2(t) \neq y_1(t-2)$, mostrando que o sistema não é invariante no tempo.

1.7-3 Sistemas instantâneos ou dinâmicos

- <u>Sistema instantâneo ou estático (sem memória)</u>: saída em um determinado instante depende somente da entrada naquele mesmo instante.
  - Tensão no resistor: $v(t) = R\,i(t)$
  - Sistema identidade: $y(t) = x(t)$
- <u>Sistema dinâmico (com memória):</u> saída em um determinado instante depende não só da entrada naquele mesmo instante, mas também dos valores de entrada e(ou) saída em instantes anteriores e(ou) futuros.
  - Tensão no capacitor: $v(t) = \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} i(\tau)d\tau$
  - Corrente no indutor: $i(t) = \frac{1}{L}\int_{-\infty}^{t} v(\tau)d\tau$
- Em muitos sistemas físicos, a "memória" está associada ao armazenamento de energia.

1.7-4 Causalidade

- Sistema é causal se a saída depende somente dos valores de entrada e(ou) saída presentes e(ou) passados.
  - Exemplo: tensão em um capacitor (depende dos valores de corrente presente e passados)

$$v(t) = \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} i(\tau)d\tau$$

- Todos os sistemas sem memória são causais!
  - Exemplo: $y(t) = 3x(t)$
- Se a saída no instante presente depende de valores futuros de entrada e(ou) saída, o sistema é não causal.
  - Exemplo: $y(t) = x(t+1)$

Não-causalidade

- É comum quando a variável independente não é o tempo
  - Exemplo: um filtro de imagens calcula a saída para um pixel com base nesse pixel e nos pixels vizinhos, em todas as direções
- É viável e pode ser útil no processamento de sinais gravados previamente
  - Exemplo: um filtro não causal para suavizar um sinal de eletrocardiograma gravado

Exemplos

- É preciso verificar a causalidade para todos os instantes!
  - Exemplo: sistema $y(t) = x(-t)$
    - Parece causal, pois, para $t > 0$, $y(t)$ só depende de valores anteriores a $t = 0$.
    - Entretanto, para $t < 0$, $y(t)$ depende de valores futuros.
    - O sistema é não causal!
- Distinguir o efeito da entrada dos efeitos das outras funções usadas no sistema
  - Exemplo: sistema $y(t) = x(t) \cos(t+1)$
  - Parece não causal, pois a saída $y(t)$ depende do valor da função $\cos(t)$ para um instante no futuro $(t+1)$
  - Mas é causal, pois a saída não depende de valores futuros de $x(t)$, somente do valor presente!
  - É também um sistema sem memória!
  - Entretanto, é variante no tempo!

1.7-5 Sistemas de tempo contínuo ou de tempo discreto

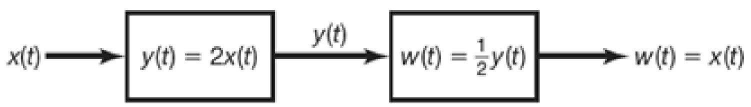
- Sistema de tempo contínuo:
  - Entrada e saída são sinais de tempo contínuo
- Sistema de tempo discreto:
  - Entrada e saída são sinais de tempo discreto

1.7-6 Sistema analógico ou digital

- Sistema analógico:
  - Entrada e saída são sinais analógicos
- Sistema digital:
  - Entrada e saída são sinais digitais

1.7-7 Invertibilidade e sistemas inversos

- Para ser sistema <u>invertível</u> é necessário que entradas distintas levem a saídas distintas
- Sistema invertível: $y(t) = 2x(t)$
  - Sistema inverso: $w(t) = ½\, y(t)$
- <u>Sistema inverso</u>: aquele que, se colocado em cascata com o sistema original, produz uma saída $w(t)$ igual a entrada $x(t)$



1.7-8 Estabilidade

- A estabilidade pode ser interna ou externa
  - Estabilidade interna será discutida no capítulo 2
  - Vamos nos restringir aqui à estabilidade externa (estabilidade BIBO)
  - BIBO: bounded-input / bounded-output
- O sistema é BIBO estável se, para entradas de amplitude limitada (sempre menor que infinito), a saída também é limitada

Estabilidade e dissipação de energia

- Estabilidade geralmente resulta de mecanismos que dissipam energia
  - Em um circuito elétrico, o resistor dissipa energia
    - Sem resistores, um circuito elétrico pode ser instável
  - Em um carro em movimento, o atrito causa dissipação de energia
- A instabilidade geralmente resulta da ausência de dissipação de energia e de alguma realimentação indesejada
  - Colocar uma pequena quantia em um fundo com juros fixos faz com que o saldo cresça indefinidamente
- Exemplo do carro em movimento:
  - Se a força aumentar, a velocidade aumenta, mas não sem limites, pois a força de atrito também aumenta
  - Sem atrito, a velocidade aumentaria indefinidamente, mesmo que a força fosse mantida pequena, mas constante

Exemplo: sistema BIBO instável

- A integral abaixo é um sistema BIBO instável:
  - Se $x(t) = c$, a saída $y(t)$ diverge, mesmo para valores pequenos de c
  - Se $c > 0$, então para $t \to \infty$, temos que $y(t) \to \infty$

$$y(t) = \int_0^t x(\tau)d\tau \xrightarrow{x(t)=c} y(t) = \int_0^t c d\tau = c\tau \Big|_0^t = ct$$

Exemplo: verificando estabilidade BIBO

- Para provar que é BIBO instável, basta encontrar um exemplo de sinal de entrada de amplitude limitada que faz a saída divergir.
- Para provar que é BIBO estável, precisamos verificar que toda e qualquer entrada limitada resulta em saída limitada.
- S_1: $y(t) = tx(t)$
  - Se $x(t) = 1$, então $y(t) = t$. Com $t \to \infty$, temos $y(t) \to \infty$. Portanto, o sistema é BIBO instável.
- S_2: $y(t) = e^{x(t)}$
  - Este sistema é BIBO estável.
  - Por exemplo, se $x(t) \leq 100$, então $y(t) \leq e^{100} = 2{,}69 \times 10^{43}$. O valor de saída pode chegar a ser muito grande, mas não passará desse valor.

(continuação)

Verificando se S_2 é BIBO estável:

- Suponha um número positivo arbitrário B.
- Suponha que $x(t)$ é um sinal arbitrário, mas limitado por B:

  $|x(t)| < B$, isto é, $-B < x(t) < B$, para qualquer t.
- Se $y(t) = e^{x(t)}$, então, temos que: $e^{-B} < y(t) < e^{B}$.
- Isto é, a saída é limitada por e^{B}
- Portanto, o sistema é, de fato, BIBO estável

1.8 Modelo de sistema: descrição entrada-saída

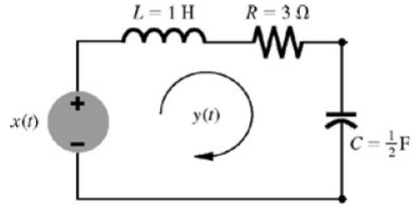
- Descrição em termos de medidas nos terminais de entrada e saída do sistema

- Exemplos:
  - 1.8-1 Sistemas elétricos
  - 1.8-2 Sistemas mecânicos
  - 1.8-3 Sistemas eletromecânicos

Operadores D e $1/D$

- Operador diferencial: $$Dx(t) \equiv \frac{d}{dt}x(t)$$
- Operador integral: $$\frac{1}{D}x(t) \equiv \int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau$$
- Os operadores D e 1/D não são comutativos!
  - Note que $D(1/D) = 1$ para qualquer sinal
  - Mas $(1/D)D \neq 1$ para sinais constantes, por exemplo

1.8-1 Sistemas elétricos



- Entrada: tensão na fonte, x(t)
- Saída: corrente na malha, y(t)

Para os elementos:

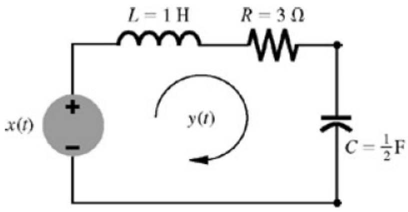
$$v_L(t) = L\frac{di_L(t)}{dx}$$

$$v_C(t) = \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} i_C(\tau)d\tau$$

$$v_R(t) = Ri_R(t)$$

Lei de interligação (LKT):

$$x(t) = L\frac{dy(t)}{dt} + Ry(t) + \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} y(\tau)d\tau$$



Resolvendo o circuito:

- Notação compacta:

$$\frac{d^2}{dt^2}y(t) + 3\frac{d}{dt}y(t) + 2y(t) = \frac{d}{dt}x(t)$$

$$(D^2 + 3D + 2)y(t) = Dx(t)$$

1.8-2 Sistemas mecânicos

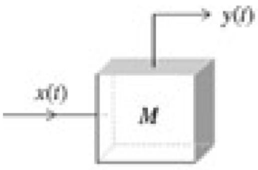
- Sistemas translacionais
- Sistemas rotacionais

Sistemas translacionais

- Elementos básicos:

Entrada: força, *x*(*t*)
Saída: posição, *y*(*t*)

massa ideal

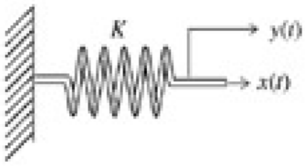


descrição entrada-saída:

$MD^2y(t) = x(t)$

M: massa

mola linear

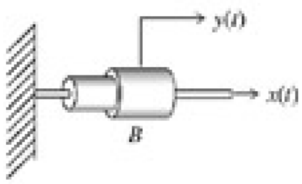


descrição entrada-saída:

$Ky(t) = x(t)$

K: constante da mola

amortecedor por
atrito viscoso

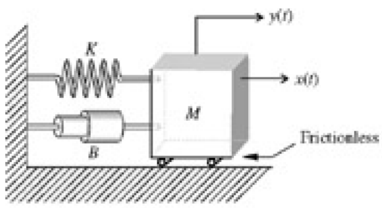


descrição entrada-saída:

$BDy(t) = x(t)$

B: coef. de amortecimento

Exemplo 1.12



- Entrada: força, *x*(*t*)
  Saída: posição da massa, *y*(*t*)
- Descrição entrada-saída:

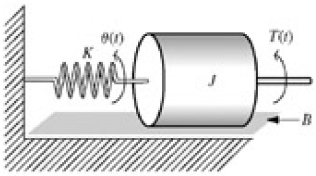
$$M\frac{d^2}{dt^2}y(t) + B\frac{d}{dt}y(t) + Ky(t) = x(t)$$

- Notação compacta: $(MD^2 + BD + K)y(t) = x(t)$

Sistemas rotacionais

- Entrada: torque, $T(t)$
- Saída: posição angular, $\theta(t)$
- Elementos de sistema:
  - Massa rotacional (ou momento de inércia), J
    - Descrição entrada-saída: $JD^2\theta(t) = \mathrm{T}(t)$
  - Molas de torção, com constante K
    - Descrição entrada-saída: $K\theta(t) = \mathrm{T}(t)$
  - Amortecedores de torção, com coeficiente de amortecimento B
    - Descrição entrada-saída: $BD\theta(t) = \mathrm{T}(t)$

Exercício E1.19



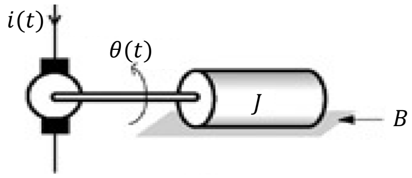
- Entrada: torque, $T(t)$
  Saída: posição angular, $\theta(t)$
- Descrição entrada-saída:

$$J\frac{d^2}{dt^2}\theta(t) + B\frac{d}{dt}\theta(t) + K\theta(t) = \mathrm{T}(t)$$

- Notação compacta: $(JD^2 + BD + K)\theta(t) = \mathrm{T}(t)$

1.8-3 Sistemas eletromecânicos

- Convertem sinais elétricos em movimentos mecânicos
- Exemplo: motor controlado por fonte de corrente
  - Entrada: corrente elétrica, $i(t)$
  - Saída: posição angular, $\theta(t)$



- Descrição entrada-saída: $J\dfrac{d^2}{dt^2}\theta(t) + B\dfrac{d}{dt}\theta(t) = K_T i(t)$

momento de inércia

coeficiente de amortecimento

constante do motor

- Notação compacta: $(JD^2 + BD)\theta(t) = K_T i(t)$

1.9 Descrição interna e externa de um sistema

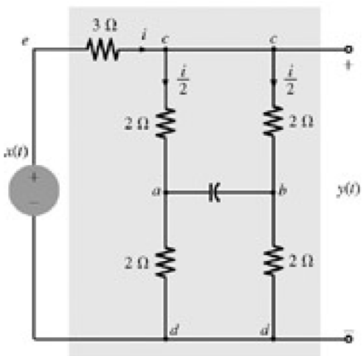
- Descrição externa:
  - Pode ser obtida por meio de medições nos terminais de entrada e saída
  - Exemplo:
    - Descrição entrada-saída (seção 1.8)
    - Resposta ao impulso (seção 2.3)
- Descrição interna:
  - Capaz de fornecer a informação completa sobre todos os possíveis sinais do sistema
  - Exemplo:
    - Descrição em espaço de estado (seção 1.10 e capítulo 10)
- A descrição externa pode ser determinada a partir da descrição interna
  - O contrário nem sempre é verdadeiro

Descrição interna e externa (continuação)

- Para muitos sistemas, as descrições interna e externa são equivalentes
- Quando não são equivalentes:
  - A descrição externa fornece um quadro inadequado do sistema
  - O sistema é chamado de “não controlável” ou “não observável”
  - Exemplo: circuito elétrico da Fig. 1.41

Exemplo: Figura 1.41

- O comportamento do capacitor neste circuito não pode ser observado pela relação entre as tensões nos terminais de entrada e saída do circuito:

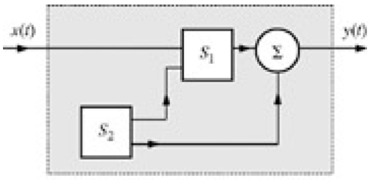


$$y(t) = \frac{2}{5}x(t)$$

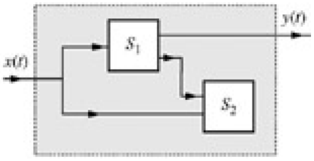
(independentemente da carga armazenada no capacitor)

Sistemas não controláveis e não observáveis

- Neste sistema, o subsistema S_2 não é controlado pela entrada $x(t)$:



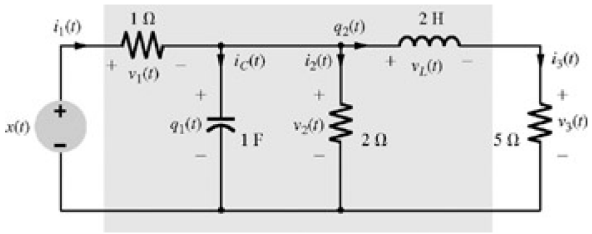
- Neste sistema, o subsistema S_2 não é observável pela saída $y(t)$:



1.10 Descrição em espaço de estado

- Descrição entrada-saída:
  - É um tipo de descrição externa
  - Foca na "variável de saída" e em sua relação com a "variável de entrada"
  - A descrição é dada pela "equação de saída"
    - Exemplo: $y(t) = 3\,x(t)$
  - Se o sistema é de ordem N, o sistema é descrito por uma equação diferencial de ordem N
- Descrição em espaço de estado:
  - É um tipo de descrição interna
  - Incorpora as chamadas "variáveis de estado"
    - Modelam o comportamento de sinais internos do sistema
  - A descrição é dada por meio de "equações de estado"
    - Mostram a relação entre variáveis de entrada e saída e as variáveis de estado
  - Se o sistema é de ordem N, o sistema é descrito por N equações diferenciais de 1ª ordem

Exemplo 1.14

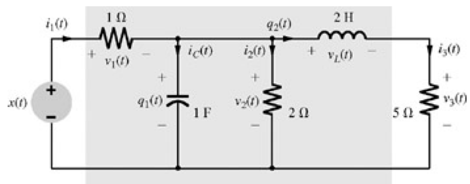


- Neste circuito, temos duas variáveis de estado:
  - Tensão no capacitor, $q_1(t)$
  - Corrente no indutor, $q_2(t)$
- Equações de estado: $\frac{d}{dt}q_1(t) = -\frac{3}{2}q_1(t) - q_2(t) + x(t)$

$$\frac{d}{dt}q_2(t) = \frac{1}{2}q_1(t) - \frac{5}{2}q_2(t)$$

- Equação de saída: $v_3(t) = 5q_2(t)$

Exemplo 1.14: análise do resultado

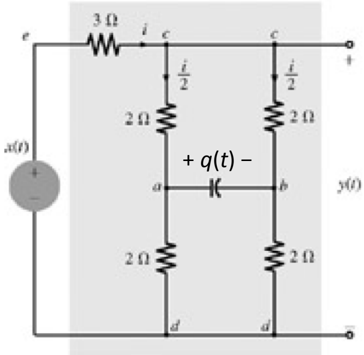


- Equações de estado: $\frac{d}{dt}q_1(t) = -\frac{3}{2}q_1(t) - q_2(t) + x(t)$

$$\frac{d}{dt}q_2(t) = \frac{1}{2}q_1(t) - \frac{5}{2}q_2(t)$$

- Equação de saída: $v_3(t) = 5q_2(t)$
- Note que:
  - Os estados $q_1(t)$ e $q_2(t)$ são controláveis (direta ou indiretamente) pela entrada $x(t)$
  - Os estados $q_1(t)$ e $q_2(t)$ são observáveis (direta ou indiretamente) pela saída $y(t)$
- O sistema é controlável e observável!

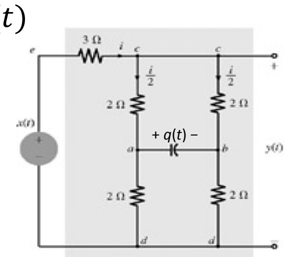
Exemplo 1.15



- Descrição interna do circuito discutido na seção 1.9 (figura 1.41)
- Só tem uma variável de estado:
  - Tensão no capacitor, $q(t)$
- Equação de estado: $\frac{d}{dt}q(t) = -\frac{1}{2}q(t)$
- Equação de saída: $y(t) = \frac{2}{5}x(t)$

Exemplo 1.15: análise do resultado

- Equação de estado: $\frac{d}{dt}q(t) = -\frac{1}{2}q(t)$
- Equação de saída: $y(t) = \frac{2}{5}x(t)$



- Note que:
  - O estado $q(t)$ não é controlável pela entrada $x(t)$
  - O estado $q(t)$ não é observável pela saída $y(t)$
- O sistema não é controlável nem observável!