



# Capítulo 2

Análise no domínio do tempo de sistemas em tempo contínuo



## Análise do domínio do tempo de sistemas em tempo contínuo

- 2.1 - Introdução
- 2.2 - Resposta à entrada nula
- 2.3 - Resposta ao impulso
- 2.4 - Resposta em estado nulo
- 2.5 - Solução clássica de equações diferenciais

Serão discutidos os **Sistemas Lineares Contínuos e Invariantes no Tempo (LCIT)**.



## Introdução

- Dado um sistema com **entrada**  $x(t)$  e **saída**  $y(t)$  temos



- A saída e a entrada se relacionam pela **equação diferencial** (de forma geral)

$$\frac{d^N}{dt^N}y(t) + a_1 \frac{d^{N-1}}{dt^{N-1}}y(t) + \dots + a_{N-1} \frac{d}{dt}y(t) + a_N y(t) =$$

**Consideraremos:**  
 $a_i$  e  $b_j$  **constantes Reais**

$$b_{N-M} \frac{d^M}{dt^M}x(t) + b_{N-M+1} \frac{d^{M-1}}{dt^{M-1}}x(t) + \dots + b_{N-1} \frac{d}{dt}x(t) + b_N x(t)$$

- Ou na **forma compacta**

$$(D^N + a_1 D^{N-1} + \dots + a_{N-1} D + a_N)y(t) = (b_{N-M} D^M + b_{N-M+1} D^{M-1} + \dots + b_{N-1} D + b_N)x(t)$$

- Onde se assume  $M \leq N$  (devido à **causalidade** e **ação derivativa**)



## Introdução

- Dada a representação compacta:

$$(D^N + a_1 D^{N-1} + \dots + a_{N-1} D + a_N)y(t) = (b_{N-M} D^M + b_{N-M+1} D^{M-1} + \dots + b_{N-1} D + b_N)x(t)$$

- Definimos os polinômios operadores

$$Q(D) = D^N + a_1 D^{N-1} + \dots + a_{N-1} D + a_N$$

$$P(D) = b_{N-M} D^M + b_{N-M+1} D^{M-1} + \dots + b_{N-1} D + b_N$$

- Então, na forma compacta

$$Q(D)y(t) = P(D)x(t)$$



## Introdução

Já vimos que

- Resposta à **entrada nula**:
  - Saída quando a **entrada é nula** ( $x(t)=0$ )
  - Depende somente das **condições iniciais** do sistema
- Resposta em **estado nulo**
  - Saída quando as **condições iniciais do sistema são nulas**
  - Depende somente da entrada ( $x(t) \neq 0$ )
- Saída do **sistema linear** com **condições iniciais não nulas e entrada não nula**:
 

*saída = resposta à entrada nula + resposta em estado nulo*



## Resposta à entrada nula

- O sistema responde às **condições internas** (iniciais)



- Seja  $y_0(t)$  a resposta quando  $x(t) \equiv 0$

$$Q(D)y_0(t) = 0$$

$$(D^N + a_1 D^{N-1} + \dots + a_{N-1} D + a_N)y_0(t) = 0$$

- Para que as  $N$  derivadas sucessivas de  $y_0(t)$  se anulem, **é preciso** que  $D^k y_0(t)$  tenha a mesma forma para qualquer  $k$
- Então, vamos presumir então que:

$$y_0(t) = ce^{\lambda t}$$



## Resposta à entrada nula

- Determinação de  $y_0(t)$

$$(D^N + a_1 D^{N-1} + \dots + a_{N-1} D + a_N) y_0(t) = 0$$

- Se  $y_0(t) = c e^{\lambda t}$ , então
 
$$\begin{aligned} D y_0(t) &= c \lambda e^{\lambda t} \\ D^2 y_0(t) &= c \lambda^2 e^{\lambda t} \\ &\vdots \\ D^N y_0(t) &= c \lambda^N e^{\lambda t} \end{aligned}$$

- Substituindo

$$c(\lambda^N + a_1 \lambda^{N-1} + \dots + a_{N-1} \lambda + a_N) e^{\lambda t} = 0$$

- Temos a **solução não trivial**

$$\lambda^N + a_1 \lambda^{N-1} + \dots + a_{N-1} \lambda + a_N = 0$$



## Resposta à entrada nula

- Temos a **solução não trivial**  $\lambda^N + a_1 \lambda^{N-1} + \dots + a_{N-1} \lambda + a_N = 0$

- Que pode ser reescrito

$$Q(\lambda) = 0$$

- ✓ É a chamada **equação característica** do sistema LCIT
- ✓ O **polinômio característico** do sistema LCIT é dado por  $Q(\lambda)$
- ✓ O polinômio característico é **intrínseco ao sistema**, pois independe de  $x(t)$

- Ao **fatorar** o polinômio característico, temos a equação característica da forma

$$(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) \dots (\lambda - \lambda_N) = 0$$



## Resposta à entrada nula

- Polinômio característico na forma fatorada e **solução da equação característica**

$$(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) \dots (\lambda - \lambda_N) = 0$$

- As **raízes da equação característica** são:  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N$
- Supondo **raízes distintas**, temos  **$N$  possíveis soluções para  $y_0(t)$** :

$$c_1 e^{\lambda_1 t}, c_2 e^{\lambda_2 t}, \dots, c_N e^{\lambda_N t}$$

- Somando essas  $N$  soluções, obtemos a **solução homogênea**

$$y_0(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t} + \dots + c_N e^{\lambda_N t}$$



## Resposta à entrada nula

- A **solução homogênea** é a **resposta do sistema à entrada nula**

$$y_0(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t} + \dots + c_N e^{\lambda_N t}$$

- As constantes  $c_1, c_2, \dots, c_N$  são determinadas pelas  **$N$  restrições impostas pelas condições iniciais**
- As constantes  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N$  são chamadas:

- ✓ Raízes características do sistema
- ✓ Valores característicos do sistema
- ✓ Autovalores do sistema
- ✓ Frequências naturais do sistema



## Resposta à entrada nula

- A **solução homogênea** é a **resposta do sistema à entrada nula**

$$y_0(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t} + \dots + c_N e^{\lambda_N t}$$

- As **exponenciais**  $e^{\lambda_1 t}, e^{\lambda_2 t}, \dots, e^{\lambda_N t}$  são chamadas de:
  - ✓ **Modos** característicos do sistema
  - ✓ **Modos** naturais do sistema
  - ✓ Ou, simplesmente, **modos** do sistema
- Há **um modo característico** para **cada raiz** do sistema
- Resposta à entrada nula = **combinação linear dos modos do sistema**
- Os modos do sistema são **essenciais na análise dinâmica do sistema**



## Resposta à entrada nula

- **Modificação** a ser feita no caso de **raízes características repetidas**
- Seja o caso de um sistema com **duas raízes características iguais** ( $\lambda_0$ )

$$(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) = 0$$

- Onde  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_0$

$$(\lambda - \lambda_0)^2 = \lambda^2 - 2\lambda_0\lambda + \lambda_0^2 = 0$$

- **Equação diferencial homogênea**

$$(D^2 + a_1 D + a_2)y_0(t) = 0$$

- Onde  $a_1 = -2\lambda_0$  e  $a_2 = \lambda_0^2$
- De **forma geral**, para o caso de **duas raízes características iguais**, temos a **equação diferencial homogênea**

$$(D - \lambda)^2 y_0(t) = 0$$



## Resposta à entrada nula

- De forma geral, para o caso de duas raízes características iguais, temos a equação diferencial homogênea

$$(D - \lambda)^2 y_0(t) = 0$$

- Pode-se mostrar (por **substituição**) que a **solução** é  $y_0(t) = (c_1 + c_2 t)e^{\lambda t}$

- Temos **dois modos naturais**:  $e^{\lambda t}$  e  $te^{\lambda t}$

- Para o **caso geral** de  $r$  raízes características iguais, a **solução geral** é

$$y_0(t) = (c_1 + c_2 t + c_3 t^2 + \dots + c_r t^{r-1})e^{\lambda t}$$

- E os **modos naturais** são:  $e^{\lambda t}$ ,  $te^{\lambda t}$ ,  $t^2 e^{\lambda t}$ , ...,  $t^{r-1} e^{\lambda t}$



## Resposta à entrada nula

- Se o **polinômio característico** for

$$Q(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^r (\lambda - \lambda_{r+1}) \dots (\lambda - \lambda_N)$$

- a **resposta à entrada nula** será

$$y_0(t) = (c_1 + c_2 t + \dots + c_r t^{r-1})e^{\lambda_1 t} + c_{r+1} e^{\lambda_{r+1} t} + \dots + c_N e^{\lambda_N t}$$

- São  $N$  raízes características, dentre essas  $r$  repetidas



## Resposta à entrada nula

- No caso em que aparecem **raízes complexas**, se tivermos uma raiz complexa como raiz, o seu complexo conjugado também será raiz
- **Raízes complexas aparecem na forma de pares de raízes complexas conjugadas**
- Dito de outra forma, se  $\alpha + j\beta$  é uma raiz característica de um sistema LCIT real, então  $\alpha - j\beta$  também é raiz característica
- Essas duas raízes, apesar de complexas conjugadas, **são distintas**
- Seja um sistema com duas raízes (apenas) complexas conjugadas:  $\lambda_1 = \alpha + j\beta$  e  $\lambda_2 = \alpha - j\beta$
- Então a **resposta à entrada nula** é

$$y_0(t) = c_1 e^{(\alpha + j\beta)t} + c_2 e^{(\alpha - j\beta)t}$$



## Resposta à entrada nula

- Veja porque as raízes complexas devem aparecer na forma de **pares complexos conjugados**
- Seja a **equação característica**  $(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) = 0$ , onde  $\lambda_1 = \alpha + j\beta$  é **uma** das raízes. Que condições são impostas a  $\lambda_2$ ?

$$\lambda^2 - \lambda_1 \lambda - \lambda_2 \lambda + \lambda_1 \lambda_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda^2 - (\lambda_1 + \lambda_2)\lambda + (\lambda_1 \lambda_2) = 0$$

- Para um **sistema físico real** os **coeficientes do polinômio característico** têm de ser **reais**
- Condições: **1)** a **soma** de  $\lambda_1$  com  $\lambda_2$  deve ser um número real e **2)** o **produto** de  $\lambda_1$  com  $\lambda_2$  deve ser um número real

$$\lambda_1 + (\alpha - j\beta) = \alpha + j\beta + \alpha - j\beta = 2\alpha \quad (\text{real})$$

$$\lambda_1 \cdot (\alpha - j\beta) = (\alpha + j\beta) \cdot (\alpha - j\beta) = \alpha^2 - j\alpha\beta + j\alpha\beta + \beta^2 = \alpha^2 + \beta^2 \quad (\text{real})$$



## Resposta à entrada nula

- Como a **resposta à entrada nula** é

$$y_0(t) = c_1 e^{(\alpha + j\beta)t} + c_2 e^{(\alpha - j\beta)t}$$

- Para  $y_0(t)$  ser **real**,  $c_1$  e  $c_2$  devem ser **complexos conjugados**

- Sejam

$$c_1 = \frac{c}{2} e^{j\theta} \quad \text{e} \quad c_2 = \frac{c}{2} e^{-j\theta} \quad \text{com } c \text{ real}$$

$$y_0(t) = \frac{c}{2} e^{j\theta} e^{(\alpha + j\beta)t} + \frac{c}{2} e^{-j\theta} e^{(\alpha - j\beta)t}$$

$$y_0(t) = \frac{c}{2} e^{\alpha t} \left( e^{j\theta} e^{j\beta t} + e^{-j\theta} e^{-j\beta t} \right) = \frac{c}{2} e^{\alpha t} \left( e^{j(\theta + \beta t)} + e^{-j(\theta + \beta t)} \right)$$

- Por Euler

$$y_0(t) = c e^{\alpha t} \cos(\beta t + \theta)$$

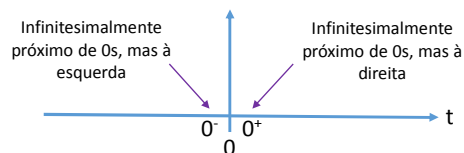


## Resposta à entrada nula

Estudar exemplo 2.1 (a), (b) e (c)

## Resposta à entrada nula

- Em **situações práticas**  $y_0(0)$ ,  $\dot{y}_0(0)$ ,  $\ddot{y}_0(0)$ , ... , são obtidas a partir das **condições físicas** do sistema



- Assumiremos que  $x(t)$  passará a **excitar** o sistema **a partir de  $t=0s$**
- saída**  $(y(t)) = \text{resposta à entrada nula } (y_0(t)) + \text{resposta em estado nulo}$
- Como em **0** a entrada  $x(t)$  ainda não está atuando  

$$y(0^-) = y_0(0^-), \dot{y}(0^-) = \dot{y}_0(0^-), \ddot{y}(0^-) = \ddot{y}_0(0^-), \dots$$
- Para a **resposta à entrada nula**  $y_0(0^+) = y_0(0^-)$ ,  $\dot{y}_0(0^+) = \dot{y}_0(0^-)$ ,  $\ddot{y}_0(0^+) = \ddot{y}_0(0^-)$ , ...
- De **forma geral**  $y(0^+) \neq y(0^-)$ ,  $\dot{y}(0^+) \neq \dot{y}(0^-)$ ,  $\ddot{y}(0^+) \neq \ddot{y}(0^-)$ , ...

## Resposta à entrada nula

Estudar exemplo 2.2