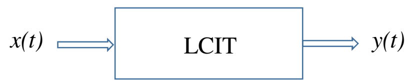
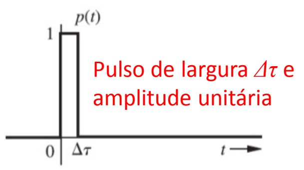
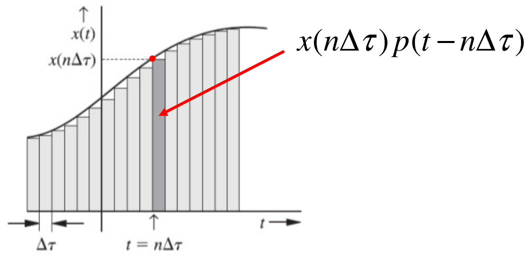
Resposta do sistema à entrada externa (estado nulo)

- Dado sistema com condições iniciais nulas



- $y(t)$ será a resposta total do sistema
- O sistema é linear, contínuo no tempo e invariante no tempo (vale o princípio da superposição)
- Vamos decompor $x(t)$ na forma de soma de pulsos





Resposta do sistema à entrada externa (estado nulo)

- Somando todos os pulsos para formar $x(t)$

$$x(t) = \lim_{\Delta\tau \to 0} \sum_{\tau} x(n\Delta\tau)\, p(t - n\Delta\tau) = \lim_{\Delta\tau \to 0} \sum_{\tau} \left[\frac{x(n\Delta\tau)}{\Delta\tau} \right] p(t - n\Delta\tau)\Delta\tau$$

- A quantidade $\left[\frac{x(n\Delta\tau)}{\Delta\tau} \right] p(t - n\Delta\tau)$ é um pulso em $t = n\Delta\tau$, e sua área vale $x(n\Delta\tau)$

- Para esse pulso, quando $\Delta\tau \to 0$, a altura tende ao ∞, mas sua área continua valendo $x(n\Delta\tau)$. Logo esse pulso tende ao impulso $x(n\Delta\tau)\delta(t-n\Delta\tau)$ quando $\Delta\tau \to 0$
- Assim

$$x(t) = \lim_{\Delta\tau \to 0} \sum_{\tau} x(n\Delta\tau)\delta(t - n\Delta\tau)\Delta\tau$$

Resposta do sistema à entrada externa (estado nulo)

- Sendo o sistema LCIT, veja as relações entrada/saída

$$x(t) \Rightarrow \boxed{\text{LCIT}} \Rightarrow y(t)$$

$$\delta(t) \overset{\text{Resposta ao impulso}}{\Longrightarrow} h(t)$$

$$\delta(t-n\Delta\tau) \overset{\text{Invariância no tempo}}{\Longrightarrow} h(t-n\Delta\tau)$$

constante

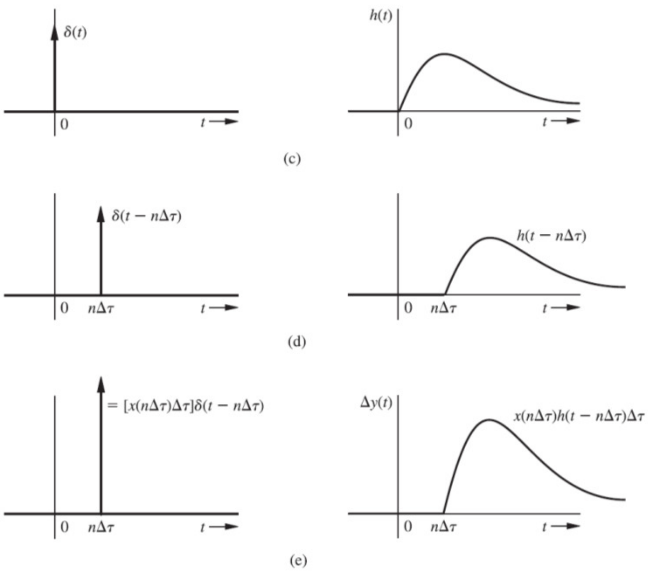
$$\underbrace{x(n\Delta\tau)}_{\text{constante}}\delta(t-n\Delta\tau) \overset{\text{Homogeneidade (linearidade)}}{\Longrightarrow} \underbrace{x(n\Delta\tau)}_{\text{constante}}h(t-n\Delta\tau)$$

constante

$$\underbrace{\lim_{\Delta\tau\to 0}\sum_{\tau} x(n\Delta\tau)\delta(t-n\Delta\tau)\Delta\tau}_{x(t)} \overset{\text{Aditividade (linearidade)}}{\Longrightarrow} \underbrace{\lim_{\Delta\tau\to 0}\sum_{\tau} x(n\Delta\tau)h(t-n\Delta\tau)\Delta\tau}_{y(t)}$$

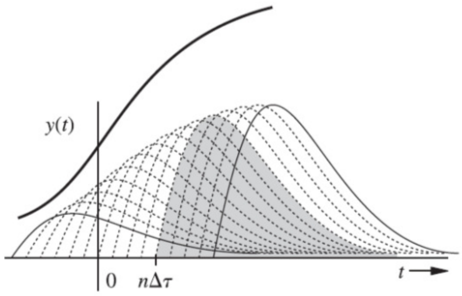
Resposta do sistema à entrada externa (estado nulo)

- Graficamente



Resposta do sistema à entrada externa (estado nulo)

- Graficamente



(f)

- Então

$$y(t) = \lim_{\Delta\tau \to 0} \sum_{\tau} x(n\Delta\tau)h(t - n\Delta\tau)\Delta\tau = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

Conhecendo-se $h(t)$ é possível determinar $y(t)$ para qualquer $x(t)$

Resposta do sistema à entrada externa (estado nulo)

- Na operação entre $x(t)$ e $h(t)$ para se obter $y(t)$, realiza-se a chamada operação de convolução entre $x(t)$ e $h(t)$

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

Integral de convolução

$$y(t) = x(t) * h(t)$$

- Vamos estudar na próxima seção a integral de convolução

A integral de convolução

- Definição - A integral de convolução entre duas funções $x_1(t)$ e $x_2(t)$ é representada por

$$x_1(t) * x_2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x_1(\tau) x_2(t-\tau) d\tau$$

Propriedades

- Propriedade comutativa: $x_1(t)*x_2(t) = x_2(t)*x_1(t)$

Dada a definição, seja $z=t-\tau$, ou seja, $\tau=t-z$ e $d\tau=-dz$, então

$$x_1(t) * x_2(t) = -\int_{\infty}^{-\infty} x_1(t-z) x_2(z) dz = \int_{-\infty}^{\infty} x_1(t-z) x_2(z) dz = x_2(t) * x_1(t)$$

A integral de convolução

- Propriedade distributiva: $x_1(t)*[x_2(t)+x_3(t)] = x_1(t)*x_2(t)+x_1(t)*x_3(t)$

Sai da própria definição (verifique)

- Propriedade associativa: $x_1(t)*[x_2(t) *x_3(t)] = [x_1(t)*x_2(t)]*x_3(t)$

Sai da própria definição (verifique)

- Propriedade do deslocamento: Seja $x_1(t)*x_2(t) = c(t)$

Então

$$x_1(t) * x_2(t-T) = x_1(t-T) * x_2(t) = c(t-T)$$

e

$$x_1(t-T_1) * x_2(t-T_2) = c(t-T_1-T_2)$$

A integral de convolução

Veja,

$$x_1(t) * x_2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x_1(\tau) x_2(t-\tau) d\tau = c(t)$$

$$x_1(t) * x_2(t-T) = \int_{-\infty}^{\infty} x_1(\tau) x_2(t-T-\tau) d\tau = c(t-T)$$

a segunda propriedade segue da primeira

- Convolução com o impulso: $x(t)*\delta(t) = x(t)$

Veja

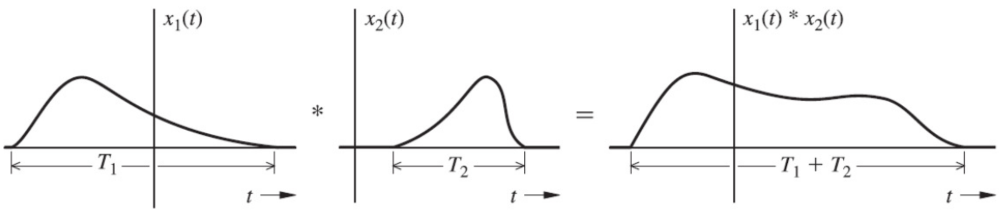
$$x(t) * \delta(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\delta(t-\tau) d\tau$$

temos um impulso em $\tau=t$. Pelo teorema da amostragem

$$x(t) * \delta(t) = x(t) \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-\tau) d\tau = x(t) \times 1 = x(t)$$

A integral de convolução

- Propriedade da largura: Se $x_1(t)$ e $x_2(t)$ tiverem duração T_1 e T_2, respectivamente, então $x_1(t)*x_2(t)$ terá duração T_1+T_2



A demonstração vem da análise gráfica que faremos adiante

A integral de convolução

- Resposta de estado nulo e causalidade:

Vimos que, para um sistema LCIT

$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

Integral em τ. Já t é uma constante (parâmetro)

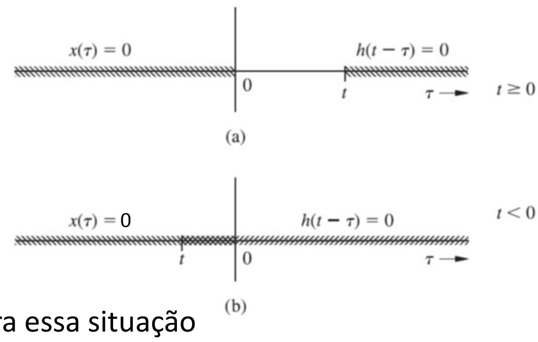
- A resposta de um sistema causal ao impulso unitário é um sinal causal. Assumiremos condições iniciais nulas
- Quais são os limites da integral de convolução, para essa situação?
- Se $x(t)$ é causal $x(t) = 0$ p/ $t < 0 \rightarrow x(\tau) = 0$ p/ $\tau < 0$
- Assumamos inicialmente $t > 0$
- Se $h(t)$ é causal $\rightarrow h(t-\tau) = 0$ p/ $(t-\tau) < 0$ ou seja $\tau > t$
- Veja que se $t < 0$, a análise acima continua válida, mas nesse caso teremos $x(\tau)h(t-\tau) = 0$, para qualquer τ, como veremos na figura a seguir

A integral de convolução

- Resposta de estado nulo e causalidade:

$$y(t) = \int_{0^-}^{t} x(\tau)h(t-\tau)d\tau \quad \text{p/ } t \geq 0$$

$$y(t) = 0 \quad \text{p/ } t < 0$$



Limites da integral de convolução, para essa situação

$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{0^-}^{t} x(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

Limite imposto pela causalidade do sistema

Limite imposto pelas condições iniciais nulas (0^- para pegar um impulso em t=0)

A integral de convolução

Estudar exemplo 2.5

A integral de convolução

- Tabela de convolução:

Poderia ter sido utilizada para resolver o exemplo 2.5

$x_1(t)$	$x_2(t)$	$x_1(t)*x_2(t) = x_2(t)*x_1(t)$
$x(t)$	$\delta(t-T)$	$x(t-T)$
$e^{\lambda t}u(t)$	$u(t)$	$\frac{1-e^{\lambda t}}{-\lambda}u(t)$
$u(t)$	$u(t)$	$tu(t)$
$e^{\lambda_1 t}u(t)$	$e^{\lambda_2 t}u(t)$	$\frac{e^{\lambda_1 t}-e^{\lambda_2 t}}{\lambda_1-\lambda_2}u(t) \quad \lambda_1 \neq \lambda_2$
$e^{\lambda t}u(t)$	$e^{\lambda t}u(t)$	$te^{\lambda t}u(t)$
$te^{\lambda t}u(t)$	$e^{\lambda t}u(t)$	$\frac{1}{2}t^2e^{\lambda t}u(t)$
$t^N u(t)$	$e^{\lambda t}u(t)$	$\frac{N!e^{\lambda t}}{\lambda^{N+1}}u(t) - \sum_{k=0}^{N}\frac{N!t^{N-k}}{\lambda^{k+1}(N-k)!}u(t)$
$t^M u(t)$	$t^N u(t)$	$\frac{M!N!}{(M+N+1)!}t^{M+N+1}u(t)$
$te^{\lambda_1 t}u(t)$	$e^{\lambda_2 t}u(t)$	$\frac{e^{\lambda_2 t}-e^{\lambda_1 t}+(\lambda_1-\lambda_2)te^{\lambda_1 t}}{(\lambda_1-\lambda_2)^2}u(t)$
$t^M e^{\lambda t}u(t)$	$t^N e^{\lambda t}u(t)$	$\frac{M!N!}{(N+M+1)!}t^{M+N+1}e^{\lambda t}u(t)$
$t^M e^{\lambda_1 t}u(t)$ $\lambda_1 \neq \lambda_2$	$t^N e^{\lambda_2 t}u(t)$	$\sum_{k=0}^{M}\frac{(-1)^k M!(N+k)!t^{M-k}e^{\lambda_1 t}}{k!(M-k)!(\lambda_1-\lambda_2)^{N+k+1}}u(t) + \sum_{k=0}^{N}\frac{(-1)^k N!(M+k)!t^{N-k}e^{\lambda_2 t}}{k!(N-k)!(\lambda_2-\lambda_1)^{M+k+1}}u(t)$
$e^{-\alpha t}\cos(\beta t+\theta)u(t)$	$e^{\lambda_1 t}u(t)$	$\frac{\cos(\theta-\phi)e^{\lambda t}-e^{-\alpha t}\cos(\beta t+\theta-\phi)}{\sqrt{(\alpha+\lambda)^2+\beta^2}}u(t)$
$e^{\lambda_1 t}u(t)$	$e^{\lambda_2 t}u(-t)$	$\frac{e^{\lambda_1 t}u(t)+e^{\lambda_2 t}u(-t)}{\lambda_2-\lambda_1} \quad \mathrm{Re}\,\lambda_2 > \mathrm{Re}\,\lambda_1$
$e^{\lambda_1 t}u(-t)$	$e^{\lambda_2 t}u(-t)$	$\frac{e^{\lambda_1 t}-e^{\lambda_2 t}}{\lambda_2-\lambda_1}u(-t)$

A integral de convolução

Estudar exemplo 2.6

A integral de convolução

- Resposta a entradas complexas:

Se o sistema for real, $h(t)$ será real

Seja $h(t)$ real e a entrada complexa $x(t) = x_r(t) + jx_i(t)$

$$y(t) = h(t) * [x_r(t) + jx_i(t)] = h(t) * x_r(t) + jh(t) * x_i(t) = y_r(t) + jy_i(t)$$

$$x_r(t) \Rightarrow y_r(t)$$

$$x_i(t) \Rightarrow y_i(t)$$

Lembrar que em sistemas LCIT, vale o princípio da superposição

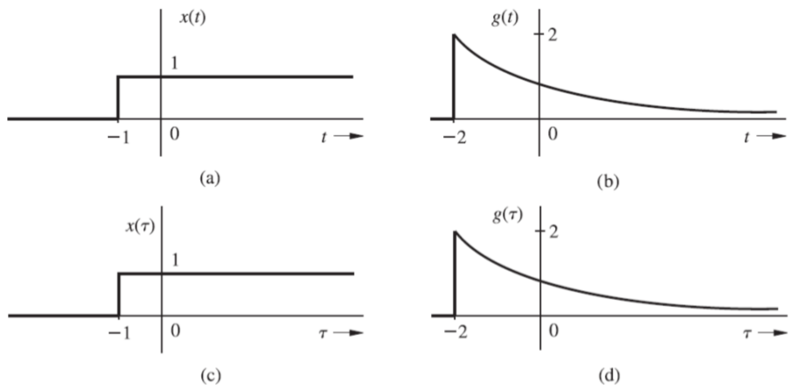
$$\text{se} \quad x_1(t) \Rightarrow y_1(t), \; x_2(t) \Rightarrow y_2(t), \; \ldots, x_n(t) \Rightarrow y_n(t)$$

$$x(t) = x_1(t) + x_2(t) + \ldots + x_n(t) \Rightarrow y(t) = y_1(t) + y_2(t) + \ldots + y_n(t)$$

A integral de convolução

- Interpretação gráfica da convolução: $c(t)=\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)g(t-\tau)d\tau$

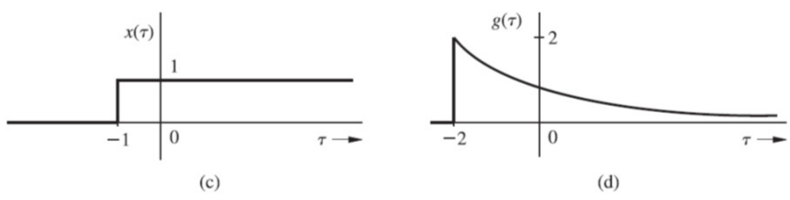
- Para exemplificar, sejam as curvas temporais



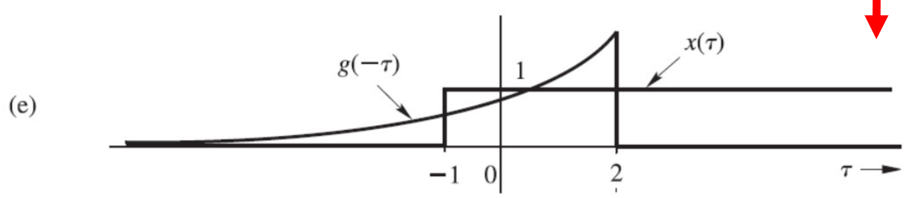
Trocamos apenas t por τ

A integral de convolução

- Interpretação gráfica da convolução: $c(t)=\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)g(t-\tau)d\tau$

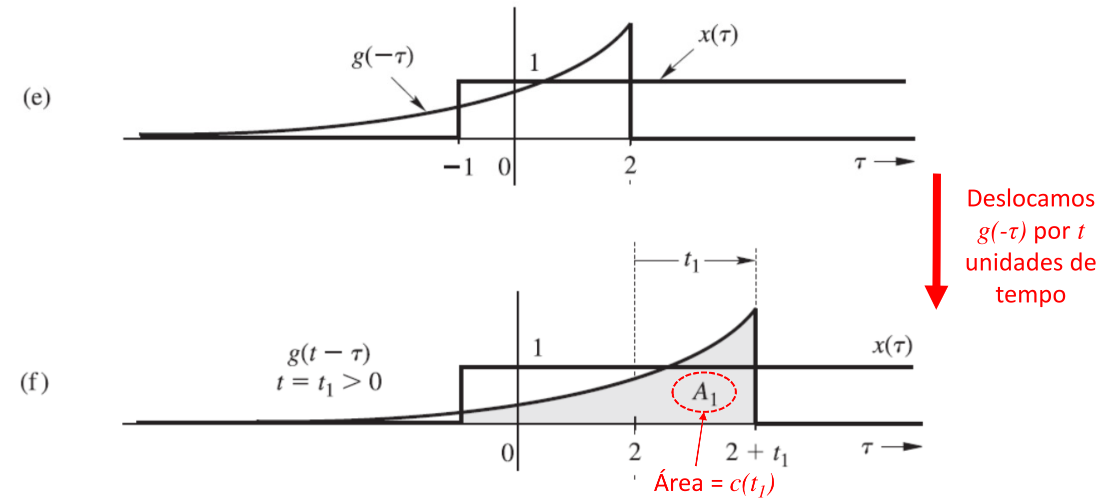


Espelhamos $g(\tau)$



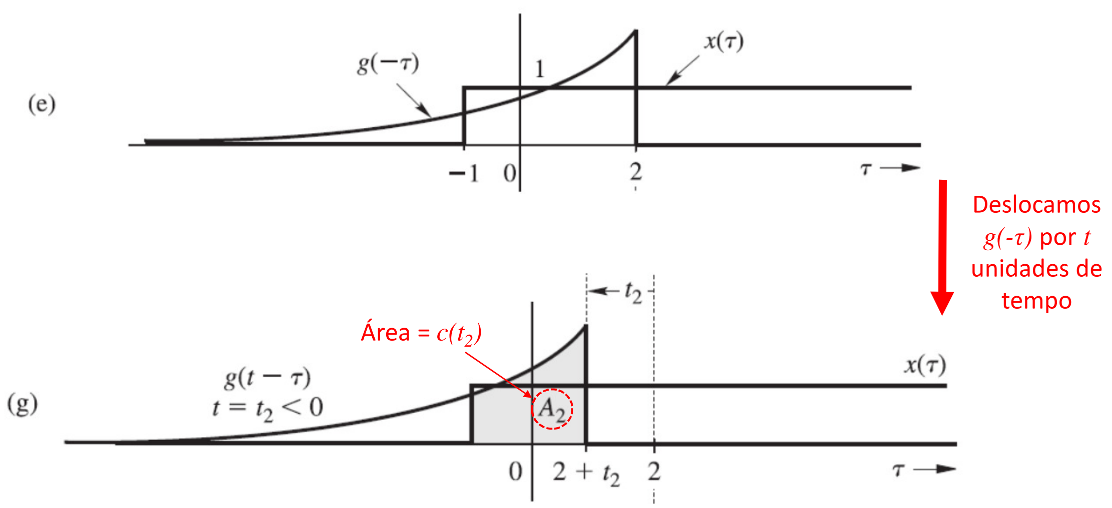
A integral de convolução

- Interpretação gráfica da convolução: $c(t)=\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)g(t-\tau)d\tau$



A integral de convolução

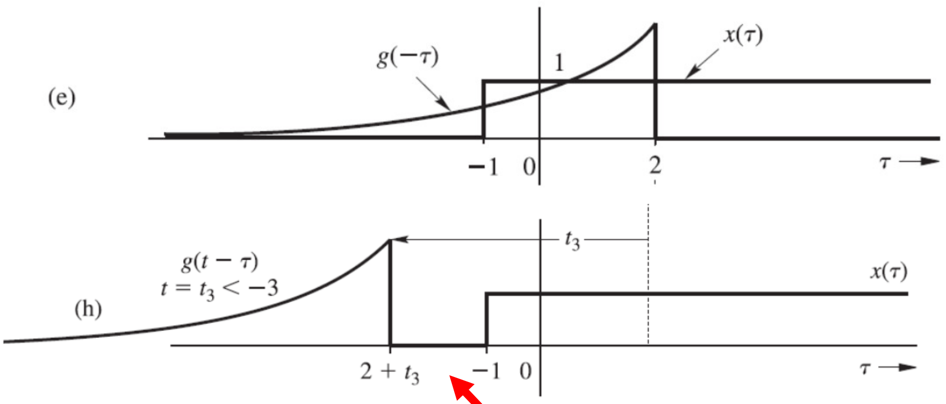
- Interpretação gráfica da convolução: $c(t)=\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)g(t-\tau)d\tau$



A integral de convolução

- Interpretação gráfica da convolução:

$$c(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) g(t-\tau) d\tau$$



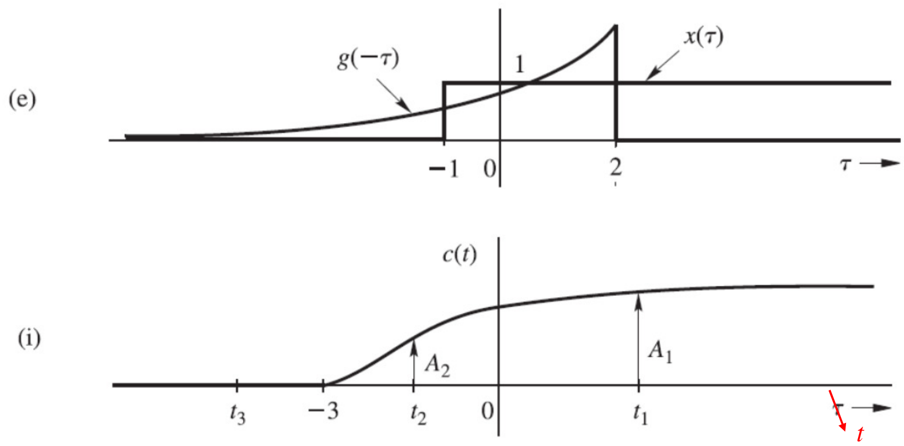
Deslocamos $g(-\tau)$ por t unidades de tempo

Não há sobreposição entre as curvas (área nula) → $c(t_3)=0$

A integral de convolução

- Interpretação gráfica da convolução:

$$c(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) g(t-\tau) d\tau$$



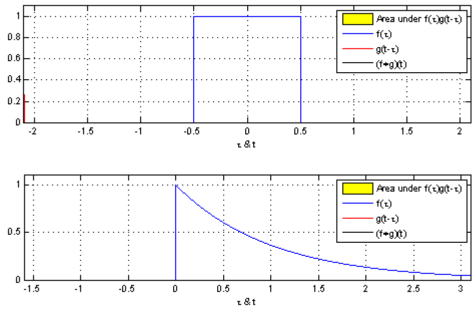
Faz-se o procedimento para t de $-\infty$ a $+\infty$

Corrigir no livro

A integral de convolução

- Interpretação gráfica da convolução:

Animações: Wikepedia (convolução)



$$(f * g)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)g(t-\tau)d\tau$$

A integral de convolução

- Interpretação gráfica da convolução: $c(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)g(t-\tau)d\tau$

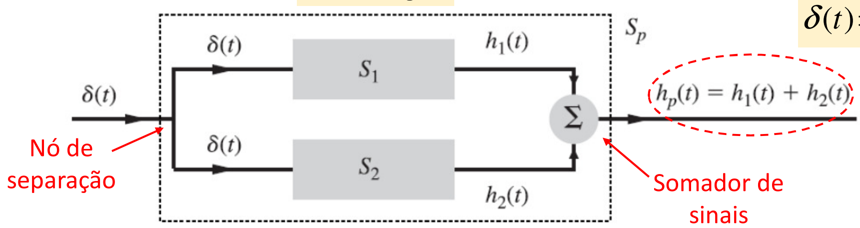
Estudar exemplos 2.7 a 2.9

Sistemas interconectados

- Podemos simplificar a análise de um sistema quebrando-o em subsistemas mais simples
- Conexões básicas: (a) Paralela e (b) Série ou cascata
- Sejam S_1 e S_2 dois subsistemas formando o sistema S_p
- Conexão paralela

$$\delta(t) \overset{S_1}{\Rightarrow} h_1(t)$$

$$\delta(t) \overset{S_p}{\Rightarrow} h_p(t)$$

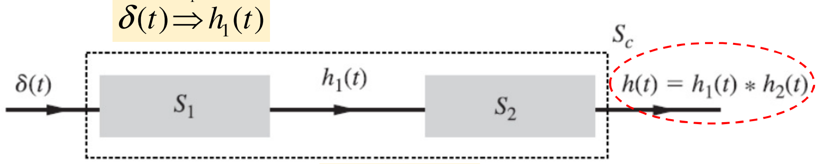


$$\delta(t) \overset{S_2}{\Rightarrow} h_2(t)$$

Sistemas interconectados

- Conexão série ou cascata

$$\delta(t) \overset{S_1}{\Rightarrow} h_1(t)$$



$$\delta(t) \overset{S_2}{\Rightarrow} h_2(t) \qquad h_1(t) \overset{S_2}{\Rightarrow} h_1(t) * h_2(t)$$

- S_1 e S_2 formam S_c

$$\delta(t) \overset{S_c}{\Rightarrow} h(t) = h_1(t) * h_2(t)$$

- Tanto no caso paralelo como no caso em cascata assumimos que um subsistema não carrega o outro

Sistemas interconectados

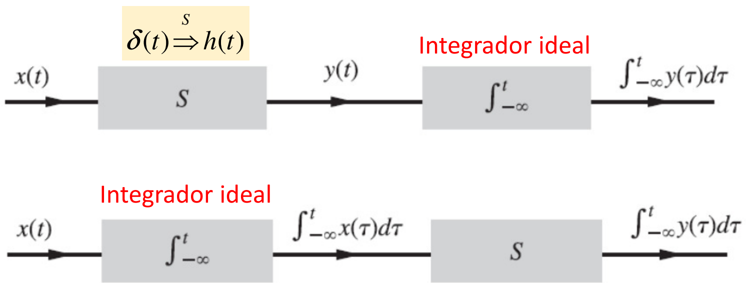
- Pela propriedade comutativa da convolução (teoricamente)

$$\delta(t) \Rightarrow h(t) = h_2(t) * h_1(t) = h_1(t) * h_2(t)$$

Troca de posições

Sistemas interconectados

- Sejam as duas associações em cascata a seguir



- Isso nos permite concluir que

$$\text{Se} \quad x(t) \Rightarrow y(t)$$

$$\text{então} \quad \int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau \Rightarrow \int_{-\infty}^{t} y(\tau)d\tau$$

Sistemas interconectados

- Se no diagrama anterior substituirmos o integrador ideal por um diferenciador ideal chegaremos à conclusão que

$$\text{Se} \quad x(t) \Rightarrow y(t)$$

$$\text{então} \quad \frac{dx(t)}{dt} \Rightarrow \frac{dy(t)}{dt}$$

- Se no diagrama anterior (com o integrador ideal) $x(t) = \delta(t) \rightarrow y(t) = h(t)$ então concluímos que se $x(t)=u(t) \rightarrow y(t)=g(t)$

$$g(t) = \int_{-\infty}^{t} h(\tau)d\tau$$

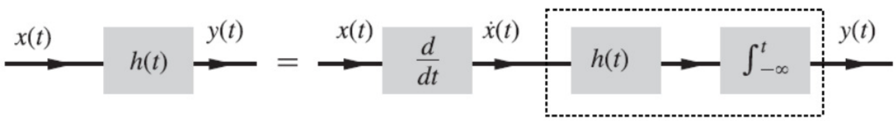
Se um sistema tem resposta ao impulso dada por $h(t)$, sua resposta ao degrau unitário é dada por $g(t)$, a integral de $h(t)$

- No diagrama em cascata, se S_1 e S_2 forem tais que para $x(t)=\delta(t)$ temos $y(t)= \delta(t)$, então S_1 é o sistema inverso de S_2 e vice-versa

$$h_1(t) = h(t) \;\text{ e }\; h_2(t) = h_i(t) \;\text{ então }\; h(t) * h_i(t) = \delta(t)$$

Sistemas interconectados

- Finalmente, seja a equivalência entre os diagramas a seguir



- Para a caixa pontilhada a resposta ao impulso é dada por g(t), logo

$$y(t) = x(t) * h(t) = \dot{x}(t) * g(t)$$

Para o diagrama da esquerda

Para o diagrama da direita

Função exponencial de duração infinita: e^{st}

- Nessa exponencial, geralmente s é complexo
- Seja a resposta em estado nulo de um sistema a essa exponencial, sendo que t começa em -∞
- Se no sistema $\delta(t) \longrightarrow h(t)$

$$y(t) = h(t) * e^{st}$$

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{s(t-\tau)} d\tau$$

$$y(t) = e^{st} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{-s\tau} d\tau}_{\text{Função apenas de } s}$$

Seja $H(s) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{-s\tau} d\tau$

logo $y(t) = e^{st} \underbrace{H(s)}_{\text{Constante para um dado } s}$

$y(t)$ tem a mesma forma de e^{st}, a menos de uma constante multiplicativa

e^{st} é uma autofunção do sistema que tem esse $h(t)$

Função exponencial de duração infinita: e^{st}

- A expressão

$$y(t) = e^{st} H(s)$$

é válida para os valores de s em que $H(s)$ converge (isso no plano complexo)

- $H(s)$ é denominada função de transferência do sistema LCIT
- Vimos que para o sitema LCIT

$$(D^N + a_1 D^{N-1} + \cdots + a_{N-1} D + a_N) y(t) = (b_{N-M} D^M + b_{N-M+1} D^{M-1} + \cdots + b_{N-1} D + b_N) x(t)$$

- As derivadas são calculadas no tempo, então

$$(D^N + a_1 D^{N-1} + \cdots + a_{N-1} D + a_N) e^{st} H(s) = (b_{N-M} D^M + b_{N-M+1} D^{M-1} + \cdots + b_{N-1} D + b_N) e^{st}$$

$$(s^N + a_1 s^{N-1} + \cdots + a_{N-1} s + a_N) \cancel{e^{st}} H(s) = (b_{N-M} s^M + b_{N-M+1} s^{M-1} + \cdots + b_{N-1} s + b_N) \cancel{e^{st}}$$

$$H(s) = \frac{b_{N-M} s^M + b_{N-M+1} s^{M-1} + \ldots + b_{N-1} s + b_N}{s^N + a_1 s^{N-1} + \ldots + a_{N-1} s + a_N} = \frac{P(s)}{Q(s)}$$

Resposta total do sistema

- Soma da resposta à entrada nula e resposta ao estado nulo

$$\text{resposta total} = \sum_{k=1}^{N} c_k e^{\lambda_k t} + x(t) * h(t)$$

Para o caso de raízes características distintas

- No exemplo do circuito *RLC*, com $x(t) = 10e^{-3t}u(t)$ e condições iniciais $y(0^-)=0$ e $v_c(0^-)=5$

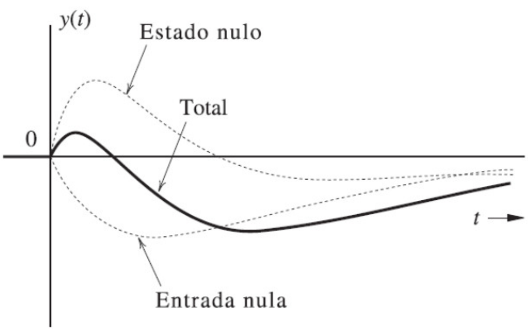
$$\text{resposta total} = \underbrace{\left(-5e^{-t} + 5e^{-2t}\right)}_{\text{resp. entrada nula}} + \underbrace{\left(-5e^{-t} + 20e^{-2t} - 15e^{-3t}\right)}_{\text{resp. estado nulo}} \quad \text{p/ } t \geq 0$$

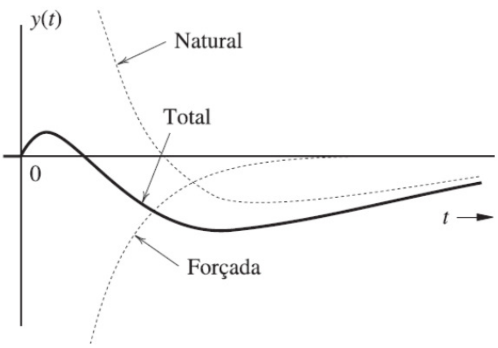
- Reorganizando

$$\text{resposta total} = \underbrace{\left(-10e^{-t} + 25e^{-2t}\right)}_{\text{resp. natural } y_n(t)} + \underbrace{\left(-15e^{-3t}\right)}_{\text{resp. forçada } y_\phi(t)} \quad \text{p/ } t \geq 0$$

Resposta total do sistema

- As componentes da resposta total





Solução clássica de equações diferenciais

- Determinação da solução natural e solução forçada, $y_n(t)$ e $y_\emptyset(t)$
- $y_n(t)$ reúne os termos associados aos modos naturais (característicos)
- $y_\emptyset(t)$ reúne os termos associados à excitação, não relacionados aos modos naturais

$$y(t) = y_n(t) + y_\phi(t)$$

$$Q(D)y_n(t) + Q(D)y_\phi(t) = P(D)x(t)$$

- Assim

$$Q(D)y_n(t) = 0$$

$$Q(D)y_\phi(t) = P(D)x(t)$$

- $y_n(t)$ é a resposta para a equação homogênea e é dada por uma combinação linear dos modos característicos (naturais) do sistema. Depende das condições iniciais

Solução clássica de equações diferenciais

- Determinação da solução forçada, $y_\emptyset(t)$
- Simples quando $x(t)$ tem um número finito de derivadas independentes (ex. $e^{\zeta t}$ e t^r)
- A resposta forçada é dada por uma combinação linear de $x(t)$ e suas derivadas independentes
- Ex. $x(t) = at^2+bt+c$. As derivadas independentes são: $2at+b$ e $2a$, então

$$y_\phi(t) = \beta_2 t^2 + \beta_1 t + \beta_0$$

- Ex. $x(t) = a\, e^{\zeta t}$. Só temos uma derivada independente: $a\zeta\, e^{\zeta t}$, então

$$y_\phi(t) = \beta e^{\zeta t}$$

- Os coeficiente são obtidos por comparação entre os termos semelhantes do 1º e do 2º membros de

$$Q(D)y_\phi(t) = P(D)x(t)$$

Solução clássica de equações diferenciais

- Tabela

Tabela 2.2 Resposta forçada

Nº	Entrada $x(t)$	Resposta forçada
1	$e^{\zeta t} \quad \zeta \neq \lambda_i \ (i = 1, 2, \ldots, N)$	$\beta e^{\zeta t}$
2	$e^{\zeta t} \quad \zeta = \lambda_i$	$\beta t e^{\zeta t}$
3	k (uma constante)	β (uma constante)
4	$\cos(\omega t + \theta)$	$\beta \cos(\omega t + \phi)$
5	$(t^r + \alpha_{r-1}t^{r-1} + \cdots + \alpha_1 t + \alpha_0)e^{\zeta t}$	$(\beta_r t^r + \beta_{r-1}t^{r-1} + \cdots + \beta_1 t + \beta_0)e^{\zeta t}$

Solução clássica de equações diferenciais

Estudar exemplo 2.10

Solução clássica de equações diferenciais

Entradas importantes do ponto de vista de Engenharia

- Entrada exponencial $x(t) = e^{\zeta t}$
- Pela tabela $y_\phi(t) = \beta e^{\zeta t}$, então no sistema

$$Q(D)y_\phi(t) = P(D)x(t)$$
$$Q(D)\beta e^{\zeta t} = P(D)e^{\zeta t}$$

- mas $D^r e^{\zeta t} = \zeta^r e^{\zeta t}$
- logo $Q(D)e^{\zeta t} = Q(\zeta)e^{\zeta t}$ e
$P(D)e^{\zeta t} = P(\zeta)e^{\zeta t}$
- Assim

$$\beta Q(\zeta)e^{\zeta t} = P(\zeta)e^{\zeta t}$$

$$\beta = \frac{P(\zeta)}{Q(\zeta)}$$

se $x(t) = e^{\zeta t}u(t) \Rightarrow$

$$y_\phi(t) = H(\zeta)e^{\zeta t}u(t)$$

onde $H(\zeta) = \dfrac{P(\zeta)}{Q(\zeta)}$

Assumiu-se o caso de raízes características distintas. Os K_j são obtidos a partir das condições auxiliares

finalmente

$$y(t) = \sum_{j=1}^{N} K_j e^{\lambda_j t} + H(\zeta)e^{\zeta t}$$

Solução clássica de equações diferenciais

Entradas importantes do ponto de vista de Engenharia

- Entrada constante $x(t) = C = Ce^{0t}$, onde $\zeta=0$

$$y_\phi(t) = CH(\zeta)e^{\zeta t} \quad \text{com} \quad \zeta = 0$$
$$y_\phi(t) = CH(0)$$

- Entrada exponencial $x(t) = e^{j\omega t}$, onde $\zeta=j\omega$

$$y_\phi(t) = H(j\omega)e^{j\omega t}$$

- Entrada senoidal $x(t) = cos(\omega t)$ $\Rightarrow x(t) = \cos(\omega t) = \left(e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}\right)/2$

$$y_\phi(t) = \frac{1}{2}\left(H(j\omega)e^{j\omega t} + H(-j\omega)e^{-j\omega t}\right)$$

$H(j\omega)e^{j\omega t}$ e $H(-j\omega)e^{-j\omega t}$ são complexos conjugados

Solução clássica de equações diferenciais

Entradas importantes do ponto de vista de Engenharia

$$y_\phi(t) = \frac{1}{2}\left(H(j\omega)e^{j\omega t} + H(-j\omega)e^{-j\omega t}\right)$$

$$y_\phi(t) = \mathrm{Re}\left(H(j\omega)e^{j\omega t}\right) \qquad \text{mas} \;\; H(j\omega) = \left|H(j\omega)\right|e^{j\angle H(j\omega)}$$

$$y_\phi(t) = \mathrm{Re}\left(\left|H(j\omega)\right|e^{j\angle H(j\omega)}e^{j\omega t}\right)$$

$$y_\phi(t) = \mathrm{Re}\left(\left|H(j\omega)\right|e^{j(\omega t + \angle H(j\omega))}\right)$$

$$y_\phi(t) = \left|H(j\omega)\right|\cos\left(\omega t + \angle H(j\omega)\right)$$

Nesse caso, para um sistema LCIT, a saída tem a mesma forma da entrada (senoidais) e mesma frequência (ω). O que muda são a amplitude e o argumento inicial

De forma geral para $x(t) = A\cos(\omega t+\theta)$

$$y_\phi(t) = A\left|H(j\omega)\right|\cos\left(\omega t + \theta + \angle H(j\omega)\right)$$

Solução clássica de equações diferenciais

Estudar exemplo 2.11